УДК 517.9

Асроров Ф. А. [1], к.ф.-м.н., н.с.

Збурення інтегральної множини нелінійної системи з імпульсним впливом

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: farhod@univ.kiev.ua

F. A. Asrorov[1],candidate of phys. and mathem. sci.

The perturbation of integral set of nonlinear impulsive system

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: farhod@univ.kiev.ua

Робота пов'язана з теорією багаточастотних коливань і теорією диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями. Незалежність правої частини першого з цих рівнянь від x є істотною умовою при дослідженні існування інтегральних множин в системах рівнянь. Це дозволяє представляти інтегральну множину за допомогою однієї і тієї ж функції Гріна - Самойленка на кожному кроці відповідного ітераційного процесу. Якщо права частина згаданого вище рівняння залежить від x, задача встановлення умов існування інтегральних множин в системах з імпульсним впливом істотно ускладнюється.
Ключові слова: функція Гріна-Самойленко, інтегральна множина, імпульсна дія.

The article related to the theory of multifrequency oscillations and the theory of differential equations with impulse perturbations. Integral sets of impulsive systems of differential equations are studied. Questions about existence of integral sets for non-autonomous systems of differential equations are studied. For this purpose we use iteration process. As a result we obtain integral sets as a limit of specially constructed sets. The independence of the right-hand side of the first of these equations from x is an essential condition for the study of the existence of integral sets of the system. It allows to represent an integral set using the Green-Samoilenko function at each step of corresponding iterative process. If the right-hand side of the above equation depends on the x the problem of establishing conditions for the existence of integral sets in systems with impulse actions is more complex.
Keywords: Green-Samoilenko function, integral set, impulsive action.

Статтю представив д.ф.-м.н. академік НАН України Перестюк М.О.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією загального вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi,x),\quad \frac{dx}{dt}=F(t,\varphi,x),\ t\neq\tau_i,\qquad \Delta x\big|_{t=\tau_i}=I_i(\varphi,x), \tag{1}$$

в якій праві частини неперервні за своїми змінними, визначені в області:

$$\|x\|\le d,\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m, \tag{2}$$

і є періодичними по $\varphi_\nu,\nu=\overline{1,m}$ з періодом 2π, де $\Im_m - m-$ мірний тор.

Існування інтегральної множини систем (1) ускладнюється нелінійністю функцій a, F і I по зміній x. Це питання ми будемо вирішувати в рамках теорії збурень, що припускає певну малість величин

$$\|a(t,\varphi,x)-a(t,\varphi,0)\|,\ \|F(t,\varphi,x)-F(t,\varphi,0)\|,\ \|I_i(\varphi,x)-I(\varphi,0)\|$$

в області (2). Успіх при цьому досягається за рахунок використання ітераційніх процесів, лінеарізіруючих ту чи іншу задачу на кожному кроці ітерації.

Наведемо один з процесів лінеаризації, що дозволяє відшукувати інтегральну множину

$$x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m \tag{3}$$

системи (1). Для цього виділимо з системи (1) "лінійні" члени, записавши цю систему рівнянь у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi,x),\ \frac{dx}{dt}=P(t,\varphi,x)x+f(t,\varphi),\ t\neq\tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi,x)x+I_i(\varphi), \tag{4}$$

де позначено

$$f(t,\varphi)=F(t,\varphi,0),\quad P(t,\varphi,x)=\int_0^1\frac{\partial F(t,\varphi,\tau x)}{\partial(\tau x)}d\tau,$$
$$B_i(\varphi,x)=\int_0^1\frac{\partial I_i(\varphi,\tau x)}{\partial(\tau x)}d\tau,\quad I_i(\varphi)=I_i(\varphi,0).$$

Інтегральну множину системи рівнянь (4) будемо шукати ітераційним шляхом.

Задамо нульову ітерацію процесу функцією $u^0(t,\varphi)\in C(R\times\Im_m)$, де $C(R\times\Im_m)$ клас кусково-неперервних по t з розривами першого роду в точках τ_i неперервних по $\varphi\in\Im_m$, $2\pi-$ періодичних по $\varphi_\nu,\nu=\overline{1,m},$ обмежених при $t\in R,\varphi\in\Im_m$ функцій, що приймають значення в області (2), так що $\left\|u^0(t,\varphi)\right\|\leq d$ при всіх $t\in R,\varphi\in\Im_m$, і визначимо послідовність множин

$$x=u^{(i+1)}(t,\varphi),\quad t\in R,\varphi\in\Im_m,\quad i=0,1,\ldots \tag{5}$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi,u^{(i)}(t,\varphi)),$$
$$\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi,u^{(i)}(t,\varphi))x+f(t,\varphi),\quad t\neq\tau_i, \tag{6}$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi,u^{(i)}(\tau_i,\varphi))x+I_i(\varphi).$$

Лемма 1. Нехай функції a,P,B_i,f,I_i визначені і кусково-розривні по t з розривами першого роду в точках $t=\tau_i$, неперервні по φ і x, і є періодичними по $\varphi_\nu,\nu=\overline{1,m},$ з періодом 2π. Припустимо, що для будь-якого $i=0,1,\ldots$ система рівнянь (6) має інтегральну множину (5), що належить області (2).

Тоді, якщо $\lim\limits_{i\to\infty}u^i(t,\varphi)=u(t,\varphi)$ рівномірно по $t\in R,\varphi\in\Im_m$, то гранична функція $u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину (3) системи рівнянь (4).

Доведення леми 1 аналогічне доведенню леми 1 з [5].

Реалізація наведеного процесу лінеаризації системи рівнянь (4) вимагає з'ясування умов, при яких система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi)+a_1(t,\varphi),$$
$$\frac{dx}{dt}=\left(P(t,\varphi)+P_1(t,\varphi)\right)x+f(t,\varphi),\quad t\neq\tau_i, \tag{7}$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=\left(B_i(\varphi)+B_i^1(\varphi)\right)x+I_i(\varphi),$$

має інтегральну множину (3) для довільних досить малих за нормою простору $C(R\times\Im_m)$ функцій $a_1(t,\varphi),P_1(t,\varphi),B_i^1(\varphi)$. Під нормою функції $a(t,\varphi)\in C(R\times\Im_m)$ ми розуміємо наступну величину

$$\left\|a(t,\varphi)\right\|_0=\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|a(t,\varphi)\right\|.$$

Ці умови існування інтегральної множини системи рівнянь (7) вимагають деяку грубість функцій Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi),\ \frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,\quad t\neq\tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x. \tag{8}$$

Поряд з системою (8) розглянемо систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi)+a_1(t,\varphi),\ \frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,t\neq\tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x, \tag{9}$$

де $a_1(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по φ, рівномірно відносно $t\in R$.

Означення. Функцію Гріна-Самойленка $G(t,s,\varphi)$ системи рівнянь (8) будемо називати грубою, якщо знайдеться таке постійне число $\delta>0,$ що система рівнянь (9) при $\left\|a_1\right\|_0\leq\delta$ має функцію Гріна-Самойленко $\overline{G}(t,s,\varphi),$ для якої

$$\left\|\overline{G}(t,s,\varphi)f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\|_0\leq Ke^{-\gamma|t-s|}\left\|f(t,\varphi)\right\|_0, \tag{10}$$

де f - довільна функція з $C(R\times\Im_m),\ \varphi_t(\tau,\varphi)$ - розв'язок першого з рівнянь (9), K і γ - додатні сталі, які не залежать від φ,δ та f.

Лемма 2. Нехай система рівнянь (8) має грубу функцію Гріна-Самойленка $G(t,s,\varphi)$. Тоді можна вказати таке число $\rho=\rho(\delta)>0,\rho(\delta)\to0$ при $\delta\to0,$ що для будь-яких $a_1,P_1,B_i^1\in C(R\times\Im_m),$ що задовольняють умову

$$\left\|a_1\right\|_0+\left\|P_1\right\|_0+\left\|B_i^1\right\|_0\leq\rho, \tag{11}$$

і довільних $f,I_i\in C(R\times\Im_m)$ система рівнянь (7) має інтегральну множину (3), що задовольняє умову

$$\left\|u(t,\varphi)\right\|_0\leq K_1\left[\left\|f(t,\varphi)\right\|_0+\left\|I_i(\varphi)\right\|_0\right], \tag{12}$$

де K_1- додатна стала, яка не залежна від ρ, f і I_i.

Основна теорема

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi,x,\varepsilon),$$
$$\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi,x,\varepsilon)x + f(t,\varphi,\varepsilon),\ t \neq \tau_i, \tag{13}$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi,x,\varepsilon)x + I_i(\varphi,\varepsilon),$$

де a, P, B_i, f, I_i- періодичні по $\varphi_\nu\ \left(\nu = \overline{1,m}\right)$ періоду 2π функції, визначені по $t \in R, \varphi \in \Im_m$ в області

$$\|x\| \leq d,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \tag{14}$$

кусково-неперервні по t з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, неперервні за змінними φ, x, ε і такі, що

$$f(t,\varphi,0) \equiv 0, I_i(\varphi,0) \equiv 0,\quad t \in R, \varphi \in \Im_m, i \in Z. \tag{15}$$

Умова (15) гарантує існування тривіальної інтегральної множини

$$x = 0,\quad t \in R, \varphi \in \Im_m \tag{16}$$

системи (13) при $\varepsilon = 0$.

Запишемо рівняння у варіаціях, відповідно до інтегральної множини (16). Воно має вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(t,\varphi),\quad \frac{dx}{dt} = P_0(t,\varphi)x,\quad t \neq \tau_i,\quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i^0(\varphi)x, \tag{17}$$

де позначено $a_0(t,\varphi) = a(t,\varphi,0,0)$, $P_0(t,\varphi) = P(t,\varphi,0,0)$, $B_i^0(\varphi) = B_i(\varphi,0,0)$.

Вкажемо умови, що забезпечують існування інтегральної множини рівнянь (13) при $\varepsilon \neq 0$.

Теорема. Нехай функції a, P, B_i, f, I_i, що визначають систему рівнянь (13), двічі неперервно диференційовні по φ, x, ε в області (14). Припустимо, що система (17) має грубу функцію Гріна-Самойленка.

Тоді можна вказати досить мале $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ система рівнянь (13) має інтегральну множину

$$x = u(t,\varphi,\varepsilon), t \in R, \varphi \in \Im_m, \tag{18}$$

причому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varphi,\varepsilon) = 0.$$

Доведення. Перепишемо систему рівнянь (13) у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(t,\varphi) + a_1(t,\varphi,x,\varepsilon),$$
$$\frac{dx}{dt} = \left[P_0(t,\varphi) + P_1(t,\varphi,x,\varepsilon)\right]x + f(t,\varphi,\varepsilon),\ t \neq \tau_i, \tag{19}$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = \left[B_i^0(\varphi) + B_i^1(\varphi,x,\varepsilon)\right]x + I_i(\varphi,\varepsilon),$$

поклавши $a_1(t,\varphi,x,\varepsilon) = a(t,\varphi,x,\varepsilon) - a(t,\varphi,0,0)$,
$P_1(t,\varphi,x,\varepsilon) = P(t,\varphi,x,\varepsilon) - P(t,\varphi,0,0)$,
$B_i^1(\varphi,x,\varepsilon) = B(\varphi,x,\varepsilon) - B(\varphi,0,0)$,
і застосуємо для відшукання інтегральної множини (18) цієї системи ітераційний процес. Нульову ітерацію процесу задамо функцією $u^0(t,\varphi,\varepsilon) \equiv 0, t \in R, \varphi \in \Im_m$. Перше наближення $u_1(t,\varphi,\varepsilon)$ визначимо із системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(t,\varphi) + a_1(t,\varphi,0,\varepsilon),$$
$$\frac{dx}{dt} = \left[P_0(t,\varphi) + P_1(t,\varphi,0,\varepsilon)\right]x + f(t,\varphi,\varepsilon),\ t \neq \tau_i, \tag{20}$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = \left[B_i^0(\varphi) + B_i^1(\varphi,0,\varepsilon)\right]x + I_i(\varphi,\varepsilon)$$

її інтегральну множину

$$x = u_1(t,\varphi,\varepsilon),\quad t \in R, \varphi \in \Im_m. \tag{21}$$

Виберемо $\varepsilon_0 > 0$ настільки малим, щоб виконувалася нерівність

$$\left\|a_1(t,\varphi,u(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right\|_0 + \left\|P_1(t,\varphi,u(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right\|_0 + \left\|B_i^1(\varphi,u(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right\|_0 \leq \rho, \tag{22}$$

де $u(t,\varphi,\varepsilon) \in C(R \times \Im_m)$ довільна функція, що задовольняє нерівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|u(t,\varphi,\varepsilon)\| \leq K_1\left[\left\|f(t,\varphi,\varepsilon)\right\|_0 + \left\|I_i(\varphi,\varepsilon)\right\|_0\right], \tag{23}$$

де ρ і $K_1 -$ додатні сталі, які визначаються лемою 2. Припущення про неперервність функцій a_1, P_1, B_i^1 по φ, x, ε разом з умовою (15) гарантують можливість зазначеного вибору величини ε_0.

Права частина системи (20) задовольняє тоді для всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ умовам леми 2. Отже, інтегральна множина (21) цієї системи існує і задовольняє нерівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|u_1(t,\varphi,\varepsilon)\| \leq K_1\left[\left\|f(t,\varphi,\varepsilon)\right\|_0 + \left\|I_i(\varphi,\varepsilon)\right\|_0\right], \tag{21}$$

де $K_1 -$ стала, що входить в оцінку (23). Цього достатньо, щоб по першій ітерації (21) знайти другу, що задовольняє оцінці виду (24).

Припустимо, що для обраного $\varepsilon_0 > 0$ вже знайдені всі ітерації для $i = 1,\dots,p-1$ і що всі вони задовольняють нерівності виду (24). Наступне, $p -$ те наближення визначається тоді з системи рівнянь

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dt}=a_0(t,\varphi)+a_1(t,\varphi,u_{p-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\frac{dx}{dt}=\left[P_0(t,\varphi)+P_1(t,\varphi,u_{p-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]x+\\
&+f(t,\varphi,\varepsilon),\ t\neq\tau_i,\\
&\Delta x\big|_{t=\tau_i}=\left[B_i^0(\varphi)+B_i^1(\varphi,u_{p-1}(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]x+\\
&+I_i(\varphi,\varepsilon)
\end{aligned}\tag{25}$$

як її інтегральна множина

$$x=u_p(t,\varphi,\varepsilon),t\in R,\varphi\in\Im_m.\tag{26}$$

Так як функції $a_1(t,\varphi,u_{p-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$, $P_1(t,\varphi,u_{p-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$, $B_i^1(\varphi,u_{p-1}(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ нерівності (22), то інтегральна множина (26) системи (25) існує і задовольняє умові

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|u_p(t,\varphi,\varepsilon)\|\le\\
&\le K_1\left[\|f(t,\varphi,\varepsilon)\|_0+\|I_i(\varphi,\varepsilon)\|_0\right].
\end{aligned}\tag{27}$$

За методом повної математичної індукції переконуємося, що для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ будь-яка з ітерацій $u_p(t,\varphi,\varepsilon),\ p=1,2,\dots$ визначена і задовольняє нерівності виду (27).

Доведемо збіжність ітераційного процесу. Для цього розглянемо різницю

$$w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)=u_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)-u_i(t,\varphi,\varepsilon).$$

Відзначимо, що в силу двічі неперервної дифференційовності при $t\neq\tau_i$ функцій, що визначають систему рівнянь (13), інтегральні множини $u_i(t,\varphi,\varepsilon)$ будуть неперервно диференційовними при $t\neq\tau_i$. Тому

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i(t,\varphi,\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial u_i(t,\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\big(a_0(t,\varphi)+\\
&+a_1(t,\varphi,u_{i-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\big)=\\
&=\left[P_0(t,\varphi)+P_1(t,\varphi,u_{i-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]u_i(t,\varphi,\varepsilon)+\\
&+f(t,\varphi,\varepsilon),\ t\neq\tau_i,\\
&\Delta u_i(t,\varphi,\varepsilon)\big|_{t=\tau_i}=\left[B_i^0(\varphi)+B_i^1(\varphi,u_{i-1}(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]\times\\
&\times u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon)+I_i(\varphi,\varepsilon)
\end{aligned}\tag{28}$$

для всіх $t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ і $i=1,2,\dots$. Звідси випливає, що функція $w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)$ задовольняє рівнянню

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\big(a_0(t,\varphi)+a_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\big)=\\
&=\left[P_0(t,\varphi)+P_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]w+\\
&+f_i(t,\varphi,\varepsilon),\ t\neq\tau_i,\\
&\Delta w\big|_{t=\tau_i}=\left[B_i^0(\varphi)+B_i^1(\varphi,u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]w+\\
&+I_i^j(\varphi,\varepsilon),
\end{aligned}\tag{29}$$

де позначено

$$\begin{aligned}
&f_i(t,\varphi,\varepsilon)=\left[P_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-P_1(t,\varphi,u_{i-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]\times\\
&\times u_i(t,\varphi,\varepsilon)-\frac{\partial u_i(t,\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\left[a_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\\
&\left.-a_1(t,\varphi,u_{i-1}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon\right],\\
&I_i^j(\varphi,\varepsilon)=\left[B_i^1(\varphi,u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-B_i^1(\varphi,u_{i-1}(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]\times\\
&\times u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Тому множина, яка задається рівнянням

$$x=u_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon),\quad t\in R,\varphi\in\Im_m,$$

є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dt}=a_0(t,\varphi)+a_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon),\\
&\frac{dx}{dt}=\left[P_0(t,\varphi)+P_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]x+\\
&+f_i(t,\varphi,\varepsilon),t\neq\tau_i,\\
&\Delta x\big|_{t=\tau_i}=\left[B_i^0(\varphi)+B_i^1(\varphi,u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]x+\\
&+I_i^j(\varphi,\varepsilon)
\end{aligned}\tag{30}$$

для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Оскільки функції $a_1=a_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$, $P_1=P_1(t,\varphi,u_i(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$, $B_i^1(\varphi,u_i(\tau_i,\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$ при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ задовольняють нерівності (22), а функції f_i і I_i^j неперервні, то система рівнянь (30) задовольняє умовам леми 2. Оцінка (12) для $w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)\|\le\\
&\le K_1\left[\|f_i(t,\varphi,\varepsilon)\|_0+\|I_i^j(\varphi,\varepsilon)\|_0\right]\le\\
&\le K\left(\|u_i(t,\varphi,\varepsilon)\|_0+\left\|\frac{\partial u_i(t,\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\right\|_0\right)\|w_i(t,\varphi,\varepsilon)\|_0,
\end{aligned}\tag{31}$$

де K - деяка стала, яка не залежить від i та ε. Нерівність (31) з урахуванням оцінок виду (27) для ітерацій доводить, що

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)\|_0\le KK_1\left[\|f_i(t,\varphi,\varepsilon)\|_0+\|I_i^j(\varphi,\varepsilon)\|_0\right]\times\\
&\times\|w_{i+1}(t,\varphi,\varepsilon)\|_0\le\frac{1}{2}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|w_i(t,\varphi,\varepsilon)\|_0
\end{aligned}$$

для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ при досить малому $\varepsilon_0>0$.

Але тоді

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|w_i(t,\varphi,\varepsilon)\|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|w_i(t,\varphi,\varepsilon)\|,$$
$$i=1,2,\dots,$$

що забезпечує рівномірну збіжність послідовності $u_i(t,\varphi,\varepsilon),i=1,2,\dots$. Отже, знайдеться функція $u(t,\varphi,\varepsilon)\in C(R\times\Im_m)$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ і така, що

$$\lim_{i\to\infty}u_i(t,\varphi,\varepsilon)=u(t,\varphi,\varepsilon)$$

рівномірно по $t\in R,\ \varphi\in\Im_m,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

В силу неперервності функції $u(t,\varphi,\varepsilon)$ по ε і умові (15) переконуємося, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(t,\varphi,\varepsilon)=0$ рівномірно відносно $t\in R, \varphi\in \Im_m$. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. *Асроров Ф.А., Фекета П.В.* Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2010. – Вип.20. С. 4-12.
2. *Асроров Ф.А., Перестюк Н.А.* Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. 1994. т. 46, №8. С. 1067-1071.
3. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
4. Perestyuk N.A., Plotnikov N.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. (2011) Differential equations with impulsive effects: multivalued right-hand sides with discontinuous. De Gruyter 2011.
5. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
6. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
7. *Фекета П.В., Асроров Ф.А.* Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. С. 125-132.
8. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

References

1. ASROROV F.A., FEKETA P.V. (2010) *Bounded solutions of linear inhomogeneous systems with impulsive action // Bull. Uzhhorod University. Math. and Informatics Series, 2010. – vol.20. p. 4-12.*
2. ASROROV F.A., PERESTYUK N.A. (1994) *Green-Samoilenko function and existence of integral sets of linear extensions of non-autonomous systems* // Ukr. Mat. Zhurn. 1994. vol. 46, No. 8. p. 1067-1071.
3. MITROPOLSKY YU.A., SAMOILENKO A.M., KULYK V.L. (1990) *Investigation of dichotomy of linear systems of differential equations via Lyapunov functions*. – Kyiv: Nauk. dumka, 1990. 272 c.
4. PERESTYUK N.A., PLOTNIKOV N.A., SAMOILENKO A.M., SKRIPNIK N.V. (2011) Differential equations with impulsive effects: multivalued right-hand sides with discontinuous. De Gruyter 2011.
5. SAMOILENKO A.M. (1987) Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant tori. – M: Nauka,1987. – 304 p.
6. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1987) Differential equations with impulsive actions. – K.: Vyshcha shkola, 1987. – 288 p.
7. FEKETA P.V., ASROROV F.A. (2012) *Integral sets of extensions of non-autonomous systems on torus with impulsive perturbations// Bull. Uzhhorod University. Math. and Informatics Series, 2012. – vol.23. p. 125-132.*
8. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1995) Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 06.07.2014