УДК 004.42,510.649

Нікітченко М.С. [1], д. ф.-м. н., проф.,
Криволап А.В. [2], аспірант.

Композиція побудови умови за прообразом у монотонних логіках Флойда-Хоара

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: krivolapa@gmail.com

M. S. Nikitchenko[1], Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor,
A. V. Kryvolap[2], PhD student.

Composition of preimage condition construction in monotone Floyd-Hoare logics

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: krivolapa@gmail.com

В роботі розглядаються програмні логіки з монотонною композицією Флойда-Хоара. Дається визначення перетворювача предикатів – композиції побудови умови за прообразом для випадку зазначених вище програмних логік з частковими предикатами.

Розглянуто основні композиції програмного рівня за винятком циклічної композиції. Для цих композицій подано формули, що дозволяють обчислити умову за прообразом за допомогою синтаксичних перетворень. Доведено, що отримані таким чином предикати будуть дійсно задовольняти визначенню композиції побудови умови за прообразом.

Показано як використовуючи відповідні перетворювачі предикатів, можна звести проблему пошуку спростування трійки Флойда-Хоара в програмній логіці до пошуку спростування формули предикатної логіки.

Ключові слова: програмні логіки, перетворювачі предикатів, спростовність.

Program logics with monotone Floyd-Hoare composition are considered in this work. This logic is an extension of the Floyd-Hoare logic on partial predicates. A predicate transformer – preimage condition construction – is defined for the case of abovementioned program logics with partial predicates. Such predicate transformer can be treated as a substitution for Dijkstra's weakest precondition predicate transformer for tne extension of the Floyd-Hoare logic on partial predicates.

Main compositions of program level such as assignment composition, conditional composition, sequential execution composition are being studied. For those compositions formulas that permit calculate preimage condition by implementing series of syntactic transformations are presented. It was proven that predicates obtained in this way will satisfy composition of preimage condition construction definition.

It is shown how using corresponding predicate transformers the refutability problem for Floyd-Hoare assertion in program logics can be reduced to the same problem for formula in predicate logic.

Key Words: program logics, predicate transformers, refutability.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Монотонна логіка Флойда-Хоара для часткових квазіарних предикатів

У статті [1] показано, що класична логіка Флойда-Хоара не є монотонною, якщо її розширити на випадок часткових квазіарних предикатів. Тому було дано визначення композиції Флойда-Хоара, яка була б монотонною за всіма аргументами. Монотонність розуміється відносно визначеності предикатів та функції. Інтуїтивне визначення наступне: композиція є монотонною, якщо при довизначенні предикатів та функцій, що є її аргументами, результат не зміниться на тих даних, на яких він вже був визначений.

Всі поняття, що не визначені в даній роботі, будемо розглядати в смислі [1–3]. Зокрема, V – множина імен (змінних), A – множина базових значень, ${}^{V}A$ – множина номінативних даних, $Pr^{V,A}: {}^{V}A \to \{T,F\}$ – множина квазіарних предикатів над ${}^{V}A$, $Fn^{V,A}: {}^{V}A \to A$ – множина квазіарних ординарних функцій над ${}^{V}A$, що задають семантику виразів в програмі, $FPrg^{V,A}: {}^{V}A \to {}^{V}A$ – множина біквазіарних функцій над ${}^{V}A$, які є одним з варіантів подання семантики програм. Зважаючи на приведені визначення, композиція Флойда-Хоара буде мати тип

$$FH: Pr^{V,A} \times FPrg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A},$$

тобто за передумовою, програмою та післяумовою вона видає відповідний предикат.

Перед тим, як дати означення композиції Флойда-Хоара, наведемо додаткові визначення та позначення:

- $\mu(d)\downarrow$ будемо позначати, що μ визначено на d;
- $\mu(d)\downarrow= d'$ будемо позначати, що μ визначено на d і має значення d';
- $\mu(d)\uparrow$ будемо позначати, що μ невизначено на d;
- $\mu[S] = \{\mu(d) \mid \mu(d)\downarrow, d \in S\}$ будемо позначати образ S відносно μ;
- $\mu^{-1}[S'] = \{d \mid \mu(d)\downarrow, \mu(d) \in S'\}$ будемо позначати прообраз (обернений образ) S' відносно μ.

Тоді можна дати визначення областей істинності, хибності та невизначеності предиката $p \in Pr^{V,A}$:

$$p^{T} = \{d \mid p(d) = T\},$$
$$p^{F} = \{d \mid p(d) = F\},$$
$$p^{\perp} = \{d \mid p(d)\uparrow\}.$$

Додатково можна навести визначення образів та прообразів відповідних областей ($p, q \in Pr^{V,A}$, $pr \in FPrg^{V,A}$):

$$q^{-T,pr} = pr^{-1}[q^{T}],$$
$$q^{-F,pr} = pr^{-1}[q^{F}],$$
$$q^{-\perp,pr} = pr^{-1}[q^{\perp}],$$
$$p^{T,pr} = pr[p^{T}],$$
$$p^{F,pr} = pr[p^{F}],$$
$$p^{\perp,pr} = pr[p^{\perp}].$$

Композиція Флойда-Хоара визначена наступним чином:

$$FH(p,pr,q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(d)\downarrow= F \\ \quad \text{або } q(pr(d))\downarrow= T, \\ F, \text{ якщо } p(d)\downarrow= T \\ \quad \text{та } q(pr(d))\downarrow= F, \\ \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

Таким чином області істинності та хибності визначеної композиції рівні відповідно:

$$FH(p,pr,q)^{T} = p^{F} \cup q^{-T,pr},$$
$$FH(p,pr,q)^{F} = p^{T} \cap q^{-F,pr}.$$

В статті [1] було доведено, що така композиція буде не лише монотонною, але й неперервною. Монотонність можна записати, як:

$$p \subseteq p', pr \subseteq pr', q \subseteq q' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow FH(p,pr,q) \subseteq FH(p',pr',q').$$

Під істинністю предиката будемо як і в статті [1] розуміти неспростовність. Іншими словами це значить, що: $\models p \Leftrightarrow p^{F} = \varnothing$.

Тому умову істинності предиката отриманого застосуванням композиції Флойда-Хоара, можна записати наступним чином:

$$\models FH(p,pr,q) \Leftrightarrow p^{T} \cap q^{-F,pr} = \varnothing.$$

Монотонна композиція побудови умови за прообразом

Для того, щоб мати змогу перевіряти чи існує спростування для конкретної трійки Флойда-Хоара, потрібно визначити також композицію побудови умови за прообразом (скорочено – композиція умови за прообразом), яка б за післяумовою та програмою видавала б деяку передумову таку, щоб відповідна трійка була б істинною. Для випадку тотальних предикатів Дейкстрою в [4] було введено перетворення предикатів, яке будує найслабкішу передумову. Якщо розглядати часткові предикати, то очевидно, що не буде існувати єдиного визначення найслабкішої передумови для заданої програми та передумови. Це спричинено тим, що можна давати різні визначення того факту, що один предикат є слабшим за іншій, тобто що один з предикатів є наслідком іншого. Імплікація є лише одним з прикладів такого визначення. Слід також зазначити, що можливі визначення найслабкішої передумови для часткових предикатів не будуть мати потрібних властивостей, а саме: бути монотонною композицією та дозволяти перевіряти спростовність. Так як для спростування не важливо, чи буде отримана передумова найслабкішою з усіх можливих за певним критерієм, то можна при побудові шуканої передумови відмовитись від даної вимоги і перейти до побудови композиції, яку, як було сказано, будемо називати композицією умови за прообразом. Визначимо відповідну композицію виходячи з того, що вона має бути монотонною; крім того, отримана передумова має бути просто обчислена за післяумовою та програмою, а також має дозволяти показати спростовність трійки Флойда-Хоара. Таку композицію умови за прообразом

$$PC: FPrg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$$

будемо визначати наступним чином:

$$PC(pr,q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } q(pr(d)) \downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } q(pr(d)) \downarrow = F, \\ \text{невизначено в інших випадках.} \end{cases}$$

Іншими словами області істинності та хибності умови за прообразом є повними прообразами областей істинності та хибності післяумови відносно програми. Формально це можна записати :

$$PC(pr,q) = p \Leftrightarrow p^T = pr^{-1}[q^T], p^F = pr^{-1}[q^F].$$

Однією з вимог до композиції була монотонність. Другою ж була можливість за умовою за прообразом знаходити спростування відповідних трійок Флойда-Хоара. Це стає можливим тому, що умова за прообразом $PC(pr,q)$ хибна на певному даному тоді і тільки тоді, коли програма pr зупиняється на цьому даному і післяумова q є хибною на стані, отриманому в результаті виконання програми. Якщо ж деяка передумова p буде істиною на такому даному, то таке дане буде спростуванням трійки $\{p\}pr\{q\}$. В інакшому випадку, якщо передумова p буде хибною, або невизначеною на всіх даних, де умова за прообразом $PC(pr,q)$ хибна, то трійка $\{p\}pr\{q\}$ буде істиною, бо не буде мати спростування. Більше детально це буде показано згодом.

Лема 1. Композиція умова за прообразом $PC: FPrg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$ – монотонна за всіма аргументами, іншими словами, виконується наступне:

$$pr \subseteq pr', q \subseteq q' \Rightarrow PC(pr,q) \subseteq PC(pr',q').$$

Доведення. Спочатку доведемо, що виконується монотонність за післяумовою, тобто, що $q \subseteq q' \Rightarrow PC(pr,q) \subseteq PC(pr,q')$. Згідно з визначенням маємо, що $PC(pr,q)^T = pr^{-1}[q^T]$, $PC(pr,q')^T = pr^{-1}[q'^T]$, $PC(pr,q)^F = pr^{-1}[q^F]$ та $PC(pr,q')^F = pr^{-1}[q'^F]$. З того, що $q \subseteq q'$ отримуємо $q^T \subseteq q'^T \wedge q^F \subseteq q'^F$. Повні прообрази відносно програми зберігають включення множин [5], тому маємо, що :

$$PC(pr,q)^T \subseteq PC(pr,q')^T,$$
$$PC(pr,q)^F \subseteq PC(pr,q')^F.$$

Це дає відповідно шукане твердження:

$$PC(pr,q) \subseteq PC(pr,q').$$

Залишається лише довести, що виконується $pr \subseteq pr' \Rightarrow PC(pr,q) \subseteq PC(pr',q)$.

Аналогічно попередньому з визначень маємо $PC(pr,q)^T = pr^{-1}[q^T]$, $PC(pr',q)^T = pr'^{-1}[q^T]$, $PC(pr,q)^F = pr^{-1}[q^F]$ та $PC(pr',q)^F = pr'^{-1}[q^F]$. Зрозуміло, що $pr^{-1}[q^T] \subseteq pr'^{-1}[q^T]$ та $pr^{-1}[q^F] \subseteq pr'^{-1}[q^F]$, бо повний прообраз множини за більш визначеною функцією точно буде включати в себе повний прообраз за менш визначеною.

Отже ми маємо, що $PC(pr,q) \subseteq PC(pr',q)$. Це означає, що композиція монотонна і за програмою, тобто вона монотонна за всіма аргументами.

Покажемо, як за побудовою бiквазiарної функції (тобто програми) ми можемо визначити відповідну умову за прообразом. Для цього розглянемо всі композиції програмного рівня [3], окрім композиції циклу, а саме: композицію присвоєння, композицію послідовного виконання, композицію умовного оператору, та композицію тотожної програми. Композиція циклу не дозволяє обчислити умову за прообразом за допомогою простих синтаксичних перетворень, саме тому до розгляду беруться лише ациклічні програми. Проте це не обмежує область застосування перетворювачів предикатів, так як ми можемо розглядати апроксимації програм, що не містять циклів, а натомість містять деяку кількість послідовних виконань тіла циклу. Проводити такі доведення дозволяє той факт, що композиція Флойда-Хоара є монотонною і ми можемо поступово доводити твердження для все більш визначених апроксимацій. Таким чином для вказаних композицій програмного рівня можна довести наступне.

Теорема 1. Мають місце такі рівності:

$$PC(id,q)=q,$$
$$PC(AS^x(fa),q)=S^x(q,fa),$$
$$PC(f\bullet g,q)=PC(f,PC(g,q)),$$
$$PC(IF(r,f,g),q)=(r\to PC(f,q))\wedge$$
$$\wedge(\neg r\to PC(g,q))\wedge(r\to r).$$

Доведення. Перед тим, як почати доведення, наведемо визначення основних композицій програмного рівня та функції накладання.

Функція накладання:

$$d_1\nabla d_2=[v\mapsto a\mid v\mapsto a\in_n d_2\vee$$
$$\vee(v\mapsto a\in_n d_1\wedge\neg\exists a'(v\mapsto a'\in_n d_2))].$$

Інтуїтивно функцію накладання можна розуміти як функцію, що з двох даних утворює нове дане, що містить всі змінні і їх значення з другої іменної множини, та лише ті змінні з першої, що не містяться в другій. Іншими словами значення змінних з другої іменної множини накладаються на значення з першої.

Композиція тотожна програма:

$$id(d)=d, d\in {}^VA.$$

Композиція присвоєння:

$$AS^x(f)(d)=d\nabla[x\mapsto f(d)],$$

де $f\in Fn^{V,A}$, $d\in {}^VA$.

Композиція послідовного виконання:

$$fs_1\bullet fs_2(d)=fs_2(fs_1(d)),$$

де $fs_1, fs_2\in FPrg^{V,A}$, $d\in {}^VA$.

Умовна композиція:

$$IF(p,fs_1,fs_2)(d)=\begin{cases}fs_1(d), \text{ якщо } p(d)\downarrow=T,\\ fs_2(d), \text{ якщо } p(d)\downarrow=F,\\ \text{невизначена інакше.}\end{cases}$$

де $p\in Pr^{V,A}$, $fs_1, fs_2\in FPrg^{V,A}$, $d\in {}^VA$.

Покажемо, що у всіх випадках виконується визначення умови за прообразом. Зробимо це через області істинності та хибності відповідних предикатів.

Для рівності $PC(id,q)=q$ все очевидно.

$$PC(id,q)^T=id^{-1}[q^T],\ id^{-1}[q^T]=id[q^T],$$
$$id[q^T]=q^T,\ PC(id,q)^F=id^{-1}[q^F],$$
$$id^{-1}[q^F]=id[q^F],\ id[q^F]=q^F.$$

Таким чином ми маємо, що виконуються наступні рівності:

$$PC(id,q)^T=q^T,\ PC(id,q)^F=q^F.$$

Це значить, що виконується $PC(id,q)=q$.

Розглянемо $PC(AS^x(fa),q)=S^x(q,fa)$.

$$PC(AS^x(fa),q)^T=AS^x(fa)^{-1}[q^T],$$
$$PC(AS^x(fa),q)^F=AS^x(fa)^{-1}[q^F].$$

Потрібно показати, що:

$$AS^x(fa)^{-1}[q^T]=S^x(q,fa)^T,$$
$$AS^x(fa)^{-1}[q^F]=S^x(q,fa)^F.$$

Покажемо це спочатку для області істинності, для області хибності все аналогічно.

$$AS^x(fa)^{-1}[q^T]=\{d\mid AS^x(fa)(d)\in q^T\},$$
$$\{d\mid AS^x(fa)(d)\in q^T\}=\{d\mid q(AS^x(fa)(d))=T\},$$
$$\{d\mid q(AS^x(fa)(d))=T\}=\{d\mid q(d\nabla x\mapsto fa(d))=T\},$$
$$\{d\mid q(d\nabla x\mapsto fa(d))=T\}=\{d\mid S^x(q,fa)(d)=T\},$$
$$\{d\mid S^x(q,fa)(d)=T\}=S^x(q,fa)^T.$$

Підсумовуючи все отримуємо, що $AS^x(fa)^{-1}[q^T]=S^x(q,fa)^T$. Для області хибності аналогічно. Отже, маємо:

$$PC(AS^x(fa),q)=S^x(q,fa).$$

Для того, щоб $PC(f\bullet g,q)=PC(f,PC(g,q))$ потрібно відповідно:

$$PC(f \bullet g,q)^T = PC(f, PC(g,q))^T,$$
$$PC(f \bullet g,q)^F = PC(f, PC(g,q))^F.$$

Розглянемо лише область істинності, для області хибності все аналогічно.

$$PC(f \bullet g,q)^T = f \bullet g^{-1}[q^T],$$
$$f \bullet g^{-1}[q^T] = f^{-1}[g^{-1}[q^T]],$$
$$f^{-1}[g^{-1}[q^T]] = f^{-1}[PC(g,q)^T],$$
$$f^{-1}[PC(g,q)^T] = PC(f, PC(g,q))^T.$$

Отже в результаті ми маємо:

$$PC(f \bullet g,q)^T = PC(f, PC(g,q))^T.$$

Аналогічно можна отримати:

$$PC(f \bullet g,q)^F = PC(f, PC(g,q))^F.$$

Таким чином обидві умови виконуються, звідки маємо:

$$PC(f \bullet g,q) = PC(f, PC(g,q)).$$

Залишається остання рівність, а саме:

$$PC(IF(r,f,g),q) = (r \to PC(f,q)) \wedge$$
$$\wedge (\neg r \to PC(g,q)) \wedge (r \to r).$$
$$PC(IF(r,f,g),q)^T = (r \to PC(f,q))^T \cap$$
$$\cap (\neg r \to PC(g,q))^T \cap (r \to r)^T.$$
$$PC(IF(r,f,g),q)^F = (r \to PC(f,q))^F \cup$$
$$\cup (\neg r \to PC(g,q))^F \cup (r \to r)^F.$$

Покажемо що це так для області істинності, для області хибності доведення аналогічне.

$$PC(IF(r,f,g),q)^T = IF(r,f,g)^{-1}[q^T],$$
$$IF(r,f,g)^{-1}[q^T] = (r^T \cap f^{-1}[q^T]) \cup (r^F \cap g^{-1}[q^T]).$$

Розпишемо праву частину, отримаємо:

$$(r^F \cup f^{-1}[q^T]) \cap (r^T \cup g^{-1}[q^T]) \cap (r^T \cup r^F).$$

Розкриємо дужки при першій операції перетину:

$$((r^F \cap g^{-1}[q^T]) \cup (f^{-1}[q^T] \cap r^T) \cup$$
$$\cup (f^{-1}[q^T] \cap g^{-1}[q^T])) \cap (r^T \cup r^F).$$

Знову розкриємо дужки і одразу скоротимо, отримаємо:

$$(r^F \cap g^{-1}[q^T]) \cup (f^{-1}[q^T] \cap r^T) \cup (f^{-1}[q^T] \cap$$
$$\cap g^{-1}[q^T] \cap r^T) \cup (f^{-1}[q^T] \cap g^{-1}[q^T] \cap r^F).$$

Очевидно, що:

$$(f^{-1}[q^T] \cap g^{-1}[q^T] \cap r^T) \subset (f^{-1}[q^T] \cap r^T),$$
$$(f^{-1}[q^T] \cap g^{-1}[q^T] \cap r^F) \subset (g^{-1}[q^T] \cap r^F).$$

Звідки, підсумовуючи все, отримуємо:

$$(r \to PC(f,q))^T \cap (\neg r \to PC(g,q))^T \cap (r \to r)^T =$$
$$= (r^T \cap f^{-1}[q^T]) \cup (r^F \cap g^{-1}[q^T]).$$

Отже для області істинності вірно.

Зауважимо, що диз'юнкт $(r \to r)$ не є зайвим, бо він потрібний для правильної побудови області істинності.

Запишемо для області хибності.

$$PC(IF(r,f,g),q)^F = IF(r,f,g)^{-1}[q^F],$$
$$IF(r,f,g)^{-1}[q^F] = (r^T \cap f^{-1}[q^F]) \cup (r^F \cap g^{-1}[q^F]),$$

Звідси

$$(r \to PC(f,q))^F \cup (\neg r \to PC(g,q))^F \cup (r \to r)^F =$$
$$= (r^T \cap f^{-1}[q^F]) \cup (r^F \cap g^{-1}[q^F]).$$

Отримуємо бажану рівність, звідки:

$$PC(IF(r,f,g),q) = (r \to PC(f,q)) \wedge$$
$$\wedge (\neg r \to PC(g,q)) \wedge (r \to r).$$

Отже теорему доведено.

Для означеної композиції зберігається властивість $PC(pr,q)(d) \downarrow= F \Leftrightarrow q(pr(d)) \downarrow= F$. Отже проблему пошуку спростування трійки Флойда-Хоара $\{p\}pr\{q\}$ можна звести до проблеми пошуку спростування $p \to PC(pr,q)$, що виражає наступна лема.

Лема 2.

$$(p \to PC(pr,q))(d) \downarrow= F \Leftrightarrow FH(p,pr,q)(d) \downarrow= F.$$

Доведення. Розглянемо наступні твердження:

$$(p \to PC(pr,q))(d) \downarrow= F \Leftrightarrow p(d) = T \wedge$$
$$\wedge PC(pr,q))(d) \downarrow= F,$$

$$PC(pr,q))(d) \downarrow= F \Leftrightarrow d \in pr^{-1}[q^F],$$

$$d \in p^T \wedge d \in pr^{-1}[q^F] \Leftrightarrow d \in FH(p,pr,q)^F,$$

$$d \in FH(p,pr,q)^F \Leftrightarrow FH(p,pr,q)(d) \downarrow= F.$$

Отже твердження леми доведено.

Таким чином, ми отримуємо можливість елімінувати композицію Флойда-Хоара. Це дозволяє звести формули трьохосновної програмної логіки до формул двохосновної композиційно-номінативної логіки предикатів [6], яка є простішою та більш дослідженою, ніж програмна логіка.

Висновки

Для монотонних логік Флойда-Хоара було дано визначення предикатного перетворювача побудови умови за прообразом.

Як вже було зазначено, при визначені відповідної композиції було поставлено дві основні вимоги: отримана композиція має бути монотонною, та має дозволяти перевіряти чи є спростування довільної трійки Флойда-Хоара з заданими післяумовою та програмою.

Для обраної множини композицій програмного рівня було наведено правила, що дозволяють за допомогою синтаксичних перетворень визначити умову за прообразом для програми, тобто терму відповідної алгебри без циклів.

Все вищезазначене дає нам змогу перейти від розгляду програми та післяумови до розгляду умови за прообразом і таким чином від рівня програмних логік перейти до рівня предикатних, або предикатно-функціональних логік.

Список використаних джерел

1. *Нікітченко М.С., Криволап А.В.* Семантичні властивості монотонних логік Флойда-Хоара / М.С. Нікітченко, А.В. Криволап // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – №3. – С. 215-222.
2. *Нікітченко М.С. Композиційно-номінативній підхід до уточнення поняття програми* / М.С. Нікітченко // Проблеми програмування. – 1999. – № **1**. – С. 16–31.
3. *Нікітченко М.С. Теорія програмування. Частина 1.* / М.С. Нікітченко. – Ніжин: видавничий дім НДУ імені Миколи Гоголя, 2010. – 129 с.
4. *Edsger W. Dijkstra* Guarded commands, nondeterminacy and formal derivation of program / Edsger W. Dijkstra // Communications of the ACM. – 1975. – №18(8). – P. 453–457.
5. *Буй Д.Б., Кахута Н.Д. Властивості теоретико-можинних конструкцій повного образу та обмеження* / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2005. – №2. – С. 232-240.
6. *Nikitchenko M.S., Tymofieiev V.G.*: Satisfiability in Composition-Nominative Logics // Central European Journal of Computer Science.– 2012.– Vol. **2**, issue **3**.– P. 194–213.

References

1. NIKITCHENKO, M., KRYVOLAP, A. (2012) Semantychni vlastyvosti monotonnykh logic Floyda-Khoara. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* 3. p. 215-222.
2. NIKITCHENKO, M. (1999) Kompositsionno-nominativnyy podkhod k utochneniyu ponatiya programmy. *Problems in programming.* 1. p. 16-31.
3. NIKITCHENKO, M. (2010) *Teoriya programuvanna. Chastyna 1.* Nizhyn: vydavnichiy dim NDU imeni Mykoly Hohola.
4. DIJKSTRA, E. (1975) Guarded commands, nondeterminacy and formal derivation of program. *Communications of the ACM.* 18(8) p. 453-457.
5. BUY, D., KAHUTA, N. (2005) Vlastyvosti teoretyko-mozhynnykh konstruktsiy povnoho obrazu ta obmezhenna. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* 2. p. 232-240.
6. NIKITCHENKO, M., TYMOFIEIEV. V. (2012) Satisfiability in Composition-Nominative Logics. *Central European Journal of Computer Science*. 2(3). p. 194–213

Надійшла до редколегії 28.04.14