УДК 517.9

Івохін Є.В. [1], д.ф.-м.н, доцент,
Аджубей Л.Т. [2], к.ф.-м.н, доцент

Про розв'язок однієї дворівневої моделі виробничо-транспортної задачі

[1,2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V. [1], Dr.Sci.,
Adzhubey L.T. [2], Ph.D.

About solution of one two-level production-transportation problem

[1,2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У даній статті розглянуто моделі виробничо-транспортної задачі: загальна модель виробничо-транспортної задачі та модель дворівневої дискретної виробничо-транспортної задачі. Пошук оптимального розв'язку дискретної ВТЗ проведено методом, що використовує ітераційну схему зі штучними змінними. Проведено аналіз отриманих результатів шляхом їх порівняння з аналогічними результатами, які отримано за допомогою алгоритму вирішення оптимізаційних задач лінійного програмування для кожного окремого рівня.

Ключові слова: виробничо-транспортна задача, дворівнева модель, розподіл ресурсів.

In this article it is considered two models of production-transportation problem: a general model of production and transportation problem and the discrete two-level model of production and transportation problem. It is carried out the transformation of original problem to a two-level optimization problem. Finding of the optimal solution of production-transportation problem was obtained by using an iterative scheme with artificial variables. A modification of the algorithm is allowed for the discrete production-transportation problem. Given algorithm for solving the optimization problem is used to solve the problem of distribution of limited resources of data channels capacity between providers and users of computer networks. The analysis of the results is provided by comparing them with the results that are obtained by solving optimization algorithm for linear programming problems for each level. This method allowed to develop an approach for the solution of the linear optimization problems with fuzzy parameters.

Key words: production and transport problem, two-level model, resources distribution.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Принципи блочної оптимізації [1] спрощують аналіз, вирішення та змістовні висновки багатьох задач планування та управління. Завдяки таким методам можна розбити складну виробничо-транспортну задачу (ВТЗ) на автономні задачі планування виробництва і організації доставки продукції. При цьому, зрозуміло, виникає необхідність в ітеративному узгодженні інтересів виробничої і транспортної систем. З іншого боку, інтерпретація отриманих результатів у змістовних термінах достатньо часто дозволяє визначити раціональні підходи функціонування різних економічних та технічних систем [2].

Поняття про виробничо-транспортну задачу. Традиційна виробничо-транспортна задача полягає у визначенні плану виробництва та перевезень, що мінімізує сумарні витрати, котрі позв'язані з організацією виробництва та транспортування виробленої продукції до пунктів споживання.

Модель планування, виробництва та перевезень формалізується у вигляді загальної схеми, що містить 2 групи змінних:

$$f(z)+g(x)\to \min, \tag{1}$$

$$Az+Bx=b, \tag{2}$$

де

$$x\in X,\ z\in Z, \tag{3}$$

A, B - задані матриці, $f(z), g(x)$ - неперервні опуклі функції, X, Z - деякі опуклі обмежені множини.

Для розв'язання задачі (1)-(3) у [2] запропоновано ітеративний процесс, на кожному кроці якого вирішуються задачі, що містять лише одну з двох груп змінних:

$$f(z)-vAz\to \min, \tag{4}$$

$$z\in Z \tag{5}$$

та

$$g(x)\to \min \tag{6}$$

$$Bx=b-Az, \tag{7}$$

$$x\in X. \tag{8}$$

Вектор v у задачі (4),(5) має допоміжний сенс і уточнюється в результаті вирішення задачі (6)-(8).

Припустимо, що z^s та v^s - наближення векторів z та v, що отримані на ітерації з номером s, $s = 0,1,2,...$.

Тоді ітеративні процеси

$$z^{s+1} = (1-\lambda_s)z^s + \lambda_s \bar{z}^s, \qquad (9)$$

$$v^{s+1} = (1-\lambda_s)v^s + \lambda_s \bar{v}^s, \qquad (10)$$

де $0 \le \lambda_s \le 1$, $\lambda_s \to 0$, $s = 0,1,2,...$, $\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s = \infty$, $\bar{z}^s$ - розв'язок задачі (4), (5) при $v = v^s$, $\bar{v}^s$ - вектор оптимальних оцінок умов (7) при $z = z^s$, збігаються відповідно до розв'язку задачі (1)-(3) і до вектора v^* оптимальних оцінок умов (2) [1].

Далі розглянемо цю задачу більш детально. Припустимо, що виробники продукції (кількість яких N) можуть використати декілька способів виробництва (S), кожен з яких характеризується різною кількістю товарів, а також різною вартістю виробництва і максимально можливим обсягом товарів певного типу. Будемо вважати, що виробники (постачальники) забезпечують споживачів (у кількості M) одним видом товару, і питома вартість перевезень від постачальників до споживачів є відомою. Кожен споживач може задовольняти свої потреби у товарі за допомогою довільного набору виробників.

Таким чином, виробничо-транспортна задача складається з визначення плану виробництва та плану перевезень з мінімальними транспортними витратами з метою повного задоволення попиту споживачів.

Позначимо:

c_{ik}^p - питома вартість виробництва продукції *i*-им виробником за допомогою *k*-го способу;

c_{ij}^t - питома вартість перевевень продукції від *i*-го виробника *j*-му споживачу;

b_j - величина попиту *j*-го споживача;

a_{ik} - кількість продукції, виготовленої *i*-им виробником *k*-им способом;

z_{ik} - інтенсивність використання *k*-го способу *i*-им виробником протягом частини періоду, який приймається рівним 1;

x_{ij} - кількість продукції, перевезеної *i*-им виробником *j*-му споживачу;

$i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$, $k = \overline{1,S}$.

Тоді виробничо-транспортна задача (1)-(3) може бути записана у вигляді дворівневої задачі оптимізації [3]:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{S} c_{ik}^p z_{ik} \to \min \qquad (11)$$

за умов

$$g(x) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}^t x_{ij} \to \min \qquad (12)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,M}, \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \le \sum_{k=1}^{S} a_{ik} z_{ik}, \ i = \overline{1,N}, \qquad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{S} z_{ik} \le 1, \ i = \overline{1,N}, \qquad (15)$$

$$z_{ik} \ge 0, \ x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,M}, \ k = \overline{1,S}. \qquad (16)$$

Це означає, що виробництво та транспортування продукції повинно бути організовано таким чином, щоб забезпечити мінімальні витрати виробництва за умов (12)-(16), при якому виникає проблема отримання плану перевезень мінімальної вартості (12) з урахуванням обмежень (13)-(16).

Дискретна модель ВТЗ. Нехай кожен споживач може задовольнити свою потребу у продукції тільки за рахунок одного виробника.

Додамо змінні $y_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$, при чому $y_{ij} = 1$, якщо потреби *j*-го споживача задовольняє *i*-ий виробник, і $y_{ij} = 0$, в усіх інших випадках.

Отримуємо дворівневу неперервно-дискретну задачу лінійного програмування такого вигляду:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{S} c_{ik}^p z_{ik} \to \min \qquad (17)$$

за умов

$$g(x) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}^t b_j y_{ij} \to \min \qquad (18)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} y_{ij} = 1, \ j = \overline{1,M}, \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{M} b_j y_{ij} \le \sum_{k=1}^{S} a_{ik} z_{ik}, \ i = \overline{1,N}, \qquad (20)$$

$$\sum_{k=1}^{S} z_{ik} \le 1, \ i = \overline{1,N}, \qquad (21)$$

$$z_{ik} \ge 0, \ y_{ij} = \{0,1\}, \ i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,M}, \ k = \overline{1,S}. \qquad (22)$$

В роботі [3] пропонується вирішувати цю задачу за наступною схемою:

- вирішується задача верхнього рівня (17), (19)-(22);
- фіксується розв'язок $z = \{z_{ik}\}$, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,S}$;
- вирішується задача нижнього рівня (18)-(22).

Оскільки значення цільової функції верхнього рівня не залежить від рішення нижнього рівня, і навпаки, цей алгоритм буде знаходити оптимальні рішення і значення відповідних функцій цілей для задач лінійного програмування обох рівнів. На першому кроці роботи алгоритму отримується допустимий розв'язок, який буде оптимальним розв'язком задачі верхнього рівня. Дійсно, якщо z^0 не є оптимальним розв'язком першої задачі, тоді існує інший розв'язок z^1, що має краще значення функції (17), що суперечить результату, отриманому на першому кроці. Тому z^0 є оптимальним розв'язком. Враховуючи це рішення, на третьому кроці отримується оптимальний розв'язок для задачі нижнього рівня.

Алгоритм розв'язання ВТЗ. Наведена схема для знаходження розв'язку дискретної виробничо-транспортної задачі, незважаючи на простоту, має досить узагальнений вигляд.

Для створення ефективного способу розв'язання отриманої вище оптимізаційної дискретної ВТЗ (17)-(22) проведено модифікацію загального методу вирішення задачі вигляду (1)-(8) з урахуванням особливостей задачі (17)-(22). Не враховуючи особливостей розв'язання дискретних задач оптимізації, для пошуку оптимального розв'язку дворівневої ВТЗ (17)-(22) пропонується використати ітераційну схему типу (9)-(10).

Позначимо як і раніше $z^s = \{z^s_{ik}\}$, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,S}$ та $v^s = \{v^s_i\}$, $i = \overline{1,N}$, - наближення розв'язків z та v дискретної ВТЗ (17)-(22), що отримані на ітерації з номером s, $s = 0,1,2,...$.

Тоді ітеративні процеси (9)-(10) можна записати у вигляді:

0 крок. Покладемо $s = 0$, $\lambda_0 = 1/2$; $v^0_i = 0$; $i = \overline{1,N}$, $Eps > 0$. Задамо довільне початкове z^0.

s-ий крок. 1.Розв'язується задача верхнього рівня

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{S}(c^p_{ik} - a_{ik}v^s_i)z_{ik} \to \min,$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{M} b_j y_{ij} \le \sum_{k=1}^{S} a_{ik} z_{ik}, \ i = \overline{1,N},$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \ z_{ik} \ge 0, \ i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,M}, \ k = \overline{1,S};$$

Позначимо $\bar{z}^s = \{\bar{z}^s_{ik}\}$, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,S}$, - розв'язок задачі, обчислимо $\bar{v}^s_i = \sum_{k=1}^{S} a_{ik}\bar{z}^s_{ik}$, $i = \overline{1,N}$.

2. Розв'язується задача нижнього рівня

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c^r_{ij} x_{ij} \to \min,$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \le \bar{v}^s_i, \ i = \overline{1,N},$$

$$x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,M};$$

Позначимо розв'язок задачі $x^s = \{x^s_{ij}\}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$.

3. Обчислюються нові наближення z та v

$z^{s+1} = (1-\lambda_s)z^s + \lambda_s \bar{z}^s$, $v^{s+1} = (1-\lambda_s)v^s + \lambda_s \bar{v}^s$.

Збільшується *s* та перераховується λ_s: $s = s+1$, $\lambda_s = 1/(s+2)$.

Якщо для наближення z^{s+1} справедлива нерівність $\left\| z^{s+1} - z^s \right\| < Eps$, то обчислення завершуються. Інакше переходимо до пункту 1 наступної ітерації.

Умови $0 \le \lambda_s \le 1$, $\lambda_s \to 0$, $s = 0,1,2,...$, $\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s = \infty$, виконуються. Тому, як вже було сказано вище, послідовність z^s, $s = 0,1,2,...$, збігається до оптимального розв'язку виробничої задачі (17)-(22), а послідовність x^s, $s = 0,1,2,...$, відповідно, – до оптимального розв'язку транспортної задачі (18)-(22).

Даний алгоритм був запропонований для розв'язання задачі ефективного розподілу потужностей каналів передачі даних між вузлами мережі провайдерів та користувачів з урахуванням потреб і переваг абонентів, так і можливостей провайдерів. Передбачається, що відомі необхідні обсяги абонентів мережі в отриманні тих чи інших типів інформації. Задано побажання (переваги) абонентів і можливості провайдерів щодо відносної здатності по передачі різного типу інформації тому чи іншому абоненту або вузлу. Визначено умови оцінювання ефективності розподілу каналів (відносно їх пропускної здатності). Структуру мережі та інформації, що розподіляється у ній, визначено виробничо-транспортну задачу з лінійними функціями цілі та деякими конструктивними обмеженнями:

- інформація розподіляється від провайдера до абонентів через комутаційні вузли за постійно підключеними каналами зв'язку;
- кожен вузел або абонент мережі обслуговується одним або декількома комутаційними вузлами;
- кількість інформації, що розподіляється, для комутаційних узлов та абонентів може бути обмеженою як зверху (принципові обмеження можливостей провайдера), так і знизу (мінімальна потреба абонентів у необхідній информации).

Ця задача відома як задача розподілу обмежених ресурсів каналів передачі даних, що відноситься до ієрархічних задач оптимізації, і розглядалась раніше як транспортна задача з проміжними пунктами (трьохіндексна транспортна задача) [4] та задача визначення оптимальних потоків у мережі [5].

Використання запропонованого підходу дозволило отримати розв'язок поставленої задачі як виробничо-транспортної задачі. Для порівняння результатів оптимізації розподілу потужностей каналів передачі даних за допомогою алгоритму розв'язання дискретної ВТЗ з іншими способами був отриманий розв'язок цієї ж задачі як трьохіндексної транспортної задачі. Не зосереджуючись на чисельних результатах, необхідно відмітити, що було отримано близькі результати, при чому з достатньо високою обчислювальною ефективністю, що говорить про конструктивність застосування запропонованого алгоритму в оптимізаційних задачах з двома рівнями формалізації.

Висновок. У даній статті розглянуто моделі виробничо-транспортної задачі: загальна модель виробничо-транспортної задачі та модель дворівневої дискретної виробничо-транспортної задачі. Пошук оптимального розв'язку отриманої дискретної ВТЗ проведено методом, що використовує ітераційну схему зі штучними змінними. Проведено аналіз отриманих результатів шляхом їх порівняння з аналогічними результатами, які отримано за допомогою алгоритму вирішення оптимізаційних задач лінійного програмування для кожного окремого рівня.

Список використаних джерел

1. *Юдин Д.Б.* Экстремальные модели в экономике/ Д.Б.Юдин, А.Д.Юдин. – М.: Экономика, 1979. – 288с.
2. *Волконский В.А.* Принципи оптимального планирования/ В.А.Волконский. – М.: Экономика, 1973. – 216с.
3. *Lukac, Z., Hunjet D. and Neralic L.* (2008) Solving the production-transportation problem in the Petroleum Industry// Revista Investigacion Operacional. V.29. №1. p.63-70.
4. *Раскин Л.Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования/ Л.Г. Раскин, И.О.Кириченко. – М.: Радио и связь, 1982. – 240с.
5. *Прилуцкий М.Х.* Потоковые алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах / М.Х.Прилуцкий, А.Г. Картомин // Исследовано в России. – 2003. – 39. – С. 444-452. – Режим доступу до журн. http://zhurnal.ape. relarn.ru/ articles/2003/039.pdf

References

1. YUDIN D. and YUDIN A. (1979) *Extreme models in economics.* Moskva: Economika.
2. VOLKONSKII V. (1973) *Principles of optimal planning.* Moskva: Economika.
3. LUKAC, Z., HUNJET D. and NERALIC L. (2008) Solving the production-transportation problem in the Petroleum Industry//*Revista Investigacion Operacional.* V.29. №1. pp.63-70.
4. RASKIN L. and KIRICHENKO I. (1982) *Multiindex linear programming problems* – Moskva: Radio and communication.
5. PRILUCKII M. and KARTOMIN A. (2003) Flow algorithms of resources distribution in hierarchical system. *Research in Russia* [Online] 39. p.444-452. – Available from: http://zhurnal.ape. relarn.ru/ articles/2003/039.pdf

Надійшла до редколегії 16.05.2014