УДК 517.9

Задоянчук Н.В.[1], к.ф.-м.н.

Розв'язність одного класу задач оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

N.V. Zadoianchuk[1], PhD

The solvability of one class of optimal control problem for degenerate parabolic variation inequality

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

Досліджується задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності. За допомогою нерівності Харді-Пуанкаре, отримано достатні умови, за яких наведена оптимізаційна задача має єдиний розв'язок.

Ключові слова: параболічна варіаційна нерівність, вагова функція.

The main object of investigation is the control problem for degenerate parabolic variation inequality. There are many existence results for evolution variation inequalities without degeneration. But the distinction feature of the considered control object is the fact that its solvability sufficiently depends on properties of some weighted degenerate function . Since this function can be unbounded and reach zero on subsets of some set with zero Lebesgue measure, the operator associated with the problem loses properties which play the key role in solvability of considered parabolic variation inequality, and according to classic theorems, guarantee the existence of the solution. The purpose of the paper is to define sufficient conditions for weighted degenerate function under which the mentioned optimal control problem would have a unique solution. In order to do that it is used the transformation that reduces the initial problem to the optimal control problem for parabolic variation inequality with unbounded coefficients of potential type. It is proved that these problems are equivalent in some sense. Thus, using the so called Hardy-Poincare inequality, we proved, that the considered optimal control problem for degenerate parabolic variation inequality has a unique optimal solution in weighted Sobolev space.

Key Words: parabolic variation inequality, weighted function.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Постановка задачі.

Нехай $\Omega \subset R^N$ $(N \geq 3)$ - обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ і при цьому $0 \in R^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Нехай $Q = (0,T) \times \Omega$ є циліндром в $R^1 \times R^N$, де $T < +\infty$. Через $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ позначимо його бічну поверхню. Нехай функція $\rho : \Omega \to R$ задовольняє умови: $\rho > 0$ м. с. на Ω і при цьому

$$\begin{aligned} &\rho \in L^1(\Omega), \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega, R^N), \\ &\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{1}$$

Отже, функцію ρ можна ототожнити з мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int_E \rho(x)dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Надалі з функцією ρ будемо пов'язувати вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho dx)$ та $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, де зокрема $L^2(\Omega, \rho dx)$ є гільбертовим простором вимірних функцій $f : \Omega \to R$, для яких $\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega,\rho dx)} = \int_\Omega f^2 \rho dx < +\infty$.

Також будемо розглядати ваговий простір Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$, який утворений тими елементами з $W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких є скінченою норма $\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)} := \left(\int_\Omega y^2 \rho dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{R^N} \rho dx \right)^{1/2}$.

Відомо, що для довільної відкритої обмеженої області $\Omega \subset R^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ знайдеться така стала величина $C(\Omega) > 0$, що виконується нерівність типу Харді-Пуанкаре (див. [3])

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{R^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{R^N}} \right] dx \ge C(\Omega) \int_\Omega y^2 dx \qquad (2)$$

$$\forall y \in H^1_0(\Omega), \text{ де } \lambda_* = (N-2)^2/4.$$

Тоді, як випливає з (2) (див. [5]), $\forall y \in H^1_0(\Omega)$ та $0 < \lambda < \lambda_*$ вирази $\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{R^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{R^N}} \right] dx \right)^{1/2}$ та $\left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{R^N} dx \right)^{1/2}$ є еквівалентними нормами в просторі Соболєва $H^1_0(\Omega)$.

Розглянемо непорожню опуклу замкнену підмножину M простору $L^2(0,T;W^{1,2}_0(\Omega,\rho dx))$, що є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою:

$$\|y\|^2_{\rho(0,T)} := \int_0^T \int_\Omega y^2 \rho dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{R^N} \rho dx dt. \qquad (3)$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$ та $u_0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$ - задані розподілення, U_∂ - непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx)$ що визначається наступним чином:

$$U_\partial = \left\langle \begin{array}{l} u \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx)) : \\ \|u - u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))} \le L \end{array} \right\rangle, \qquad (4)$$

де $\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))} = \int_0^T \int_\Omega \frac{u^2}{\rho} dx dt$. Всюди далі функції $u \in U_\partial$ розглядаються як допустимі керування.

Розглянемо наступну задачу оптимального керування для виродженої нерівності з керуванням у правій частині:

$$I(u,y) = \frac{1}{2} \|y - y_{ad}/\sqrt{\rho}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho dx))} + \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))} \to \inf, \qquad (5)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{v}(v-y)\rho dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla y, \nabla(v-y))_{R^N} \rho dx dt \ge \ge \int_0^T \int_\Omega f(v-y) dx dt + \int_0^T \int_\Omega u(v-y) dx dt, \qquad (6)$$

$$v \in M, \dot{v} \in L^2\left(0,\mathrm{T};\left(W^{1,2}_0(\Omega,\rho dx)\right)^*\right), v(0,x) = 0,$$

$$u \in U_\partial,\ y \in M, \qquad (7)$$

$$y(0,x) = 0,\ x \in \Omega. \qquad (8)$$

Таким чином, маємо «слабку» постановку задачі оптимального керування для виродженої нерівності: знайти таку пару функцій

$$(u^0, \mathrm{y}^0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx)) \times \times L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega,\rho dx)),$$

для якої виконуються співвідношення (6)-(8) та на якій функціонал (5) досягав би свого найменшого можливого значення.

Попередній аналіз задачі оптимального керування (5)-(8).

Міркуваннями аналогічними до [4, Твердження 1] одержується наступний результат.

Твердження 1. Для довільного елементу $y \in L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega,\rho dx))$ має місце представлення $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, при цьому $z = \sqrt{\rho} y \in L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,1}_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Зауважимо, що аналогічно до [4] будемо мати низку таких проміжних результатів: 1) існує щільна множина $D_\rho \subset L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega))$ така, що $z/\sqrt{\rho} \in L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega,\rho dx))$, $\forall z \in D_\rho$; 2) можемо розглядати лінійне відображення $F : D_\rho \subset L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega)) \to L^2(0,T;\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega,\rho dx))$ де $Fz = z/\sqrt{\rho}$ та спряжений оператор

$$F^* : D(F^*) \subset L^2\left(0,T;\left(\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega,\rho dx)\right)^*\right) \to \to L^2\left(0,T;\left(\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega)\right)^*\right)$$

з відповідними властивостями; 3) $\|y\|_{L^2(0,T;W_\rho)} < \infty$, а тому $M \subset F(D_\rho)$, де W_ρ - замикання простору фінітних функцій $C^\infty_0(\Omega)$ за нормою $\|y\|^2_\rho := \int_\Omega y^2 \rho dx + \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{R^N} \rho dx$.

Розглянемо наступне поняття.

Означення 1: Будемо казати, що $\rho:\Omega\to R_+$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho>0$ м.с. на Ω, $\rho\in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1}\in L^1(\Omega)$, $\nabla\ln\rho\in L^2(\Omega;R^N)$ і існують стала $\hat{C}(\Omega)>0$ і підобласть $\Omega_*\subset\Omega$ така, що $\rho\in C^1\left(\overline{\Omega\setminus\Omega_*}\right)$, де $dist(\partial\Omega,\partial\Omega_*)>\delta$ при деякому $\delta>0$, і при цьому виконуються такі нерівності:

$$\rho(x)\ge\sigma \text{ на } \Omega\setminus\Omega_* \text{ при деякому } \sigma>0 \quad (9)$$

$$-\hat{C}(\Omega)\le-\Delta\ln\rho(x)-\frac{1}{2}|\nabla\ln\rho|_{R^N}^2<\frac{2\lambda_*}{|x|_{R^N}^2}. \quad (10)$$

Функція $V(x)=-\Delta\ln\rho(x)-\frac{1}{2}|\nabla\ln\rho|_{R^N}^2$ називається потенціалом Харді для вагової функції ρ. Перейдемо у варіаційній нерівності (6) до її еквівалентного опису. Для цього утворимо

$$M_1=\left\{\begin{array}{l}\eta\in L^2\left(0,\mathrm{T};W_0^{1,2}(\Omega)\right):\eta=\\ =\sqrt{\rho}y,\forall y\in M\subset L^2\left(0,\mathrm{T};W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)\end{array}\right\},$$

яка за побудовою та вихідними припущеннями є опуклою замкненою підмножиною простору $L^2\left(0,\mathrm{T};W_0^{1,2}(\Omega)\right)$. Крім того, елемент $\eta\in M_1$ успадковує властивості сліду вздовж межі області $\partial\Omega$ від елементу $y\in M$.

Розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{aligned}J(p,z)=\frac{1}{2}\|z-y_{ad}\|_{L^2(Q)}^2+\\ +\frac{1}{2}\|u\|_{L^2(Q)}^2\to\inf,\end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_0^T\int_\Omega\dot{w}(w-z)\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega(\nabla z,\nabla w-\nabla z)_{R^N}dxdt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega V(x)z(w-z)dxdt\ge$$
$$\ge\int_0^T\int_\Omega\frac{f}{\sqrt{\rho}}(w-z)\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega p(w-z)dxdt, \quad (12)$$
$$\forall w\in M_1,\dot{w}\in L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right),w(0,x)=0,$$

$$p\in P_\partial,\ z\in M_1, \quad (13)$$

$$z(0,x)=0,\ x\in\Omega, \quad (14)$$

де $p=\frac{u}{\sqrt{\rho}},V(x)=-\Delta\ln\rho-\frac{1}{2}|\nabla\ln\rho|_{R^N}^2$,

$$P_\partial:=\left\{p\in L^2(Q):\left\|p-\frac{u_o}{\sqrt{\rho}}\right\|_{L^2(Q)}\le L\right\}.$$

Регулярність задачі оптимального керування (11)-(14)

Покажемо, що у випадку коли $\rho:\Omega\to R$ є ваговою функцією потенціального типу, варіаційна нерівність (12) матиме принаймні один розв'язок при кожному допустимому керувані $p\in P_\partial$. Для цього скористаємося відомими результатами Ж.-Л. Ліонса (див. [1, Теорема 9.2, Теорема 9.4]), який стосується розв'язності параболічних варіаційних нерівностей.

Встановимо наступний результат.

Теорема 1. Нехай $\rho:\Omega\to R_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$ та $p\in P_\partial$ варіаційна нерівність (12) має єдиний розв'язок $z=z(p,f)\in M_1$.

Доведення. Покладемо

$$V=\left\{w\in W_0^{1,2}(\Omega):\int_\Omega\left(|\nabla w|_{R^N}^2-\frac{1}{2}v(x)w^2\right)dx<\infty\right\},$$

$H=L^2(\Omega)$ і покажемо, що в цьому випадку для нерівності (12) виконуються всі передумови теореми 9.4 із [1]. Залучаючи міркування з доведення теореми 3.2 із [5], будемо мати, що $V=W_0^{1,2}(\Omega)$. Тому, в силу теореми Реліха-Кондрашова, будемо мати наступні компактні вкладення: $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)\subset L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\subset\subset L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$. Зауважимо, що множина M_1 задовольняє умови Теореми 9.4 із [1].

Далі, пов'яжемо з нерівністю (12) оператор $B:L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)\to L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$, визначений за правилом:

$$\langle Bz,w\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}=\int_0^T\int_\Omega\left((\nabla z,\nabla w)_{R^N}-\right.$$
$$\left.-1/2V(x)zw\right)dxdt,\ w\in L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right). \quad (15)$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (9)-(10) та нерівність Харді-Пуанкаре, отримуємо: існують $C_1,C_2>0$:

$$\left|\left\langle Bz,w\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}\right| \le C_1 \|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \times \times\|w\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}, \tag{16}$$

$$\left\langle B(z-w), z-w\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \ge \ge C_2 \|z-w\|^2_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} > 0, \forall z \ne w \tag{17}$$

Отже, оператор B є обмеженим, строго монотонним. Тому оператор $B: L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$ є псевдомонотонним. Крім того, B є коерцитивним в сенсі $\dfrac{\left\langle Bz,z\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}}{\|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}} \to +\infty,$ $\|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \to +\infty.$

Для довільного елемента $w_0 \in M_1 \cap D\left(\Lambda, V_1^*\right)$, $V_1^* = L^2(0,T;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)$ згідно оцінок (24) та (25), будемо мати:

$$\left\langle Bz, z-w_0\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \ge \ge C_2\|z\|^2_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} - -C_1\|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \cdot \|w_0\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}.$$

Отже, при $\|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \to +\infty.$

$$\frac{\left\langle Bz, z-w_0\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}}{\|z\|_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}} \to +\infty.$$

Тому маємо потрібну коерцитивність в сенсі (9.9) із [1]. Зауважимо, що у випадку, коли $\Lambda = d/dt$ в умовах нашої задачі виконуються умови (9.6) та (9.18) із [1, Приклад 9.2 та Теорема 9.1] . Насамкінець оскільки $f/\sqrt{\rho} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ та $u/\sqrt{\rho} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, а простір $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ компактно вкладається в простір $L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$, то виконуються всі передумови Теореми 9.4 із [1]. Отже, варіаційна нерівність (12) має єдиний розв'язок $z \in M_1$ при кожному фіксованому допустимому керуванні $p \in P_\partial$. Теорема доведена.

Еквівалентність задач (5)-(8) та (11)-(14).

Далі введемо до розгляду наступні множини:

$$\Xi_1 = \left\{ \begin{array}{l} (u,y) \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)\times \\ \times L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right) \end{array} \right\},$$

де u та y пов'язані співвідношеннями (6)-(8),

$$\Xi_2 = \left\{ (p,z) \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \times L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right) \right\},$$

де p та z пов'язані співвідношеннями (12)-(14), які надалі будемо називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (5)-(8) та (11)-(14) відповідно.

Означення 2. Будемо казати, що пари функцій $\left(u^0,y^0\right) \in \Xi_1$ та $\left(p^0,z^0\right) \in \Xi_2$ є оптимальними розв'язками задач (7)-(10) та (13)-(16) відповідно, якщо:

$$\inf_{(u,y)\in\Xi_1} I(u,y) = I\left(u^0,y^0\right),$$

$$\inf_{(p,z)\in\Xi_2} J(p,z) = J\left(p^0,z^0\right).$$

Далі обгрунтуємо результат, що стосується еквівалентності (в певному сенсі) задач оптимального керування (5)-(8) та (11)-(14). Тому, маючи регулярність задачі (11)-(14) (див. Теорму 1), будемо мати регулярність вихідної задачі оптимального керування (5)-(8).

Теорема 2. Нехай $\rho: \Omega \to R_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$, $y_{ad} \in L^2(Q)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $\left(p^0,z^0\right) \in \Xi_2$ є оптимальною в задачі (11)-(14) в тому і тільки в тому випадку, коли

$$\left(u^0,y^0\right) := \left(\sqrt{\rho}\,p^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{18}$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (7)-(10) на множині Ξ_1. При цьому має місце рівність:

$$\inf_{(p,z)\in\Xi_2} J(p,z) = J\left(p^0,z^0\right) = = I\left(u^0,y^0\right) = \inf_{(u,y)\in\Xi_1} I(u,y). \tag{19}$$

Доведення. Пов'яжемо із варіаційною нерівністю (8) оператор $A: L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right) \to L^2\left(0,T;\left(\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)^*\right)$, що визначається наступним чином:

$$\left\langle Ay, v-y\right\rangle_{L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)} =$$

$$=\int_0^T\int_\Omega (\nabla y,\nabla v-\nabla y)_{R^N}\,\rho dxdt\ \forall v\in M.$$

Тут

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)} : L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)^*\right)\times \times L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)\to R$$

є операцією дуального спарювання елементів $L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)^*\right)$ та $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)$ відповідно.

Покажемо, що в умовах даної теореми виконується наступне співвідношення: $\left\langle A(Fz),Fv\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)}=\left\langle Bz,v\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}$, . де відображення F визначене вище, оператор

$$B:L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)\to L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$$

визначається за правилом

$$\left\langle Bz,v\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\left((\nabla z,\nabla v)_{R^N}-\frac{1}{2}V(x)zw\right)dxdt,$$

$$V(x)=-\Delta\ln\rho(x)-\frac{1}{2}\left|\nabla\ln\rho\right|_{R^N}^2,$$

і крім того, лінійний оператор B визначає ізоморфізм простору $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ в його дуальний простір $L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$. Отже, із [4] маємо, зокрема, що для z із деякої щільної підмножини в просторі $W_0^{1,2}(\Omega)$ елемент $z/\sqrt{\rho}\in W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)$ та $\nabla y=\nabla\left(z/\sqrt{\rho}\right)=1/\sqrt{\rho}\,(\nabla z-(z/2)\nabla\ln\rho)$. Беручи до уваги ці перетворення, той факт, що v для та z із $D_\rho\subset L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ маємо, що $Fz,Fv\in L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)$ та, враховуючи співвідношення для $V(x)$, та відповідні співвідношення із [4], будемо мати:

$$\left\langle A(Fz),Fv\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)}=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right),\nabla\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right)\right)_{R^N}\rho dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla z-\frac{z}{2}\nabla\ln\rho,\nabla v-\frac{v}{2}\nabla\ln\rho\right)_{R^N}dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega(\nabla z,\nabla v)_{R^N}\,dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega V(x)zvdxdt=$$

$$=\left\langle Bz,v\right\rangle_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}.$$

Тепер оскільки вагова функція ρ є функцією потенціального типу, то з нерівності Харді-Пуанкаре випливає еквівалентність норм $\left(\int_\Omega\left[\left|\nabla y\right|_{R^N}^2-\lambda\frac{y^2}{|x|_{R^N}^2}\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$ та $\left(\int_\Omega\left|\nabla y\right|_{R^N}^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ в просторі $W_0^{1,2}(\Omega)$, а відтак будемо мати еквівалентність відповідних норм в просторі $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)$, а це і означає, що оператор B визначає ізоморфізм між $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ та $L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*\right)$. Далі, із твердження 1 маємо, що $\forall v\in M$ існує елемент $w\in M_1$: $v=Fw:=\frac{w}{\sqrt{\rho}}$.

Одержуємо: $\int_0^T\int_\Omega\dot v(v-y)\rho dxdt=\int_0^T\int_\Omega\dot w(w-t)\rho dxdt,$

$$\int_0^T\int_\Omega f(v-y)dxdt=\int_0^T\int_\Omega\frac{f}{\sqrt{\rho}}(w-z)dxdt,$$

$$\int_0^T\int_\Omega u(v-y)dxdt=\int_0^T\int_\Omega p(w-z)dxdt.$$

Таким чином, приходимо до наступного висновку: $y\in M$ є розв'язком варіаційної нерівності (6) тоді й лише тоді, коли $z=\sqrt{\rho}y\in M_1$ є розв'язком варіаційної нерівності (12). Отже, розв'язки варіаційної нерівності (6) та (12) пов'язані співвідношенням $y=z/\sqrt{\rho}$.Тепер означимо в просторі $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$ відображення G за правилом $G(u)=\left(u/\sqrt{\rho}\right)$. Будемо мати, що для довільного керування $u\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$ виконується $p=G(u)$, де $\|u\|^2_{L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)}=\|p\|^2_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}$. Тому відображення G ізометрично відображає простір $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$ на простір $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

Більш того, умова (13) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u\in U_\partial\Leftrightarrow p=u/\sqrt{\rho}\in P_\partial$$

Таким чином, $(u,y)\in\Xi_1 \Leftrightarrow (p,z)\in\Xi_2$. А відтак має місце рівність (5) та (11) на відповідних допустимих парах, що гарантує виконання умови (19).

Розв'язність оптимізаційної задачі.

Теорема 3. Нехай $\rho:\Omega\to R_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$, $y_{ad}\in L^2(Q)$ є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування (5)-(8) має єдиний розв'язок $\left(u^0,y^0\right)$ в просторі $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)\times L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega,\rho dx)\right)$.

Доведення. За Теоремою 2 задачі (5)-(8) та (11)-(14) є еквівалентними. Тому для однозначної розв'язності задачі (5)-(8) достатньо показати, що задача (11)-(14) має єдиний розв'язок. Зауважимо, що має місце неперервна залежність розв'язку z від керування p в деякому сенсі, а саме, в силу коерцитивності оператора B, напівнеперервності знизу норми в просторі $L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)\right)$ відносно слабкої збіжності, компактності вкладення $L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)\right)\subset L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, відображення $p\mapsto z(p)$ простору $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ в $L^2\left(0,T;\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)\right)$ є слабко неперервним (дет. див [4]). Відмітимо, що функціонал якості строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\times L^2\left(0,T;\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)\right)$. Отже, за теоремами 1.1 та 1.2 із [2] існує єдина пара

$$\left(p^0,z^0\right)\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\times L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)$$

така, що $\left(p^0,z^0\right)\in\Xi_2$ і $J\left(p^0,z^0\right)=\inf_{(p,z)\in\Xi_2}J(p,z)$, тобто $\left(p^0,z^0\right)$ є оптимальною парою задачі (11)-(14). Таким чином, за теоремою 2, пара $\left(u^0,\mathrm{y}^0\right):=\left(\sqrt{\rho}\,p,z/\sqrt{\rho}\right)$ є єдиним оптимальним розв'язком задачі (5)-(8), що і потрібно було встановити.

Список використаних джерел

1. *Lions J.-L.* Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems / J.-L. Lions. - Paris:Dunod-Gauthier-Villars, 1969. – 588 p.
2. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations / J.-L. Lions. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 415 p.
3. *Vazquez J.L., Zuazua E.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential / J.L.Vazquez ,E. Zuazua // J. of Functional Analysis. – 2000. Vol. 173, - P. 103--153.
4. *Задоянчук Н.В., Купенко О.П.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування для вироджених еліптичних варіаційних нерівностей / Н.В. Задоянчук, О.П. Купенко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. - №4. – С. 10-23.
5. *Баланенко І.Г., Когут П.І.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння / І.Г. Баланенко, П.І. Когут // Вісник ДНУ. Серія Моделювання. – 2012. - №8. – С. 3-18.

References

1. LIONS,J.-L.(1969) *Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems.* Paris:Dunod-Gauthier-Villars.
2. LIONS,J.-L.(1971) *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equation.* Berlin: Springer-Verlag.
3. VAZQUEZ,J.L & ZUAZUA,E (2000) The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential. *J. of Functional Analysis.* 173. pp.103-153.
4. ZADOIANCHUK, N.V. & KUPENKO, O.P. (2013) Pro rozviaznist odnogo klasu zadach optymalnogo keruvannia dlia vyrodzhenih eliptychnih variatsiinyh nerivnostei. *J. of Computational & Applied Mathematics.* 4. pp. 10-23.
5. BALANENKO, I.G & KOGUT I.P. (2012) Pro odnu zadachu optimalnogo keruvannia dlia virodzhennogo parabolichnogo rivnyannia. *Visnik DNU. Seriya Modelyuvannya.* 8. pp. 3-18.

Надійшла до редколегії 28.08. 2014