УДК 519.8

Семенова Н. В.[1], д.ф.-м.н., пров.н.с.
Олійник С. В.[2], аспірант

Декомпозиційний метод розв'язання задач частково комбінаторної оптимізації

[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 03680, ГСП, м. Київ, пр. Акад. Глушкова , 40,
e-mail: nvsemenova@meta.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: svetlana22.07@mail.ru

N. V. Semenova[1], doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher
S. V. Oliinyk[2], graduate student.

Decomposition Method for solving of mixed combinatorial problems

[1] V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, 40 Glushkova ave., Kyiv, Ukraine, 03187
e-mail: nvsemenova@meta.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: svetlana22.07@mail.ru

Досліджено задачі частково дискретної оптимізації на комбінаторній множині перестановок. На основі вивчення властивостей допустимої області задачі побудовано та обґрунтовано декомпозиційний метод знаходження її розв'язків, що заснований на поєднанні ідей методу Бендерса і поліедрального підходу.

Ключові слова: *дискретна оптимізація, комбінаторна множина, перестановки, методи декомпозиції, релаксація.*

Investigated partially discrete optimization problem considering the combinatorial sets of the permutations. Also investigated some properties of feasible region these problem. Exact and approximate decomposition algorithms for solving mentioned problems were constructed and justified. Specified algorithms based on a combination of ideas Benders' Method and polyhedral approach for partially combinatorial problems. The algorithm terminates after solving a finite number of subproblems. The result of the algorithm is the optimal solution of the problem or construction of such set of constraints in which the modified problem will not have solutions, thus primary problem will not have solutions too. Proved finiteness of algorithm. Proposed algorithm, definitions, theorems and conclusions make it possible to apply the classical methods of continuous optimization to solving partially combinatorial problems on the set of permutations and on this basis to develop new and original methods for solving problems using properties of combinatorial sets and their convex hulls.

Key Words: discrete optimization, combinatorial set of permutations, decomposition methods, relaxation.

Статтю представив доктор техн. наук, проф. Геращенко Ф.Г.

Одним із перспективних підходів до розв'язання складних задач дискретної оптимізації є декомпозиційний підхід, який здійснює пошук розв'язків вхідної задачі шляхом розв'язання ряду незалежних підзадач меншої розмірності [1−4]. Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації розроблені різні обчислювальні методи. Найбільш перспективні з них складають окрему область поліедральної комбінаторики [2,3,5]. Загальна ідея цих методів полягає у встановленні зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування: елементи допустимої множини інтерпретуються як точки евклідового простору, функції цілі і обмежень розглядаються як неперервні. Таким чином, розв'язується задача знаходження екстремуму функції на опуклій оболонці заданих точок, тобто на опуклому многограннику. Як відомо, екстремум лінійної функції на многограннику досягається в одній з вершин, яка включається в комбінаторну множину елементів, що розглядаються.

Особливість розв'язування комбінаторних задач при такому зведенні полягає в тому, що при знаходженні розв'язків можна обмежуватися лише вершинами многогранника.

Розглянемо частково дискретну задачу оптимізації вигляду $P1$:

$$\min\left\{c^T x + f(y) \mid Ax + F(y) \geq b, x \geq 0, y \in S\right\}.$$

Матриця A має розмірність $m \times n$, x та c – n-вимірні вектори, f – скалярна функція від y, F – m-вектор, компонентами якого є функції від y, b – m-вектор, y – q-вимірний вектор, а S – комбінаторна множина перестановок. Задача $P1$ є частково дискретною, де деякі змінні є неперервними, а деякі комбінаторними. Оскільки $P1$ лінійна по x при фіксованих значеннях y, логічно розв'язувати її шляхом фіксації y, розв'язання лінійного програмування (ЛП) відносно x, отримання кращого значення y тощо. Отже, можуть розглядатися тільки такі значення y, для яких існує x, що задовольняє обмеження, тобто вектор y повинен належати множині $R = \{y \mid \exists x \geq 0 : Ax \geq b - F(y), y \in S\}$.

Для того щоб у явній формі отримати обмеження, що визначають множину R, скористаємось лемою Фаркаша [4].

Лема. Існує вектор $x \geq 0$, що задовольняє умови $Bx = a$ тоді і тільки тоді, коли $a^T u \geq 0 \ \forall u$, що задовольняють $B^T u \geq 0$.

Зафіксувавши $y \in S$ і застосувавши лему до системи лінійних рівностей і нерівностей $Ax - s = b - F(y)$, $x \geq 0, s \geq 0$, приходимо до висновку, що y допустимий, тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(b - F(y))^T u \leq 0 \qquad (1)$$

$\forall u$, що задовольняють $A^T u \leq 0, u \geq 0$.

Позначимо $C = \{u \mid A^T u \leq 0, u \geq 0\}$ многогранний конус, він визначається скінченою кількістю твірних, тобто $\exists u_i^r, i = 1,...n_r$ такі, що $\forall u \in C$ може бути представленим у вигляді $u = \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i u_i^r, \lambda_i = 0.$ Підставляючи останній вираз в (1), отримаємо $\sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i (b - F(y))' u_i^r \leq 0,$ що справедливо $\forall \lambda_i \geq 0$, тоді і тільки тоді, коли

$$(b - F(y))^T u_i^r \leq 0, i = 1,..., n_r. \qquad (2)$$

Таким чином, вектор $y \in S$ допустимий, тоді і тільки тоді, коли він задовольняє скінченній системі обмежень (2). Множина R тепер може бути представлена у вигляді

$$R = \left\{y \mid (b - F(y))^T u_i^r \leq 0, i = 1,..., n_r, y \in S\right\}. \qquad (3)$$

Якщо R порожня, тоді вхідна задача $P1$ не має допустимого розв'язку. Припускаючи, що R не порожня, перепишемо $P1$ у вигляді

$$\min_{y \in R}\left\{f(y) + \min\left\{c^T x \mid Ax \geq b - F(y), x \geq 0\right\}\right\}.$$

Для фіксованого y внутрішня мінімізація цієї задачі є задачею ЛП. Запишемо відповідно пряму (4) і двоїсту (5) задачі.

$$\min\left\{c^T x \mid Ax \geq b - F(y), x \geq 0\right\}. \qquad (4)$$

$$\max\left\{(b - F(y))^T u \mid A^T u \leq c, u \geq 0\right\}. \qquad (5)$$

Якщо $y \in R$, то пряма задача (4) допустима і в силу теореми двоїстості маємо рівність

$$\begin{aligned} &\min\{c^T x \mid Ax \geq b - F(y), x \geq 0\} = \\ &= \max\{(b - F(y))^T u \mid A^T u \leq c, u \geq 0\}, \end{aligned} \qquad (6)$$

де значення максимуму береться рівним $-\infty$, якщо двоїста задача недопустима. Отже, співвідношення (6) сумують твердження, що якщо пряма має необмежений розв'язок, то двоїста недопустима, в той час коли обидві задачі допустимі, то вони мають скінчений оптимальний розв'язок з рівними значеннями цільових функцій. Враховуючи вищезазначене приходимо до нової форми задачі $P1$:

$$\min_{y \in R}\{f(y) + \max\{(b - F(y))^T u \mid A^T u \leq c, u \geq 0\}\}$$

Розглянемо множину обмежень двоїстої задачі $P = \{u \mid A^T u \leq c, u \geq 0\}$. Обмеження не залежать від y. Якщо $P = \varnothing$, то двоїста задача (5) має необмежений розв'язок як і вхідна задача $P1$. Якщо $P \neq \varnothing$, то внутрішній максимум задачі $P1$ досягається в одній з вершин $u_i^p \in P$, $i = 1,..., n_p$, або прямує до ∞ вздовж крайнього променя $u_i^r, i = 1,...n_r$, множини P. В цьому випадку задача (4) недопустима, що суперечить вхідним припущенням, отже можна обмежитись розглядом тільки крайніх точок P. Задача $P1$, враховуючи означення R, може бути записана у вигляді задачі $P2$:

$$\min\{z \mid z \ge f(y) + (b - F(y))^T u_i^p, i = 1,\dots,n_p,$$
$$(b - F(y))^T u_i^r \le 0, i = 1,\dots,n_p,\ \ y \in S\ \}$$

Позначивши G множину, що описується обмеженнями задачі $P2$, переходимо до нового запису цієї задачі: $\min\{z \mid (z, y) \in G\}$.

Теорема 1. Справедливі такі твердження.

1) Задача $P1$ не має допустимих розв'язків тоді і тільки тоді, коли множина G порожня.

2) Якщо $(\bar{z}, \bar{y})$ – розв'язок задачі $P2$ та $\bar{x}$ є розв'язком задачі ЛП

$$\min\left\{c^T x \mid Ax \ge b - F(\bar{y}),\ x \ge 0\right\}, \qquad (7)$$

тоді $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком $P1$ і $\bar{z} = c^T \bar{x} + f(\bar{y})$;

3) якщо $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком задачі $P1$ та $\bar{z} = c^T \bar{x} + f(\bar{y})$, тоді $(\bar{z}, \bar{y})$ є розв'язком $P2$.

Таким чином, розв'язання вхідної задачі $P1$ зводиться до послідовного розв'язання задачі комбінаторної оптимізації з однією неперервною змінною вигляду $P2$ і задачі ЛП вигляду (7). Якщо задача $P2$ не має допустимих розв'язків, то не має допустимих розв'язків і задача $P1$. Якщо $P2$ має оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$, то для побудови оптимального розв'язку $(\bar{x}, \bar{y})$ задачі $P1$ потрібно розв'язання задачі (7). Для знаходження розв'язків задачі $P2$ треба виписати всі обмеження, що визначають область G. Але знаходження оптимального розв'язку задачі $P2$ більш важливо, ніж сама множина G, тому достатньо побудувати тільки ті обмеження G, що визначають оптимальний розв'язок цієї задачі. Застосуємо підхід релаксації [4]. Почнемо з урахування тільки невеликої кількості обмежень та будемо розв'язувати модифіковані таким чином задачі $P2$, які позначатимемо $MP2$.

$$\min\{z \in S \mid z \ge f(y) + (b - F(y))^T u_i^p, i \in I_1,$$
$$(b - F(y))^T u_i^r \le 0, i \in I_2\},$$

де $I_1 \subset \{1,\dots,n_p\}$, $I_2 \subset \{1,\dots,n_r\}$. Нехай G' – множина всіх (z, y), що задовольняють обмеження $MP2$. $G' \supseteq G$. Таким чином, розв'язок $MP2$ оптимальний для $P2$, тоді і тільки тоді, коли він належить G, тобто задовольняє всі обмеження $P2$. Звичайно, ці обмеження в явній формі недоступні, оскільки заздалегідь не обчислені всі крайні точки та промені множини P. Однак для перевірки належності до G або генерації нових обмежень можуть бути використані задачі ЛП вигляду (4) та (5).

Сформулюємо критерій оптимальності. [4].

Теорема 2 Оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$ задачі $MP2$ є оптимальним розв'язком $P2$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\max\{(b - F(\bar{y}))^T u \mid A^T u \le c, u \ge 0\} = \bar{z} - f(\bar{y}).$$

Алгоритм розв'язання задачі *P*1.

1. Розв'язуємо задачу $MP2$, в якій немає жодного або є декілька обмежень задачі $P2$.

2. Якщо задача $MP2$ недопустима, тоді недопустимі $P2$ та $P1$. У протилежному випадку отримуємо оптимальний розв'язок $(\bar{z}, \bar{y})$ або інформацію про те, що цільова функція задачі необмежена. Якщо $\bar{z} = -\infty$, то виберемо за $\bar{y}$ довільний елемент S та переходимо до кроку 3.

3. Розв'язуємо двоїсту задачу ЛП (5) (або пряму (4), якщо вона допустима). Якщо задача (5) недопустима, то вхідна задача $P1$ має необмежену цільову функцію на допустимій множині. Якщо задача (5) має необмежену цільову функцію, тоді переходимо до пункту 6.

4. Якщо оптимальне значення цільової функції двоїстої задачі (5), отриманої на кроці 3, дорівнює $\bar{z} - f(\bar{y})$, тоді $(\bar{z}, \bar{y})$ є розв'язком $P2$. Якщо $\bar{x}$ – розв'язок задачі (7), то $(\bar{x}, \bar{y})$ є розв'язком $P1$.

5. Якщо у пункті 3 не виконується критерій оптимальності та двоїста задача ЛП (5) при $y = \bar{y}$ має скінченний оптимальний розв'язок $\bar{u}$, то додамо до задачі $MP2$ обмеження

$$z \ge (b - F(y))^T \bar{u} + f(y) \qquad (8)$$

та повернемося до пункту 2.

6. Якщо двоїста задача (5) при $y = \bar{y}$ має необмежений розв'язок, то симплекс-метод дозволяє знайти промінь $\bar{v}$ і точку $\bar{u}$ такі, що цільова функція цієї задачі прямує до ∞ вздовж променя $u = \bar{u} + \lambda\bar{v}, \lambda \ge 0$. Додамо до задачі $MP2$ обмеження $(b - F(y))^T \bar{v} \le 0$. Якщо при цьому має місце нерівність $\bar{z} < f(\bar{y}) + (b - F(\bar{y}))^T \bar{u}$ для крайньої точки $\bar{u}$, то додаємо обмеження вигляду (8) до $MP2$. Повертаємося до пункт 2.

Скінченна збіжність алгоритму випливає зі скінченної кількості обмежень задачі $P2$.

Теорема 3 Описаний алгоритм закінчується за скінченну кількість ітерацій зі знаходженням оптимального розв'язку задачі $P1$ або з отриманням інформації про те, що задача $P1$ недопустима або має необмежену цільову функцію на допустимій множині.

Знаходження верхніх та нижніх границь

Достоїнством цього алгоритму є можливість обчислення верхньої та нижньої меж оптимального значення цільової функції, причому таких, що збігаються до оптимального значення тоді, коли в процесі розв'язання досягається оптимальність.

Для i-го кроку справедлива оцінка $z^i \le \min\{z \mid (z, y) \in G\} \le \min_{1\le j\le i}(c^T x^j + f(y^j))$.

Критерій оптимальності є умовою того, що верхня та нижня межі рівні. Верхня оцінка генерується послідовністю допустимих розв'язків задачі $P1$, отже, найкраща з цих оцінок може бути взята як розв'язок, якщо алгоритм закінчується раніше досягнення оптимуму.

Розв'язання комбінаторної задачі *MP2*

Нехай S – комбінаторна множина перестановок, $F(y) = By$ та $f(y) = d^T y$. Задача $P1$ в цьому випадку є лінійною задачею з комбінаторними та неперервними змінними. Задача $MP2$ є задачею комбінаторної оптимізації, для якої можна застосовувати поліедральний підхід [2, 3, 5].

Відомо [6-8], що опуклою оболонкою комбінаторної множини перестановок є загальний переставний многогранник, множина вершин якого дорівнює множині перестановок. Дана властивість многогранника перестановок дає можливість звести розв'язання задачі, визначеної на комбінаторній множині, до її розв'язання на неперервній допустимій множині.

Для цього використаємо поняття мультимножини A, яка визначається основою $S(A)$ і кратністю її елементів $k(a)$. Нехай задана мультимножина $A = \{a_1,...,a_q\}$, її основа $S(A) = \{e_1,...,e_k\}$ і кратність елементів $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + ... + r_k = q$.

Впорядкованою n-вибіркою із мультимножини A називається набір $a = (a_{i_1},...,a_{i_n})$, де $a_{i_j} \in A$, $\forall i_j \in N_n = \{1,2,...,n\}$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, $s \ne t$, $\forall s \in N_n$.

Множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною множиною перестановок, тобто множиною упорядкованих n-вибірок із мультимножини A за умови $n = q > k$. При $n = k = q$ маємо множину перестановок без повторень.

Означення 1. Множина $E(A)$, елементами якої є n-вибірки $a = (a_{i_1},...,a_{i_n})$ з мультимножини A, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a' = (a'_1,...,a'_n)$, $a'' = (a''_1,...,a''_n)$, виконуються умови: $a' \ne a''$, тоді і тільки тоді, коли $\exists\, j \in N_n$: $a'_j \ne a''_j$.

Означення 2. Перестановкою скінченної множини A називається довільна бієктивна функція $\pi : A \to A$. Якщо $|A| = p$, то існує $p!$ різних перестановок.

Вважаємо, що елементи мультимножини упорядковані за неспаданням: $a_1 \le ... \le a_q$. Нехай P_q – множина всіх перестановок з q чисел мультимножини A. Кожній перестановці $a = (a_1,...,a_q) \in P_q$ поставимо у відповідність $y = (y_1,...,y_q) \in R^q$ за правилом $y_i = a_{j_i}$, $i, j \in N_q$.

Означення 3. Опуклу оболонку точок $\{a^i = (a_{i_1},...,a_{i_q}) : \forall a^i \in P_q\}$ будемо називати многогранником перестановок і позначати Π_{qk}.

Теорема 4 [6-8]. Многогранник перестановок задається наступною системою лінійних обмежень: $\sum_{j=1}^{q} y_j = \sum_{j=1}^{q} a_j$, $\sum_{j=1}^{i} y_{a_j} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j$, $a_j \in N_q, a_j \ne a_t : \forall j \ne t$, $i, j \in N_i$, $\forall i \in N_{q-1}$.

Отже, комбінаторну множину перестановок P_q можна описати у вигляді многогранника $\Pi_{qk}(A)$, вершинами якого є перестановки. $\Pi_{qk}(A) = \operatorname{conv} P_{qk}(A)$. Введемо наступні позначення. Допустиму область G задачі $MP2$ запишемо у вигляді $G = \left\{x \in R^n \mid Hx \le g\right\}$, $g = \left(g_1,...,g_p\right)$, $H \in R^{p\times n}$, H – матриця, яка використовується для матрично-векторної форми запису лінійних нерівностей, що описують многогранник перестановок $\Pi_{qk}(A)$ і обмежень задачі $MP2$, де всі обмеження зведені до одного $(\le)$ вигляду нерівностей. Позначимо N_p множину, елементи якої визначають номери обмежень лінійних нерівностей, що описують многогранник $\Pi_{qk}(A)$ і обмежень задачі $MP2$:

$N_p = \{1, 2, ..., 2^n + m_s\}$. Визначимо такі множини: $G_i = \left\{ x \in R^n \middle| (h_i)^T y \le g_i \right\}$, $i \in N_p$; $\forall\, y^s \in R^q$:

$$N^a(y^s) = \left\{ i \in N_p \middle| (h_i)^T y^s = g_i \right\},$$

$$N^n\left(y^s\right) = \left\{ j \in N_p \middle| (h_i)^T y^s < g_j \right\} –$$ відповідно множини номерів активних та неактивних обмежень у точці y^s; $h_i \in R^q$, $g_i \in R, i \in N_p$ – відповідно i-ий рядок матриці H та i-а компонента вектора g.

Введемо до розгляду задачу, яка розв'язується на s-му кроці алгоритму: $Z\left(z, G^s\right) : \max\left\{ z \,|\, (z, y) \in G^s \right\}$. В ній допустима множина $G^s = \left\{ x \in R^n \middle| \langle h_i, x \rangle \le g_i, i \in Q_s \subset N_p \right\}$, де Q_s – множина номерів обмежень, що описують допустиму область задачі $Z\left(z, G^s\right)$, $Q_s = N_p \setminus R_s$, R_s – множина номерів обмежень, які не були включені в цю задачу на s-му кроці.

Означення 4. Величина $r_i\left(y\right) = \langle h_i, y \rangle - g_i$, $i \in N_p$, називається відхиленням точки $y \in R^q$ від границі множини G^i, а величина $r\left(y\right) = \max\left\{ r_i\left(y\right) \middle| i \in N_p \right\}$ – відхиленням точки $y \in R^q$ від границі множини G.

Теорема 5. Оптимальний, розв'язок (z, y) задачі $Z\left(z, G^s\right)$ є оптимальним розв'язком задачі *MP2* тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r\left(y\right) \le 0$.

Доведення. Необхідність цього твердження очевидна, оскільки допустимий розв'язок (z, y) задачі $Z\left(z, G^s\right)$ є допустимим розв'язком задачі *MP2* тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r\left(y\right) \le 0$. Достатність твердження випливає з побудови задачі *MP2* і означення $r\left(y\right) \le 0$.

Загальна ідея запропонованого методу полягає у послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв'язків. Реалізація методу у вигляді алгоритму описана нижче.

Алгоритм розв'язання задачі *MP2*

Початковий крок. Нехай $\overline{z} = \infty, s = 0$.

1. Як початкову точку y^s вибираємо деякий елемент загальної множини перестановок.

2. Опишемо обмеження, які відповідають точці $y^s \in \Pi^s_{qk}$ і визначають вершину загального многогранника перестановок, $\Pi_{qk}, \Pi^s_{qk} \supset \Pi_{qk}$.

3. Знаходимо відхилення $r_i(y^s)$, $\forall i \in N_p \setminus N_1$, p - загальне число обмежень, 1 – число обмежень многогранника перестановок.

4. Вибираємо $r(y^s) = \max\{ r_i(y^s) \,|\, i \in N_p \setminus N_1 \}$ і номер $i_s \in N_p$, при якому досягається максимум.

5. Перевіряємо нерівність $r(x^s) \le 0$. Якщо вона виконується, то точка y^s – оптимальний розв'язок задачі. Якщо $r(y^s) > 0$, то обмеження не виконуються і переходимо до наступного пункту.

6. Додаємо отримане обмеження з номером i_s до обмежень задачі $Z\left(z, G^s\right)$. Формуємо допустиму множину задачі таким чином:

$$G^{s+1} = G^k \mathrm{I} \ \{ y \in R^s \,|\, \langle h_i, x \rangle \le g_{is} \} \qquad (9)$$

7. Якщо $z^s < \overline{z}$, то визначаємо множину індексів $N^n(y^s) \subset Q_s$ і замінюємо Q_s на $Q_s = Q_s \setminus N^n(y^s)$. Покладаємо $\overline{z} = z^s$, $s = s + 1$.

8. Розв'язуємо задачу $Z\left(z, G^s\right)$. Якщо вона не має розв'язків, то не має розв'язків і вхідна задача *MP2*. Інакше одержимо оптимальний розв'язок y^s цієї задачі. Якщо він не є елементом загальної множини перестановок P_{qk}, то переходимо до пункту 9. Інакше вважаючи $Q_s = N_p$ переходимо до пункту 3 алгоритму.

9. Знаходимо суміжні з точкою y^s вершини многогранника перестановок і будуємо відтинання вигляду $\langle h_i, x \rangle \le g_{is}$, яке проходить через суміжні з точкою y^s вершини і якому не задовольняє отримана точка y^s. Формуємо систему обмежень, що описує множину G^{s+1} за формулою (9). Переходимо до пункту 7 алгоритму.

Зауваження. Якщо y^1 – елемент загальної множини перестановок $P_{qk}(A)$, то до множини $N^n(y^1)$ неактивних обмежень, які виключаються з множини G^S, слід віднести всі обмеження многогранника $P_{nk}(A)$, крім тих, які визначають точку y^1.

Теорема 6. Робота алгоритму закінчується після розв'язання скінченного числа підзадач $Z\left(z, G^S\right)$ і приводить до оптимального розв'язку задачі *MP2* або до побудови такої множини обмежень, при якій поточна підзадача $Z\left(z, G^S\right)$ буде нерозв'язуваною.

Доведення. Оскільки допустима множина G задачі *MP2* скінченна, то вона має скінченне число підмножин. При зменшенні z від одного кроку до іншого жодна підмножина не може повторитися. Оскільки жодне обмеження не відкидається, якщо $z^S = \overline{z}$, і принаймні одне або два обмеження додаються, то значення z^S можуть залишатися постійними лише протягом скінченного числа ітерацій. Отже, за скінченне число кроків алгоритм закінчується.

Досліджена задача частково дискретної оптимізації з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків. Досліджені деякі властивості таких задач. Побудовано та обґрунтовано декомпозиційний алгоритм розв'язання указаних задач, заснований на поєднанні ідей методу Бендерса і поліедрального підходу для частково комбінаторних задач. Це дає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання частково комбінаторних задач на множині перестановок і на цій основі розвивати нові оригінальні методи розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин та їх опуклих оболонок.

Список використаних джерел

1. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко.– Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Семенова Н.В.* Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання / Н.В. Семенова., Л.М. Колєчкіна. – Киев: Наукова думка, 2009. – 266 с.
3. *Семенова Н.В* Оптимізація на комбінаторній множині перестановок в умовах неточно заданих даних / Н.В. Семенова, О.С. Мащенко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №3. – С. 184-189.
4. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем / Л.С. Лэсдон. – Москва: Наука, 1975. – 432 с.
5. *Стоян Ю.Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян., О.О. Ємець. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. –188 с.
6. *Rado R.* An inequality // J. London Math. Soc., 1952, 27.
7. *Емеличев В.А*. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
8. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян., С.В. Яковлев. – К: Наук. думка, 1986. – 266 с.

References

1. SERGIENKO, I.V. (1988) *Mathematical models and methods for solving discrete optimization problems*. Kyiv: Scientific Idea.
2. SEMENOVA, N.V., KOLECHKINA L.M. (2009) *Vector discrete optimization problems on combinatorial sets: methods and solution.* Kyiv: Scientific Idea.
3. SEMENOVA, N.V., MASHCHENKO, O.S. (2009) Optimization on the combinatorial set of permutations in inexact input data conditions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics* №3. pp. 184-189.
4. LASDON L. (1975) *Optimization theory for large systems*. New York: MacMillan.
5. STOYAN, Y.G., EMETS O.O (1993) *Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization.* Kyiv: Institute for System Studies of Education.
6. RADO R. (1952) An inequality. *J. London Math. Soc.* 27.
7. EMELICHEV, V.A., KOVALYOV, M.M., KRAVTSOV, M.K. (1981) *Polyhedra, graphs, optimization*. Moscow: Nauka.
8. STOYAN, Y.G., YAKOVLEV, S.V. (1989) *Mathematical models and optimization methods for geometric design.* Kyiv: Scientific Idea.

Надійшла до редколегії 05.09.2014