УДК 519.6 531

Зуб С. С.[1], к.т.н.,
Зуб С. І.[2], с.н.с.

Рівняння гамільтонової динаміки твердого тіла в кватерніонних змінних. Магнітний диполь в зовнішньому полі

[1]Харківський національний педагогічний університет імені Григорія Сковороди, 61002, м.Харків, вул. Артема, 29,
e-mail: stah@univ.kiev.ua
[2]Національного наукового центру «Інститут метрології», 61002, м.Харків, вул. Мироно-сицька, 42,
e-mail: sergii.zub@gmail.com

S. S. Zub[1], PhD,
S. I. Zub[2], researcher.

Hamiltonian equation of a rigid body dynamics in quaternion variable. The magnetic dipole in an external field

[1]H.S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University, 61002, Kharkiv, Artema str., 29,
e-mail: stah@univ.kiev.ua

[2]National Scientific Centre «Institute of Metrology», 61002, Kharkiv, Myronosicka st., 42,
e-mail: sergii.zub@gmail.com

У даній статті наведено явний вираз для симплектичної 2-форми на $T^*(S^3)$ у диференціалах кватерніонних змінних, показано, що ця 2-форма природним чином виражаються через кватерніонозначні диференціальні форми, і що вона збігається з симплектичною структурою, що індукується з $H \times H$. Виведені гамільтонові рівняння руху для магнітного диполя в зовнішньому полі в змішаному представленні.

Ключові слова: кватерніон, симплектична структура, рівняння руху.

This paper presents an explicit expression of the symplectic 2-form on $T^*(S^3)$ in differentials of the quaternion variables. It is shown that the 2-form is naturally expressed in terms of differential forms of the quaternions. It is shown that it coincides with symplectic structure induced from the $H \times H$. The canonical Poisson structure on the cotangent bundle of $T^*(S^3)$ group of the unit quaternions of $S^3 \subset H$ is considered. It is shown that Poisson brackets of the quaternion variables can be derived directly from the canonical Poisson brackets on the cotangent bundle to the group $SE(3)$ equipped with standard symplectic geometry and corresponds to the Liouville form on $T^*(SE(3))$. This results are based on the representation of the quaternion variables as the explicit functions of the elements of rotation matrix of the group SO(3). The algebraic meaning of the Poisson brackets of the quaternion variables was clarified and the relationship to the internal structure of the group was also revealed. The Hamiltonian equations of motion for a magnetic dipole in an external field in the mixed representation were derived.

Key Words: quaternion, symplectic structure, motion equations.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

1. Вступ

Застосуванню кватерніонів щодо опису *кінематики* твердого тіла присвячено величезну кількість публікацій, чого не можна сказати про їх застосування в *динаміці*.

Лагранжева динаміка в кватерніонних змінних дана в роботі В.В. Козлова. Виходячи з глибоких зв'язків між алгеброю кватерніонів та групами $SO(3)$ і $SO(4)$, А.В. Борисов та І.С. Мамаєв запропонували структуру Лі-Пуассона, що придатна для формулювання рівнянь руху твердого тіла в кватерніонних змінних. Огляд робіт з застосування кватерніонів в динаміці твердого тіла проведено в роботах [1,2].

У роботі [1] показано, що дужки Пуассона з кватерніонними змінними можуть бути виведені безпосередньо з канонічних дужок Пуассона (не Лі-Пуассона) на кодотичному розшаруванні до групи $SE(3)$, що забезпечено стандартною симплектичною геометрією, яка відповідає формі Ліувіля на $T^*(SE(3))$. Отримані результати базуються на представленні кватерніонних змінних як явних функцій елементів матриці обертань групи $SO(3)$.

У роботі [2] розглядається канонічна пуассонова структура на кодотичному розшаруванні $T^*(S^3)$ групи одиничних кватерніонів $S^3 \subset H$. Прояснено алгебраїчний сенс дужок Пуассона з кватерніонними змінними та розкрито їх зв'язок з внутрішньою структурою групи.

Інтерес до кватерніонів в застосуванні щодо опису руху твердого тіла завжди був пов'язаний з простотою та компактністю цього підходу, його незалежністю від конкретної системи координат. При цьому розмірність простору кватерніонів (тобто 4) лише на одиницю більше необхідного для Лагранжевого опису (наприклад, 3 кути Ейлера). Таким чином для кватерніонних параметрів вводиться лише один зв'язок — $|q|=1$ (при матричному описі необхідно враховувати 6 зв'язків для ортогональних матриць).

Інші переваги використання кватерніонів при моделюванні та пов'язоні з цим роботи обговорюються в [1,2]

Відзначимо, що в статті [2] використовується представлення так званої лівої тривіалізації для дужок Пуассона між базовими динамічними змінними, а в статті [1] - представлення правої тривіалізації [3-5]. Як показано в [3], лівій тривіалізації при теоретико-групповом описі механіки твердого тіла відповідає система відліку, що пов'язана з тілом, а правій тривіалізації відповідає інерціальна система. Перехід між цими представленнями є канонічним перетворенням, яке приведено в роботах [3,5].

На наш погляд найбільш природним є опис поступальних ступенів свободи в інерціальній системі відліку, а обертальних в система відліку, що пов'язана з тілом.

2. Симплектичні форми, які асоціюються із скалярним добутком

Алгебра кватерніонів H як векторний простір має Евклідову метрику $|q|^2$ [1]. Тоді на $H \times H$ згідно прикладу [4, d c. 67] визначена симплектична форма Ω, яка в даному випадку має вигляд

$$\Omega((Q_1,Q_2),(\Pi_1,\Pi_2)) = \langle \Pi_2, Q_1 \rangle - \langle \Pi_1, Q_2 \rangle, \quad \Pi_1,\Pi_2,Q_1,Q_2 \in H \tag{2.1}$$

($\langle,\rangle$- скалярний добуток в H, що відповідає згаданій вище метриці, так що виконується - $\langle q,q \rangle = |q|^2$).

Ця 2-форма є (з точністю до знаку) зовнішнім диференціалом 1-форми Ліувіля Θ

$$\Omega = -d\Theta, \quad \Theta((Q,\Pi)) = \langle \Pi, Q \rangle, \quad \Pi, Q \in H \tag{2.2}$$

У роботі [2] симплектична структура на кодотичному розшаруванні $T^*(S^3)$ до групи одиничних кватерніонів S^3 розглядалася як частинний випадок універсального підходу з точки зору груп Лі [3,5].

Виявляється, що симплектична структура з [2] та симплектична структура, що визначається виразом (2.1), тісно пов'язані. Цей зв'язок встановлюється в наступних розділах.

3. Індукована симплектична структура на підмноговидіріманового простору

У пропозиції 6.2-1 [4, c. 165] розкривається зв'язок між 1-формою Ліувіля Θ_N на кодотичному розшаруванні $T^*(N)$ підмноговиду $N \subset M$ деякого многовиду M і 1-формою Ліувіля Θ_M на кодотичному розшаруванні $T^*(M)$ цього многовиду.

З цієї пропозиції видно, що в загальному випадку немає способу вкладення $T^*(N)$ у $T^*(M)$, коли N є підмноговидом многовиду M.

Проте, таке відображення можна побудувати, якщо задана нормалізація [6, c. 220] $T(N) \subset T(M)$, зокрема, коли на M задана метрика, що індукує метрику на N.

У останньому випадку кодотичне розшарування $T^*(N)$ можна ототожнити з дотичним розшаруванням $T(N)$, яке, у свою чергу, канонічно вкладається в $T(M)$, еквівалентне до $T^*(M)$ (завдяки метриці на M).

Пропозиція. Нехай $N \subset M$, $N \xrightarrow{\iota} M$ - підмноговид ріманового многовиду M. Тоді на N індукується метрика з M і N стає рімановим підмноговидом M. На дотичному розшаруванні кожного ріманового многовиду, у тому числі на M і N, існує стандартна симплектична структура, причому така симплектична структура на TN збігається з індукованою з TM вкладенням $T\iota$.

□

Для будь-якого ріманового многовиду Q можна визначити пошаровий дифеоморфізм χ_Q

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r, "T\iota"] \arrow[d, "q_N"'] & TM \arrow[d, "q_M"] \\ N \arrow[r, "\iota"] & M \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

$$p \circ \chi_Q = q \tag{3.1a}$$

де χ_Q визначається так [3]

$$\chi_Q(u_x) \cdot v_x = \langle u_x, v_x \rangle, \quad u_x, v_x \in T_x Q \tag{3.2}$$

Форма Ліувіля на T^*Q виражається стандартним чином

$$\theta^0(\xi_\alpha) = \alpha[Tp \cdot \xi_\alpha], \quad \xi_\alpha \in T_\alpha(T^*Q) \tag{3.3}$$

За допомогою дифеоморфізму χ визначаємо 1-форму на TQ

$$\theta = \chi^* \theta^0 \tag{3.4}$$

а отже

$$\theta(\xi_u) = \chi^* \theta^0(\xi_u) = \theta^0(T\chi[\xi_u])$$
$$= \chi(u)[Tp \circ T\chi[\xi_u]] = \chi(u)[Tq[\xi_u]] = \langle u, Tq[\xi_u] \rangle$$

тобто

$$\theta(\xi_u) = \langle u, Tq[\xi_u] \rangle, \quad \xi_u \in T_u(TQ) \tag{3.4a}$$

1-форма θ визначає симплектичну структуру на TQ по формулі

$$\omega = -d\theta = -d\chi^* \theta^0 = \chi^* \omega^0 \tag{3.5}$$

оскільки χ - дифеоморфізм.

Має місце діаграма

$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[r, "\chi_Q"] \arrow[d, "q"'] & T^*Q \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

з якої випливає

$$\iota \circ q_N = q_M \circ T\iota \tag{3.6a}$$

Метрика на M індукує невироджену метрику на N

$$\langle u_n, v_n \rangle_N = \langle T\iota[u_n], T\iota[v_n] \rangle_M, \quad u_n, v_n \in T_n M \tag{3.7}$$

Покажемо, що 1-форма θ_N на TN індукується з 1-форми θ_M на TM вкладенням $T\iota$

$$\theta_N(\xi_u) = \langle u, Tq_N[\xi_u] \rangle_N = \langle T\iota \cdot u, T\iota \circ Tq_N[\xi_u] \rangle_M$$
$$= \langle T\iota \cdot u, Tq_M[TT\iota \cdot \xi_u] \rangle_M = \theta_M(TT\iota \cdot \xi_u), \quad \xi_u \in T_u(TN)$$

тобто

$$\theta_N(\xi_u) = \theta_M(TT\iota \cdot \xi_u), \quad \forall \xi_u \in T_u(TN) \tag{3.8}$$

або $\theta_N = T\iota^* \theta_M$.

Симплектичні 2-форми на TM і TN визначаються виразами

$$\begin{cases} \omega_M = -d\theta_M, \\ \omega_N = -d\theta_N = -d(T\iota^* \theta_M) = T\iota^* \omega_M \end{cases} \tag{3.9}$$

■

Зауваження. Симплектичні структури на дотичних просторах є об'єктами вивчення в лагранжевій механіці на многовидах. Симплектичний дифеоморфізм χ_Q є частковим випадком перетворення Лежандра.

4. Індукована симплектична структура на $T^*(S^3)$

Група одиничних кватерніонів S^3, як многовид, є підмноговидом (гіперповерхнею) в алгебрі H, що розглядається як евклідів простір з нормою $|q| = \sqrt{qq^\dagger}$.

$$S^3 \subset H, \quad \iota : S^3 \to H \tag{4.1}$$

Т.ч. до S^3 як підмноговиду ріманова простору застосовні всі твердження попереднього розділу. Зокрема, можна ототожнювати розшарування TS^3 і T^*S^3 за допомогою пошарового симплектичного дифеоморфізму χ.

Кодотичне розшарування $T^*(S^3)$, як це показано в [2], є безліччю пар виду

$$T^*(S^3) = \{(q, \pi) : |q| = 1, \langle q, \pi \rangle = 0, \quad q, \pi \in H\} \to T^*(S^3) \subset H \times H \tag{4.2}$$

тобто має місце вкладення $\kappa \equiv T\iota$ кодотичного розшарування $T^*(S^3)$ у $H \times H$

$$\kappa : T^*(S^3) \to H \times H \qquad (4.3)$$

Вкладення κ індукує на $T^*(S^3)$ з $H \times H$ 1-форму $\kappa^*\Theta$, яка, відповідно до *Пропозиції* попереднього розділу, збігається з канонічною 1-формою Ліувіля θ на $T^*(S^3)$. Тобто

$$\kappa^*\Theta = \theta \qquad (4.4)$$

З (4) і (3.2а) випливає

$$\theta_{(q,\pi)}((\xi,\rho)) = \langle \pi, \xi \rangle \qquad (4.5)$$

Крім того, внаслідок інваріантності скалярного добутку відносно лівих і правих зсувів

$$\theta_{(q,\pi)}((\xi,\rho)) = \langle \pi,\xi \rangle = \langle q^{-1}\pi, q^{-1}\xi \rangle = \langle \mu, q^{-1}dq(\xi) \rangle \qquad (4.6)$$

що збігається з виразом для форми Ліувіля на $T^*(S^3)$ у представленні лівої тривіалізації [2].

Отже, внаслідок

$$\omega = -d\theta = -d(\kappa^*\Theta) = -\kappa^* d\Theta = \kappa^*\Omega$$

доведено, що симплектична структура, що отримана в [2] і є канонічною структурою для $T^*(S^3)$, як для кодотичного розшарування групи одиничних кватерніонов, збігається з симплектичною структурою, що індукується з $H \times H$.

Виразу (4.6) можна надати вигляд (відповідний до лівої тривіалізації)

$$\theta_{(q,\mu)} = \langle \mu, q^{-1}dq \rangle \qquad (4.7)$$

Отже формально можна записати зовнішній диференціал (4.6) таким чином

$$d\theta = d\mu \cdot \wedge q^{-1}dq - \mu \cdot (q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq) \qquad (4.8)$$

тобто симплектична 2-форма в представленні лівої тривіалізації має вигляд

$$\omega = q^{-1}dq \cdot \wedge d\mu + \mu \cdot (q^{-1}dq \wedge q^{-1}dq) \qquad (4.9)$$

де скалярний добуток ($\langle , \rangle$ або $\cdot$) застосовується до кватерніонних твірних, а грассманов (зовнішній) добуток відноситься до диференціалів кватерніонних змінних (див. розділ 5).

5. Кватерніоннозначні диференціальні форми

Вирази $q^{-1}dq$, $q^{-1}dq \wedge d\mu$ і подібні до них є, по суті, кватерніоннозначними дифформами, тобто дифформами на H із значеннями в H. Тому розглянемо коротко властивості цих об'єктів.

Найбільш простий спосіб ввести їх — це розглянути асоціативну алгебру з одиницею над полем дійсних чисел з твірними

$$e_i, i = 1..3 \text{ і } dq^\mu, \mu = 0..3 \qquad (5.1)$$

які задовольняють

$$\begin{cases} e_r e_s = -\delta_{rs} e_0 + \varepsilon_{rts} e_t, \\ dq^\mu dq^\nu = -dq^\nu dq^\mu \\ e_r dq^\mu = dq^\mu e_r \end{cases} \qquad (5.2)$$

1. Завдяки 3-й властивості з (5.2) завжди можна розташовувати всі твірні dq^μ праворуч від твірних e_r. Т.ч. кожен одночлен буде представлений у вигляді кватерніонного "коефіциента" та простої зовнішньої форми виду $dq^{\mu_1} \dots dq^{\mu_k}$, яку будемо записувати у вигляді $dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_k}$.

2. Т.ч. до нашої алгебри належать всі елементи виду

$$e_\alpha dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_k}, \alpha, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in 0..3, \quad \mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_k \qquad (5.3)$$

Ці елементи і є базисом нашої алгебри.

3. Фактично, твердження 2 означає, що наша алгебра є тензорним добутком алгебри H і алгебри Грассмана зовнішніх форм на H, як на лінійному просторі.

4. При множенні одночленів вигляду (5.3) (де допустимо не мати жодного множника dq), незалежно множаться кватерніонні коефіцієнти та грассманові множники (див. 2), і оскільки обидва множення асоціативні, то і в цілому наша алгебра асоціативна.

5. Т.ч. елементи нашої алгебри є кватерніоннозначні зовнішні форми, тобто мають вигляд

$$\sum k_{\mu_1 \dots \mu_k} dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_k}, \; k_{\mu_1 \dots \mu_k} \in H, 0 \le \mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_k \le 3 \qquad (5.4)$$

і повністю задовольняють всім визначенням і властивостям векторозначних зовнішніх форм (див. [6,с.134-135]).

6. Т.ч. наша алгебра є алгеброю многочленів вигляду (5.4), і її елементи перемножуються як многочлени, з врахуванням некомутативності як коефіцєнтів, так і твірних грассманового типу.

7. Зовнішній диференціал (5.4) вводиться звичайним чином, тобто

$$d(k_{\mu_1 \dots \mu_k} dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_k}) = \partial_\mu k_{\mu_1 \dots \mu_k} dq^\mu \wedge dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_k} \qquad (5.5)$$

(також див. [6, с. 134-135]).

8. Т.ч. можна було б відразу визначити нашу алгебру як грассманову алгебру зовнішніх кватерніоннозначних форм, а потім визначити множення, як множення многочленів, що задовольняють співвідношенням (5.2).
В будь-якому разі всі властивості таких форм виконуються.

На відміну від векторозначних форм із значеннями в алгебрі Лі [6, с.134-135] дані об'єкти утворюють *асоціативну* алгебру з одиницею.

До введених об'єктів можна застосовувати як кватерніонні операції, так і операції, вживані до дифформ. Зокрема, операція $\cdot\wedge$ означає

$$\left\langle q^{-1}dq\wedge d\mu\right\rangle = q^{-1}dq\cdot\wedge d\mu = (q^{-1}dq)^i\wedge d\mu_i \quad (5.6)$$

$$\left\langle q^{-1}dq\wedge d\mu\right\rangle(\xi,\eta) = (q^{-1}dq(\xi))^i d\mu_i(\eta) - (q^{-1}dq(\eta))^i d\mu_i(\xi) \quad (5.6a)$$

оскільки μ_i - чистий кватерніон, що не має скалярної компоненти.

6. Пуассонови структури для динаміки твердого тіла

У статті [2] виведено кватерніонні Д.П. у представленні лівої тривіалізації, що відповідає системі відліку, що пов'язана з тілом, а в статті [1] Д.П. виведено в представленні правої тривіалізації, тобто в інерціальній системі відліку.

Розглянемо детально зв'язки між кватерніонними змінними в цих представленнях. Річ у тім, що поступальні та обертальні ступені свободи розділяються саме в інерціальній системі відліку, тобто їх взаємні Д.П. перетворюються в 0.

Отже, в представленні лівої тривіалізації ці співвідношення можуть бути записані у безкоординатному вигляді як у [2]

$$\begin{cases}\{\langle\mu,\xi\rangle,\langle\mu,\eta\rangle\} = -\langle\mu,[\xi,\eta]\rangle \\ \{q,\langle\mu,\xi\rangle\} = q\xi = L_q\xi\end{cases} \quad (6.1)$$

де ξ,η — фіксовані чисті кватерніони тобто фіксовані елементи алгебри Лі групи S^3 одиничних кватерніонів. Для переходу до представлення правої тривіалізації використовуємо співвідношення з [5]. Тобто в нашому випадку

$$\varrho_{ct}\circ\lambda_{ct}^{-1}(q,\mu) = (q, Ad^*_{q^{-1}}[\mu]) = (q, q\mu q^{-1}) \quad (6.2)$$

Т.ч. необхідно перейти до нової змінної $\tilde{\mu} = Ad^*_{q^{-1}}[\mu] = q\mu q^{-1}$. Для цієї змінної утворюємо вираз

$$\left\langle\tilde{\mu},\xi\right\rangle = \left\langle Ad^*_{q^{-1}}[\mu],\xi\right\rangle = \left\langle\mu, Ad^*_{q^{-1}}[\xi]\right\rangle = \left\langle\mu, q^{-1}\xi q\right\rangle \quad (6.3)$$

Використовуючи властивості дужок Пуассона [4,7] в інерціальній системі, маємо

$$\begin{cases}\{\langle\tilde{\mu},\eta\rangle,\langle\tilde{\mu},\xi\rangle\} = \langle\tilde{\mu},[\xi,\eta]\rangle, \\ \{q,\langle\tilde{\mu},\xi\rangle\} = \xi q = R_q\xi;\end{cases} \quad (6.4)$$

Відмітимо, що змінні μ_i ($\tilde{\mu}_i$) в два рази більше фізичних компонент власного моменту імпульсу тіла [2].

7. Група $G=R^3 Ⓢ S^3$ і Д.П. в інерціальній системі

Розглянемо напівпрямий добуток $R^3 Ⓢ S^3$ із законом множення $(\mathbf{x},q)(\mathbf{x}',q') = (\mathbf{x}+q\mathbf{x}'q^{-1}, qq')$

Визначимо гомоморфізм $\Gamma: G\mapsto SE(3)$ як

$$(\mathbf{x},q)\mapsto(\mathbf{x},\mathbf{Q}), \qquad \mathbf{Q}[\mathbf{y}] = q\mathbf{y}q^{-1}, \quad \forall\mathbf{y}\in R^3 \quad (7.1)$$

Вочевидь, група G двічі накриває $SE(3)$ [1].

Т.ч., в інерціальній системі відліку стан твердого тіла описується наступним набором базових динамічних змінних $((\mathbf{x},q),(\mathbf{p},\tilde{\mu}))$, де $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ — координати центру мас тіла та його імпульс в *інерціальній системі* q - кватерніон, що відповідає матриці Q

$$\begin{cases}\mathbf{E}_k = Q_{ik}\mathbf{e}_i, \\ Q_{ji} = \langle\mathbf{E}_i,\mathbf{e}_j\rangle.\end{cases} \quad (7.2)$$

переходу від інерціальної системи e_j до системи, що пов'язана з тілом E_k; $\tilde{\mu}$ - чистий кватерніон, що описує власний момент тіла в інерціальній системі.

Враховуючи зв'язок між пуассоновими структурами на $SE(3)$ і G, що встановлено в [2] та (6.4), можна записати ненульові Д.П. в інерціальній системі відліку

$$\begin{cases}\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \\ \{q,\langle\tilde{\mu},\xi\rangle\} = \xi q = R_q\xi, \\ \{\langle\tilde{\mu},\eta\rangle,\langle\tilde{\mu},\xi\rangle\} = \langle\tilde{\mu},[\xi,\eta]\rangle\end{cases} \quad (7.3)$$

8. Д.П. у змішаному представленні

Як було зазначено вище, в інерціальній системі відліку поступальні та обертальні ступені свободи розділяються. Проте вираз обертальної енергії набагато простіший саме в системі, що пов'язана з тілом, де компоненти тензора інерції є константами. Т.ч., найприродніше описувати поступальні ступені свободи в інерціальній системі відліку, а обертальні — в системі відліку, що пов'язана з тілом. Перетворення $\mu = q^{-1}\tilde{\mu}q$ не зачіпає змінні $\mathbf{x}, \mathbf{p}$, тому змінна μ також комутуватиме із $\mathbf{x}, \mathbf{p}$, і в змішаному представленні матимемо такі ненульові Д.П.

$$\begin{cases} \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \\ \{q, \langle \mu, \xi \rangle\} = q\xi = L_q \xi, \\ \{\langle \mu, \eta \rangle, \langle \mu, \xi \rangle\} = -\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle \end{cases} \tag{8.1}$$

Для кінетичної енергії обертання в змішаному представленні маємо, як і в системі, що пов'язана з тілом, наступний вираз

$$T_{spin}((\mathbf{x}, q), (\mathbf{p}, \mu)) = \frac{1}{8}\mu I^{-1}\mu = \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_1^2}{I_1} + \frac{\mu_2^2}{I_2} + \frac{\mu_3^2}{I_3}\right) \tag{8.2}$$

У системі, що пов'язана з тілом, вектор магнітного моменту $\mathbf{m} = m\nu$ має постійні компоненти, тоді в інерціальній системі його компонентами будуть $q\mathbf{m}q^{-1}$.

Т.ч. для потенціальної енергії диполя V_m у зовнішньому магнітному полі за допомогою [1, (4.1),(4.4)] може бути представлено

$$V_m((\mathrm{x}, q), (\mathrm{p}, \mu)) = -\langle \mathbf{B}, q\mathbf{m}q^{-1} \rangle = -2\left\langle \left(q_0^2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{m} + \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{q} - q_0(\mathbf{m} \times \mathbf{q}), \mathbf{B} \right\rangle \tag{8.3}$$

Відмітимо ще раз, що $\mathbf{m}$ — постійний вектор, а q не залежить від $\mathbf{x}$.

Використовуючи базові співвідношення (8.1), знайдемо ряд С.П., які знадобляться.

Для $\{q, T_{spin}\}$ отримаємо

$$\{q, T_{spin}\} = \frac{1}{2}q\Omega, \qquad \Omega = \frac{1}{2}I^{-1}\mu \tag{8.4}$$

де I — діагональна матриця.

Скористаємося визначенням Ω з (8.4) і симетричністю тензора інерції I. Нарешті

$$\{\mu, T_{spin}\} = -\Omega \times \mu \tag{8.5}$$

$$\{\mu, V_m\} = (2q_0^2 - 1)(\mathbf{m} \times \mathbf{B}) + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{B} \rangle (\mathbf{m} \times \mathbf{q}) - 2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{B} \rangle \mathbf{q} + 2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{B} \tag{8.6}$$

9. Рівняння руху магнітного диполя в зовнішньому полі

Рівняння руху в змішанному представленні для магнітного диполя в зовнішньому полі, де на відміну від робіт [7-9] магнітний диполь розглядається як довільне (тобто, можливо, асиметричне) магнітне тіло з довільно направленим відносно тіла магнітним моментом.

Гамільтонін магнітного диполя

$$H((\mathbf{x}, q), (\mathbf{p}, \mu)) = \frac{p^2}{2M} + T_{spin}(\mu) + V_m((\mathbf{x}, q)) + V_g(\mathbf{x}), \tag{9.1}$$

де $V_g(\mathbf{x}) = Mgx_3$.

Запишемо рівняння руху.

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\} = \frac{\mathbf{p}}{M} \tag{9.2}$$

$$p_i = \{p_i, H\} = 2\left\langle \partial_i \mathbf{B}(\mathbf{x}), \left(q_0^2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{m} + \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{q} - q_0(\mathbf{m} \times \mathbf{q}) \right\rangle - Mg\delta_{i3} \tag{9.3}$$

$$\dot{q} = \{q, H\} = \{q, T_{spin}\} = \frac{1}{2}q\Omega, \qquad \Omega = \frac{1}{2}I_{ref}^{-1}\mu \tag{9.4}$$

$$\dot{\mu} = \{\mu, H\} = \{\mu, T_{spin}\} + \{\mu, V\} = -\Omega \times \mu + (2q_0^2 - 1)(\mathbf{m} \times \mathbf{B}) + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{B} \rangle (\mathbf{m} \times \mathbf{q}) - 2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{B} \rangle \mathbf{q} + 2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{B} \tag{9.5}$$

Отже, система рівнянь руху має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{p}}{M}, \\ \dot{p}_i = 2\left\langle \partial_i \mathbf{B}(\mathbf{x}), \left(q_0^2 - \dfrac{1}{2}\right)\mathbf{m} + \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{q} - q_0(\mathbf{m} \times \mathbf{q}) \right\rangle - Mg\delta_{i3}, \\ \dot{q} = \dfrac{1}{2}q\Omega, \qquad \Omega = \dfrac{1}{2}I_{ref}^{-1}\mu, \\ \dot{\mu} = -\Omega \times \mu + (2q_0^2 - 1)(\mathbf{m} \times \mathbf{B}) + 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{B} \rangle (\mathbf{m} \times \mathbf{q}) \\ \quad -2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{B} \rangle \mathbf{q} + 2q_0 \langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{B} \end{cases}$$

Зауваження. В нашій роботі [2, с.109] в *Пропозиція 1* має місце прикра помилка друку. Правильна формула має виглядати так

$$\mathbf{e} + \mathbf{e}^{\dagger} = 0 \longrightarrow \mathbf{e}e_0^{\dagger} + e_0\mathbf{e}^{\dagger} = 0 \longrightarrow \langle e_0, \mathbf{e} \rangle = 0 \longrightarrow \langle L_q e_0, L_q \mathbf{e} \rangle = 0,$$

де $\mathbf{e}$ - чистий кватерніон.

Список використаних джерел

1. *Зуб, С.С.* Канонічна пуассонова структура на T*SE(3) в кватерніонних змінних / С. С. Зуб, С. І. Зуб // Вісник Київського нац. унів. — 2013. — No 2. — С. 17–24.
2. *Зуб, С.С.* Група одиничних кватерніонів S^3 та пов'язані з нею симплектична і пуассонова структури / С. С. Зуб, С. І. Зуб // Вісник Київського нац. Унів. — 2013. — No 4. — С. 108–113.
3. *Abraham, R.* Foundations of mechanics / R. Abraham, J. E. Marsden. — Addison Wesley, 1978. — 848 p
4. *Marsden, J. E.* Introduction to mechanics and symmetry / J.E. Marsden, T.S. Ratiu. — Berlin: Texts in Applied Mathematics, Springer, 1994. — Vol. 75.
5. *Зуб,С.С.* Группа Ли как конфигурационное пространство для простой механической системы / С. С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. Матем. — 2013. — Т. 112, No 2. — С. 89–99.
6. *Зуланке, Р.* Дифференциальная геометрия и расслоения / Р. Зуланке, П. Винтген. — М.: Мир, 1975. — 348 с.
7. *Зуб,С.С.* Гамильтонов формализм для магнитного взаимодействия свободных тел / С. С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. Матем. — 2010. — Т.102, No 3. — С.49-62.
8. *Зуб,С.С.* Орбитрон: Устойчивость орбітального движения магнитного диполя / С.С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. матем.— 2013.—Т.111, No 1. —С.113–128.
9. *Dullin, H.R.* Stability of levitrons / H.R. Dullin, R.W. Easton // Physica D. — 1999. — Vol. 126, No 1. — P. 1–17.

References

1. ZUB, S. S. & ZUB, S. I. (2013) Canonical Poisson structure on T*SE(3) in the quaternion variables. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics &Mathematics*. 2. p.17-24.
2. ZUB, S. S. & ZUB, S. I. (2013) Grupa odinichnih kvaternioniv S^3 ta pov'yazani z neyu simplektichna i puassonova strukturi. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. 4. p.108-113.
3. ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E. (1978) *Foundations of mechanics*. Addison Wesley.
4. MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (1994) *Introduction to mechanics and symmetry*. Berlin: Texts in Applied Mathematics, Springer.
5. ZUB, S. S. (2013) Gruppa Li kak konfiguratsionnoe prostranstvo dlya prostoy mehanicheskoy sistemyi. *Journal* of *Numerical* and *Applied Mathematics*. 112 (2). p.89-99.
6. ZULANKE, R., VINTGEN, P. (1975) *Differentsialnaya geometriya i rassloeniya*. M.: Mir.
7. ZUB, S. S. (2010) Gamiltonov formalizm dlya magnitnogo vzaimodeystviya svobodnyih tel / *Journal* of *Numerical* and *Applied Mathematics*. 102 (3). p.49-62.
8. ZUB, S. S. (2013) Orbitron: Ustoychivost orbIt-alnogo dvizheniya magnitnogo dipolya. *Journal* of *Numerical* and *Applied Mathematics*. 111 (1). p.113-128.
9. DULLIN, H. R. & EASTON, R. W. (1999) Stability of levitrons. *Physica D*. 126 (1). p.1-17.

Надійшла до редколегії 17.06.14