УДК 517.96

Шушарін Ю. В.[1], к. ф.-м. н., старший викладач

Рекурентні рівняння для характеристичних функцій розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами

[1] Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, 03680, м. Київ, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: shusharin@meta.ua

Shusharin Y.V.[1], Ph.D., senior teacher

Recurrent equation for characteristic functions solutions of linear difference equations with random coefficients

[1] National Economic University named after Vadym Hetman, 03680, Kyiv, Prospect Peremogy 54/1

e-mail: shusharin@meta.ua

Для перетворень Фур'є частинних розподілів розв'язків векторних різницевих лінійних рівнянь з випадковими коефіцієнтами, що є ланцюгами Маркова із скінченним числом станів, виводяться рекурентні рівняння.

Ключові слова: перетворення Фур'є, різницеве рівняння, випадкові коефіцієнти, ланцюг Маркова.

For the Fourier transform partial distributions of solutions vector linear difference equations with random coefficients, which is a Markov chain with a finite number of states, derived recurrence equations. In cases where there is partial density distributions shown that a recurrence equation for the Fourier transform of distributions may receive partial recursive equation for the density. We study also the case when solutions of difference equations with random coefficients exist moments. We also show that a recurrence equations Fourier transform partial distributions of that solutions resulting equation for the first order moment of sequences and recurrence equation for the dispersion matrices. The work received partial recursive equation for characteristic functions of vector sequence of random variables that are solutions of linear difference equations with Markov coefficients and recurrence equation for partial points of the first and second order vector quantities that satisfy a linear difference equation of the general form of the coefficients dependent on two consecutive values of random variables is a Markov chain with a finite number of states.

Key Words: Fourier transform, difference equation, random coefficients, Markov chain.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаінов Д.Я.

Дослідженням процесів, що описуються різницевими рівняннями з випадковими коефіцієнтами займалися К.Г. Валеєв [5], І.І. Гіхман, І.Л. Джалладова, Д.Г. Коренівський [1] та інші. В роботах К.Г. Валеєва одержані рекурентні рівняння для частинних моментів першого та другого порядків для деяких лінійних рівнянь.

В даній роботі досліджуються проблеми побудови рекурентних рівнянь для загальних лінійних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Показано, що для характеристичних функцій лінійних різницевих рівнянь мають місце певні рекурентні співвідношення, які можна використати для отримання рекурентних рівнянь моментних функцій випадкових векторів. Лінійні диференціальні і різницеві рівняння з випадковими коефіцієнтами розглядались в роботах К.Г. Валеєва [5], В.С Королюка [2], Д.Г. Коренівського [1]. Для лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами отримані рекурентні рівняння для умовних характеристичних функцій, показано, що ці рекурентні рівняння можна використати для отримання рекурентних рівнянь для моментних функцій першого та другого порядків. Аналогічним чином можна отримати рекурентні рівняння для моментів вищих порядків.

Нехай послідовність $X_n \in R^m$ знаходиться із розв'язку різницевого рівняння

$$X_{n+1} = A(\xi_{n+1}, \xi_n) X_n, \qquad X_0 = \zeta_0, \qquad (1)$$

де $\xi_k, k = 0,...,n,$ – послідовність випадкових величин, що приймають скінчене число значень $\theta_1,...,\theta_q$, і утворюють марковський ланцюг з ймовірностями переходу

$\pi_{ks} = P\{\xi_n = \theta_k \big| \xi_{n-1} = \theta_s\}$, ζ_0 – випадковий вектор із R^m, що не залежить від величин $\xi_k, k = 0,...,n$, $A(\theta_k,\theta_s)$ – відомі матриці.

Нехай

$$F_k(n,x) = P\{X_n < x, \xi_n = \theta_k\},$$

де x – вектор із R^m з компонентами $x_1,...,x_m$, а під подією $\{X_n < x\}$ будемо розуміти подію $\{X_{n_1} < x_1,...,X_{n_m} < x_m\}$, X_{n_i} – компоненти вектора X_n.

Перетворення Фур'є функції $F_k(n,x)$ позначимо через $\varphi_k(n,t)$, тобто

$$\varphi_k(n,t) = \int_{R^m} \exp\{i(t,x)\}\, dF_k(n,x). \qquad (2)$$

Нехай далі послідовність X_n є розв'язком різницевого рівняння

$$X_{n+1} = A(\xi_{n+1},\xi_n)X_n + \sum_{j=1}^{r} B_j(\xi_{n+1},\xi_n)\eta_{jn}X_n, \qquad (3)$$
$$X_0 = \zeta_0,$$

де ξ_n – випадкові величини, такі ж як і в (1). Вектори $\eta_k, k = 0,...,n$, де $\eta_k = (\eta_{1_k},...,\eta_{r_k})^*$, є послідовність незалежних величин, що не залежать від ξ_k і від випадкового вектора ζ_0. $A(\theta_k,\theta_s), B_j(\theta_k,\theta_s)$ – матриці розмірності $m \times m$.

Теорема 1. Для перетворення Фур'є функції $P\{X_n < x, \xi_n = \theta_k\} = F_k(n,x)$ має місце рекурентне рівняння

$$\varphi_k(n+1,t) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \int_{R^r} \varphi_s\left(n, (A_{ks}^* t + \sum_{j=1}^{r} B_{j_{ks}}^* u_j)t\right) dF_n(u_1,...,u_r), \qquad (4)$$

де $A_{ks} = A(\theta_k,\theta_s)$, $B_{jks} = B_j(\theta_k,\theta_s)$, $F_k(u_1,...,u_r) = P\{\eta_{1_n} < u_1,...,\eta_{r_n} < u_r\}$.

Доведення.
Оскільки

$$P\{X_{n+1} < x, \xi_{n+1} = \theta_k\} = \sum_{j=1}^{q} P\{X_{n+1} < x, \xi_{n+1} = \theta_k, \xi_n = \theta_s\} =$$
$$= \sum_{s=1}^{q} \int_{R^r} P\left\{(A(\xi_n,\xi_{n+1}) + \sum_{j=1}^{r} B_j(\xi_n,\xi_{n+1})u_j)X_n, \xi_{n+1} = \theta_k, \xi_n = \theta_s\right\} dF_n(u_1,...,u_r),$$

а

$$P\left\{(A(\xi_n,\xi_{n+1}) + \sum_{j=1}^{r} B_j(\xi_n,\xi_{n+1})u_j)X_n < x, \xi_{n+1} = \theta_k, \xi_n = \theta_s\right\} = \pi_{ks} P\left\{(A_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{j_{ks}} u_j)X_n < x\right\},$$

то

$$F_k(n+1,x) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \int_{R^r} P\{\bar{A}_{ks} X_n < x\} dF_n(u_1,...,u_r),$$

де $\bar{A}_{ks} = A_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{j_{ks}} u_j$, звідки

$$\varphi_k(n+1,x) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \int_{R^r} \varphi_k(n, \bar{A}_{ks}^* t) dF_n(u_1,...,u_r),$$

що і потрібно було показати.

Припустимо, що G – вимірна множина із простору R^m, а функція $\mu_{nk}(G) = P\{x_n \in G, \xi_n = \theta_k\}$ абсолютно неперервна відносно міри Лебега для всякого n і $k = \overline{1,q}$. Тоді для міри $\mu_{nk}(G)$ має місце рівність

$$\mu_{nk}(G) = \int_G f_k(n,x)dx,$$

де $f_k(n,x)$ – вимірні за Лебегом функції, які назвемо частинними щільностями розподілу векторної величини X_n. Зауважимо, що якщо існують частинні щільності розподілу, то існує і щільність розподілу вектора X_n, яку позначимо через $f(n,x)$, причому має місце рівність $f(n,x) = \sum_{k=1}^{q} f_k(n,x)$.

Теорема 2. Припустимо, що існують частинні щільності розподілу. Тоді вони задовольняють рекурентному рівнянню

$$f_k(n+1,x) =$$
$$= \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \int_{R^r} f_s(n, \bar{A}_{ks}^{-1} x) \left|\det \bar{A}_{ks}\right| dF_n(u_1,...,u_r). \qquad (5)$$

Доведення.
Оскільки

$$\varphi_k(n+1,t) = \int_{R^m} \exp\{i(t,x)\} f_k(n+1,x)dx,$$

а

$$\varphi_s(n,\bar{A}_{ks}^* t)=\int_{R^m}\exp\{i(\bar{A}_{ks}^* t,x)\}f_s(n,x)dx=$$
$$=\int_{R^m}\exp\{i(t,\bar{A}_{ks}x)\}f_s(n,x)dx,$$

то після заміни змінних $v=\bar{A}_{ks}x$ одержимо, що

$$\varphi_s(n,\bar{A}_{ks}t)=\int_{R^m}\exp\{i(t,\bar{A}_{ks}x)\}f_s(n,x)dx=$$
$$=\int_{R^m}\exp\{i(t,v)\}f_s(n,\bar{A}_{ks}^{-1}v)\left|\det\bar{A}_{ks}\right|dv.$$

Враховуючи, що

$$\int_{R^r}\varphi_s(n,\bar{A}_{ks}t)dF_n(u_1,...,u_r)=\int_{R^m}\exp\{i(t,x)\}\int_{R^r}f_s(n,\bar{A}_{ks}^{-1}x)\left|\det\bar{A}_{ks}\right|dF_n(u_1,...,u_r)dx,$$

то із рекурентного рівняння (5) одержимо необхідне співвідношення.

Наслідок. Нехай вектор X_n є розв'язком рівняння

$$X_{n+1}=X_n+A(\xi_{n+1},\xi_n)X_n,\quad X_0=\zeta_0,$$

та у випадкового вектора ζ_0 існує щільність розподілу, причому матриці A_{ks} невід'ємно визначені. Тоді існують частинні щільності розподілу, які можуть бути визначені із рекурентного рівняння

$$f_k(n+1,x)=\sum_{s=1}^{q}f_s(n,(E+A_{ks})^{-1}x)\det(E+A_{ks}).$$

Позначимо далі через $m_k(n)$ та $D_k(n)$ відповідно величини

$$m_k(n)=\int_{R^m}xdF_k(n,x),$$
$$D_k(n)=\int_{R^m}xx^*dF_k(n,x).$$

Твердження 1. Припустимо, що у рівнянні (3) для випадкових величин $\eta_{jn},j=\overline{1,r},\zeta_0$ існують моменти першого та другого порядків. Тоді у вектора X_n також існують моменти першого та другого порядків, де мають місце рівності

$$Ex(n)=\sum_{k=1}^{q}m_k(n),$$
$$Ex(n)x^*(n)=\sum_{k=1}^{q}D_k(n).$$

Доведення цього твердження легко одержати із тих міркувань, що рівняння є лінійним та його розв'язок має вигляд

$$X_n=\prod_{s=1}^{n-1}\left(A(\xi_{s+1},\xi_s)+\sum_{j=1}^{r}B_j(\xi_{s+1},\xi_s)\eta_{js}\right)\zeta_0,$$

а також із рівності

$$P\{X_n<x\}=\sum_{k=1}^{q}F_k(n,x).$$

Вектори $m_k(n)$ назвемо частинними середніми, а $D_k(n)$ – частинними дисперсійними матрицями.

Теорема 3. Нехай X_n є розв'язком рівняння (3) та $E\eta_{jn}=0.$ Тоді частинні середні та частинні дисперсійні матриці задовольняють рекурентним рівнянням

$$m_k(n+1)=\sum_{s=1}^{q}A_{ks}m_s(n)\pi_{ks},\quad m_s(0)=E\zeta_0p_s,\qquad(6)$$

$$D_k(n+1)=\sum_{s=1}^{q}\pi_{ks}(A_{ks}D_s(n)A_{ks}^*+$$
$$+\sum_{ij}B_{i_{ks}}D_s(n)B_{j_{ks}}^*E\eta_{in}\eta_{jn},\quad D_k(0)=E\zeta_0\zeta_0^*p_s.\qquad(7)$$

Доведення.

Оскільки

$$\left.\frac{d}{d\tau}\varphi_k(n,t+\tau v)\right|_{t=0,\tau=0}=i(m_k(n),v),$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\varphi_k(n,t+\tau_1v_1+\tau_2v_2)\right|_{t=0,\tau_1=\tau_2=0}=-(D_k(n)v_1,v_2),$$

то із рекурентного рівняння (4) одержимо, що

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_k(n+1,t+\tau v)=$$
$$=\sum_{s=1}^{q}\pi_{ks}\int_{R^r}\frac{d}{d\tau}\varphi_k(n,\bar{A}_{ks}^*(t+\tau v)dF_n(u_1,...,u_r),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\varphi_k(n+1,t+\tau_1v_1+\tau_2v_2)=$$
$$=\sum_{s=1}^{q}\pi_{ks}\int_{R^r}\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\varphi_k\left(n,\bar{A}_{ks}^*(t+\tau_1v_1+\tau_2v_2)\right)dF_n(u_1,...,u_r).$$

Зауважимо, що

$$\left.\frac{d}{d\tau}\varphi_s(n,\bar{A}_{ks}^*(t+\tau v))\right|_{\tau=0}=$$
$$=(\varphi_s'(n,\bar{A}_{ks}^*t),\bar{A}_{ks}^*v)=(\bar{A}_{ks}\varphi_s'(n,\bar{A}_{ks}^*t),v).$$

Із умови $\varphi_s'(n,0)=im_s(n)$ одержимо потрібну рівність для частинних середніх. Оскільки

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\varphi_k(n,\bar{A}_{ks}^*(t+\tau_1v_1+\tau_2v_2))=$$
$$=(\varphi_s''(n,\bar{A}_{ks}^*(t+\tau_1v_1+\tau_2v_2))\bar{A}_{ks}^*v_1,\bar{A}_{ks}^*v_2)=$$
$$=(\bar{A}_{ks}\varphi_s''(n,\bar{A}_{ks}(t+\tau_1v_1+\tau_2v_2))A_{ks}^*v_1,v_2)$$

і $\varphi_s''(n,0)=-D_s(n),$ то враховуючи ці вирази одержимо рекурентне рівняння (7).

Зауваження. Аналогічним чином можна отримати рекурентні рівняння для неоднорідних лінійних рівнянь з марковськими коефіцієнтами.

В роботі було отримано рекурентні рівняння для часткових характеристичних функцій послідовності векторних випадкових величин, що є розв'язками лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами та рекурентні рівняння для часткових моментів першого та другого порядку векторних величин, що задовольняють лінійним різницевим рівнянням загального вигляду з коефіцієнтами залежними від двох послідовних значень випадкових величин, що є ланцюгами Маркова з кінцевим числом станів.

Список використаних джерел

1. Коренівський Д.Г. Стійкість розв'язків систем різницевих рівнянь при стохастичних збуреннях їх коефіцієнтів. Алгебраїчні критерії / Коренівський Д.Г. –Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. –210 с.
2. Королюк В.С. Стохастические модели систем / Королюк В.С. – Киев: Наукова думка, 1989. – 208 с.
3. Pandit S.C. On the stability of impulsiveby perturbed differential systems // Bull. Austral.Math.Soc., 1977, №3. –pp. 423–432.
4. Тихонов В.Н., Миронов М.А. Марковские процессы / В.Н. Тихонов, М.А. Миронов. –М.: Сов.радио, 1977. –488 с.
5. Валеев К.Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами: Монография / К.Г. Валеев, О.Л. Корелова, В.И. Горелов // – М.: Изд-во РУДН, 1996. –256 с.

References

1. Korenivskiy, D. (2010). *Stability of solutions of systems of difference equations with stochastic perturbations of the coefficients. Algebraic criteria*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.
2. Korolyuk, V. (1989). *Stochastic models of systems*. 1st ed. Kiev: Naukova dumka, p.208.
3. Pandit, S. (1977). On the stability of impulsiveby perturbed differential systems. *Bull. Austral. Math. Soc.*, №3, pp.423–432.
4. Tihonov, V. and Mironov, M. (1977). *Markov processes*. Moscow: Sovetskoe radio.
5. Valeev, K., Korelova, O. and Gorelov, V. (1996). *Optimization of linear systems with random coefficients: Monograph*. Moscow: RUDN.

Надійшла до редколегії 21.08.14