УДК 517.9, 519.3

Капустян О.А.[1], к.ф.-м.н.,
Мазур О.К.[2]

Наближене оптимальне керування для рівняння Пуассона з нелокальними крайовими умовами

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д,
e-mail: olena.kap@gmail.com
[2] Національний університет харчових технологій, 01601 м. Київ, вул. Володимирська, 68,
e-mail: okmazur@ukr.net

O.A. Kapustian[1], PhD,
O.K. Mazur[2]

Approximate optimal control for Poisson equation with nonlocal boundary conditions

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olena.kap@gmail.com
[2] National University of Food Technologies, 01601, Kyiv, Volodimirska st., 68,
e-mail: okmazur@ukr.net

У роботі розглядається задача мінімізації квадратичного критерію якості на розв'язках еліптичного рівняння з розподіленим керуванням у правій частині, які задовольняють нелокальні крайові умови на границі області. Доведено класичну розв'язність поставленої задачі. Запропоновано та обґрунтовано наближену формулу оптимального керування у термінах коефіцієнтів Фур'є параметрів задачі.

Ключові слова: наближене оптимальне керування, рівняння Пуассона, нелокальні крайові умови, розподілені системи, метод перетворення Фур'є.

In this paper we develop constructive method for finding approximate optimal control for Poisson equation with nonlocal boundary conditions.

As it follows from [1,2], one of the most useful methods to solve linear-quadratic optimal control problems for distributed systems is the Fourier transform method. The similar nonlocal boundary value problem for the Laplace equation in a circular sector was solved in [3]. The corresponding optimal control problem in the class of controls which depend on the angular variable, was solved in [4].

On the basis of these analyses, we prove the classical solvability of the optimal control problem for Poisson equation with distributed control and nonlocal boundary conditions in a circular sector. We propose and substantiate a constructive approximate optimal control formula in terms of the Fourier coefficients of the problem parameters. Finally, we illustrate the method effectiveness with numerical calculations.

Key Words: approximate optimal control, Poisson equation, nonlocal boundary conditions, distributed systems, Fourier transform method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаінов Д.Я.

Вступ. Одним з методів розв'язання лінійно-квадратичних задач оптимального керування розподіленими системами є метод Фур'є [1,2]. Розглянена в роботі нелокальна крайова задача для рівняння Лапласа в круговому секторі була розв'язана в [3]. Відповідна задача оптимального керування в класі керувань, що залежать лише від кутової змінної, була розв'язана в роботі [4]. У даній роботі доведено класичну розв'язність цієї задачі в класі розподілених керувань. Запропоновано та обґрунтовано конструктивну формулу наближеного оптимального керування в термінах коефіцієнтів Фур'є функції крайових умов. Ефективність методу проілюстровано чисельними розрахунками.

Постановка задачі. У круговому секторі $Q=\{(r,\theta)\,|\,r\in(0,1),\theta\in(0,\pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \Delta y := \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}=u(r,\theta),(r,\theta)\in Q, \\ y(1,\theta)=p(\theta),\ \theta\in(0,\pi), \\ y(r,0)=0,\ r\in(0,1), \\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta}(r,0)=\dfrac{\partial y}{\partial\theta}(r,\pi),\ r\in(0,1), \end{cases} \quad (1)$$

$$J(u)=\int_0^1 \|y(r)\|_D^2\,dr+\int_0^1\|u(r)\|_D^2\,dr \to \inf\,, \quad (2)$$

де $p\in C^1([0,\pi])$, $p(0)=0$ – задана функція, $|\cdot|_D$ – норма в $L^2(0,\pi)$, що задається рівністю

$$\forall v\in L^2(0,\pi),\ |v|_D^2=\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\,,$$

де $\forall n\le 1$ $\quad v_n=\int_0^{\pi} v(\theta)\psi_n(\theta)d\theta$, $\quad \psi_0(\theta)=\dfrac{2}{\pi^2}$,

$$\psi_{2n}(\theta)=\frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n-1}(\theta)=\frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta.$$

Тут і надалі ми використовуємо біортонормовані та повні в $L^2(0,\pi)$ системи функцій Самарського-Іонкіна [3] $\psi=\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\Phi=\{\varphi_0(\theta)=\theta,$ $\varphi_{2n}(\theta)=\sin 2n\theta$, $\varphi_{2n-1}(\theta)=\theta\cos 2n\theta\}_{n=1}^{\infty}$, які дозволяють розв'язати задачу (1) при $u=0$.

Основною метою роботи є встановлення класичної розв'язності (1)–(2), тобто відшукання оптимального серед допустимих процесів $\{u,y\}\in C(\overline{Q})\times(C(\overline{Q})\cap C^2(Q))$, а також обґрунтування конструктивного методу знаходження наближеного оптимального керування.

Існування розв'язку задачі (1)–(2). Будемо шукати розв'язок задачі (1) $y=y(r,\theta)$ у вигляді

$$y(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n(r)\varphi_n(\theta).$$

Тоді задача (1)–(2) зводиться до наступної: на допустимих парах $\{u_n(r),y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy_0}{dr}\right)=r\cdot u_0(r),\ y_0(1)=p_0\,, \quad (3)$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy_{2k-1}}{dr}\right)-(2k)^2y_{2k-1}=r^2u_{2k-1}(r), \quad (4)$$
$$y_{2k-1}(1)=p_{2k-1},$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy_{2k}}{dr}\right)-(2k)^2y_{2k}-4ky_{2k-1}=r^2u_{2k}(r), \quad (5)$$
$$y_{2k}(1)=p_{2k}\,,$$

де $\forall k\le 0$ $\quad p_k=\int_0^{\pi} p(\theta)\psi_k(\theta)d\theta$, мінімізувати критерій якості

$$J(u)=\int_0^1\left[y_0^2(r)+u_0^2(r)\right]dr+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\left[y_{2k-1}^2(r)+y_{2k}^2(r)+\right.$$
$$\left.+u_{2k-1}^2(r)+u_{2k}^2(r)\right]dr=J_0+\sum_{k=1}^{\infty}J_k\,. \quad (6)$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n(r),\tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ має бути таким, щоб виконувалися умови:

$$\tilde{u}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{u}_n(r)\varphi_n(\theta)\in C(\overline{Q})\,, \quad (7)$$

$$\tilde{y}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{y}_n(r)\varphi_n(\theta)\in C(\overline{Q})\cap C^2(Q)\,. \quad (8)$$

При фіксованих керуваннях $\{u_k(r)\}_{k=0}^{\infty}\subset C([0,1])$ розв'язки задачі (3)–(5) мають вигляд

$$y_0(r)=p_0+\int_0^1 G_0(r,s)u_0(s)ds\,, \quad (9)$$

$$y_{2k-1}(r)=p_{2k-1}r^{2k}+\frac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k-1}(s)ds\,, \quad (10)$$

$$y_{2k}(r)=p_{2k}r^{2k}+p_{2k-1}r^{2k}\ln r+ \quad (11)$$
$$+\frac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k}(s)ds+\frac{1}{4k}\int_0^1 s\overline{G}_k(r,s)u_{2k-1}(s)ds\,,$$

де в $\Pi=[0,1]\times[0,1]$

$$G_0(r,s)=\begin{cases} s\ln r,\ s\in[0,r], \\ s\ln s,\ s\in[r,1], \end{cases} \quad \max_{\Pi}|G_0(r,s)|\le e^{-1}\,, \quad (12)$$

$$G_k(r,s)=\begin{cases} s^{2k}(r^{2k}-r^{-2k},\ s\in[0,r], \\ r^{2k}(s^{2k}-s^{-2k}),\ s\in[r,1], \end{cases} \quad \max_{\Pi}|G_k(r,s)|\le 1 \quad (13)$$

а з формули (11) ядро $\overline{G}_k(r,s)$ має вигляд

$$\overline{G}_k(r,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{2k}\left(\left(\dfrac{s}{r}\right)^{2k}-(rs)^{-2k}\right)+r^{2k}s^{2k}\ln(rs)-\left(\dfrac{s}{r}\right)^{2k}\ln\dfrac{s}{r},\ s\in[0,r], \\ \dfrac{1}{2k}\left(\left(\dfrac{r}{s}\right)^{2k}-(rs)^{-2k}\right)+r^{2k}s^{2k}\ln(rs)-\left(\dfrac{r}{s}\right)^{2k}\ln\dfrac{r}{s},\ s\in[r,1], \end{cases} \quad \max_{\Pi}\left|\overline{G}_k(r,s)\right|\le\frac{1}{k}\,. \quad (14)$$

Тоді формули (9)–(11) $\forall k \le 0$ визначають $y_k \in C([0,1]) \cap C^2(0,1)$. Крім того, оскільки функціонали $J_0 : L^2(0,1) \to R$, $J_k : L^2(0,1) \times \times L^2(0,1) \to R$ є строго опуклими, неперервними і коерцитивними, то кожна з відповідних оптимізаційних задач має єдиний розв'язок в $L^2(0,1)$. Для його знаходження прирівнюємо до нуля похідні Фреше і одержуємо наступні інтегральні рівняння Фредгольма:

$$u_0(s) = -\int_0^1 \left(\int_0^1 G_0(r,\xi) G_0(r,s) dr \right) u_0(\xi) d\xi - - p_0 \int_0^1 G_0(r,s) dr, \tag{15}$$

для вектора $z_k(s) = \begin{pmatrix} u_{2k-1}(s) \\ u_{2k}(s) \end{pmatrix}$, $k \ge 1$

$$z_k(s) = -\frac{1}{(4k)^2} \int_0^1 A_k(\xi,s) z_k(\xi) d\xi + f_k(s), \tag{16}$$

де

$$A_k(\xi,s) = \xi \cdot s \begin{pmatrix} \int_0^1 \left(G_k(r,s) G_k(r,\xi) + \overline{G}_k(r,s) \overline{G}_k(r,\xi) \right) dr & \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{G}_k(r,s) G_k(r,\xi) dr \\ \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{G}_k(r,\xi) G_k(r,s) dr & \int_0^1 G_k(r,s) G_k(r,\xi) dr \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$f_k(s) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \int_0^1 \left[p_{2k-1} r^{2k} s G_k(r,s) + \left(p_{2k} r^{2k} + p_{2k-1} r^{2k} \ln r \right) s \overline{G}_k(r,s) \right] dr \\ \int_0^1 \left(p_{2k} r^{2k} + p_{2k-1} r^{2k} \ln r \right) s G_k(r,s) dr \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Оскільки $\max_{\Pi} \left\| A_k(\xi,s) \right\| \le 4$, $\max_{s\in[0,1]} \left\| f_k(s) \right\| \le \le \frac{1}{4k^2} \left(| p_{2k-1} | + | p_{2k} | \right)$, то рівняння (15), (16) мають єдиний розв'язок $\tilde{u}_0 \in C([0,1])$, $\tilde{z}_k = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{2k-1} \\ \tilde{u}_{2k} \end{pmatrix} \in C([0,1])$, причому $\forall k \ge 1$

$$\max_{r\in[0,1]} | \tilde{u}_{2k-1}(r) | \le \frac{1}{k^2} \left(| p_{2k-1} | + | p_{2k} | \right), \quad \max_{r\in[0,1]} | \tilde{u}_{2k}(r) | \le \frac{1}{k^2} \left(| p_{2k-1} | + | p_{2k} | \right). \tag{19}$$

Тоді за ознакою Вейєрштраса виконується умова (7) і, аналогічно [4], використовуючи гармонічність функцій $r^{2n} \sin 2n\theta$ і $r^{2n} (\ln r \cdot \sin 2n\theta + \theta \cos 2n\theta)$, а також (12)–(14), одержимо виконання умови (8). Тим самим, встановлена однозначна розв'язність задачі (1)–(2).

Наближене оптимальне керування для задачі (1)–(2). Розглянемо рівняння (5)–(6), які однозначно визначають компоненти оптимального керування $\tilde{u}(r,\theta)$. За теоремою Банаха про нерухому точку маємо, що якщо функція $u(s)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(s) = \int_0^1 A(\xi,s) u(\xi) d\xi + f(s), \tag{20}$$

де A, f – визначені в (17), (18) неперервні функції, для яких $\max_{s\in[0,1]} \left\| A(\xi,s) \right\| \le \rho < 1$, $\max_{s\in[0,1]} \left\| f(s) \right\| \le L$, то рекурентна процедура

$$u^{(i+1)}(s) = \int_0^1 A(\xi,s) u^{(i)}(\xi) d\xi + f(s), \quad i \ge 0, u^0(s) \equiv 0, \tag{21}$$

визначає рівномірну збіжну на $[0,1]$ до розв'язку рівняння (20) послідовність $\{u^{(i)}(s)\}_{i=0}^{\infty}$, причому швидкість збіжності визначається з умови

$$\max_{s\in[0,1]} \left\| u(s) - u^{(i)}(s) \right\| \le \frac{\rho^i}{1-\rho} \cdot L. \tag{22}$$

Застосуємо цей результат до рівнянь (15), (16), вважаючи, що

$$A(\xi,s) = A_0(\xi,s) = -\int_0^1 G_0(r,\xi) G_0(r,s) dr,$$

$$f(s) = f_0(s) = -p_0 \cdot \int_0^1 G_0(r,s) dr.$$

Нехай $\forall i > 0$ $u_0^{(i)}(s)$ рекурентно визначається з формули

$$u_0^{(i+1)}(s)=\int_0^1 A_0(\xi,s)u_0^{(i)}(\xi)d\xi+f_0(s),u_0^{(0)}\equiv 0\,. \quad (23)$$

Для $k\ge 1$ $z_k^{(i)}(s)=\begin{pmatrix}u_{2k-1}^{(i)}(s)\\ u_{2k}^{(i)}(s)\end{pmatrix}$ рекурентно визначається з формули

$$z_k^{(i+1)}(s)=-\frac{1}{(4k)^2}\int_0^1 A_k(\xi,s)z_k^{(i)}(\xi)d\xi+f_k(s),\quad z_k^{(0)}\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \quad (24)$$

При цьому

$$\max_{s\in[0,1]}\left\|\tilde u_0(s)-u_0^{(i)}(s)\right\|\le\frac{(e^{-2})^i}{1-e^{-2}}\cdot|p_0|e^{-1}, \quad (25)$$

$$\max_{s\in[0,1]}\left\|\tilde z_k(s)-z_k^{(i)}(s)\right\|\le\frac{\left(\frac{1}{4k^2}\right)^i}{4k^2-1}\cdot\left(|p_{2k-1}|+|p_{2k}|\right). \quad (26)$$

У якості наближеного керування розглянемо функцію

$$u_N^{(i)}(r,\theta)=\sum_{k=0}^{2N-1}u_k^{(i)}(r)\varphi_k(\theta)= \quad (27)$$
$$=u_0^{(i)}(r)\cdot\theta+\sum_{k=0}^{2N-1}\left(u_{2k-1}^{(i)}(r)\theta\cos 2k\theta+u_{2k}^{(i)}(r)\sin 2k\theta\right),$$

де $\{u_k^{(i)}(r)\}_{i=0}^{\infty}$ визначається з (23), (24).

Відповідний розв'язок задачі (1) матиме вигляд

$$\bar y(r,\theta)=\bar y_0(r)\theta+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar y_{2k-1}(r)\theta\cos 2k\theta+ \quad (28)$$
$$+\bar y_{2k}(r)\sin 2k\theta),$$

де $\{\bar y_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначаються формулами

$$\bar y_0(r)=p_0+\int_0^1 G_0(r,s)u_0^{(i)}(s)ds\,, \quad (29)$$

$$\bar y_{2k-1}(r)=\begin{cases}p_{2k-1}r^{2k}+\dfrac{1}{4k}\displaystyle\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds,\ 1\le k\le N,\\ p_{2k-1}r^{2k},\ \ k>N,\end{cases} \quad (30)$$

$$\bar y_{2k}(r)=\begin{cases}p_{2k}r^{2k}+p_{2k-1}r^{2k}\ln r+\dfrac{1}{4k}\displaystyle\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k}^{(i)}(s)ds+\dfrac{1}{4k}\displaystyle\int_0^1 s\overline{G}_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds,\ 1\le k\le N-1,\\ p_{2k}r^{2k}+p_{2k-1}r^{2k}\ln r+\dfrac{1}{4k}\displaystyle\int_0^1 s\overline{G}_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds,\ k=N,\\ p_{2k-1}r^{2k},\ \ k>N.\end{cases} \quad (31)$$

Підставляючи (27), (28) у критерій (2), маємо, що

$$\left|J(\tilde u)-J(u_N^{(i)})\right|\le 2|p_0|^2\left(\frac{1}{7}\right)^i+ \quad (32)$$
$$+\left(\frac{1}{4}\right)^i 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|p_{2k-1}|^2+|p_{2k}|^2\right)+$$
$$+5\cdot\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|p_{2k-1}|^2+|p_{2k}|^2\right).$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. Формула (27) реалізує наближене оптимальне керування в задачі (1)–(2) в тому сенсі, що $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\ \exists i_0\ \ \forall N\ge N_0\ \ \forall i\ge i_0$

$$\left|J(\tilde u)-J(u_N^{(i)})\right|<\varepsilon\,.$$

Чисельні розрахунки. Для ілюстрації описаного методу проведено обчислення в пакеті Mathematica. У таблиці 1 наведено результати обчислювального експерименту для знаходження значень критерію (2) для перших семи кроків ітерації за припущення, що $u_0\equiv 0,\ p_0\equiv 1$.

Таблиця 1

Крок ітерації	Значення функціоналу на к-тому кроці ітерації
k=1	J_1=0.968006
k=2	J_2=0.968643
k=3	J_3=0.968208
k=4	J_4=0.968252
k=5	J_5=0.968247
k=6	J_6=0.968248
k=7	J_7=0.968248

Отже, за результатами обчислень можна стверджувати, що з кожним кроком ітерації значення функціоналу на відповідному наближеному оптимальному керуванні збігається до деякого точного значення. До того ж проведені обчислення демонструють, що швидкість такої збіжності є навіть більшою, ніж встановлено в умові (22).

Висновки. У роботі для задачі мінімізації квадратичного критерію якості на розв'язках еліптичного рівняння з розподіленим керуванням у правій частині, які задовольняють нелокальні крайові умови на границі області, доведено класичну розв'язність, тобто знаходиться оптимальний серед допустимих процесів. Також побудовано наближене оптимальне керування і обґрунтовано, що зазначене керування реалізує мінімум критерію якості та є близьким до оптимального, що ілюструють проведені чисельні розрахунки.

Список використаних джерел

1. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров – Москва: Наука, 1978. – 463 с.
2. *Капустян В.Е.* Геометрические методы модального управления / В. Е. Белозёров, В.Е. Капустян. – Киев: Наукова думка, 1999. – 259 с.
3. *Моисеев Е.И.* О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе / Е. И. Моисеев, В. Э. Амбарцумян // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 718-725.
4. *Капустян О.А.* Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі / Капустян В.О., Капустян О.А., Мазур О.К. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 3-9.

References

1. EGOROV, A. (1978) *Optimalnoe upravlenie teplovyimi i diffuzionnyimi protsessami.* Moskva: Nauka.
2. KAPUSTYAN, V. and BELOZEROV, V. (1999) *Geometricheskiye metodyi modalnogo upravleniya.* Kiev: Naukova dumka.
3. MOISEEV, Ye. and AMBARTSUMIAN, V. (2010) O razreshimosti kraevoi zadachi s ravenstvom potokov na chasti granitsyi I sopriazhennoi k nei sisteme. *Differentsialnye uravneniya.* 46 (5). p. 718-725.
4. KAPUSTYAN, V., KAPUSTIAN, O. and MAZUR, O. (2012) Zadacha optymalnogo keruvannia dlia eliptychnogo rivniannia z nelokalnymy krayovymy umovamy v krugovomu sektori. *Zhurnal obchysluvalnoyi ta prykladnoyi matematyky.* 2 (108). p. 3-9.

Надійшла до редколегії 16.05.14