УДК 539.375

Назаренко В.М.[1], *д.т.н., професор*
Кіпніс О.Л.[1], *аспірант*

Концентрація напружень біля кутової точки межі поділу середовищ у кусково-однорідній площині за наявності тріщини

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

V.M. Nazarenko[1], doctor of engineering, professor
A.L. Kipnis[1], graduat student

Stress concentration near the corner point of interface in piece-homogeneous plane with a crack

[1]S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv, Nesterova str, 3
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Методом Вінера – Гопфа побудовано точний розв'язок симетричної задачі про пружну рівновагу кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить внутрішню напівнескінченну навантажену тріщину. Досліджено поведінку напружень біля кутової точки.
Ключові слова: кутова точка, межа поділу середовищ, внутрішня напівнескінченна тріщин, метод Вінера – Гопфа.

An exact solution of symmetric problem on the elastic equilibrium of piece-homogeneous isotropic plane with the interface of media in the form the sides of angle, which contains an interior semi-infinite loaded crack is constructed. By the using of Mellin's integral transformation apparatus, the problem is reduced to the Wiener – Hopf functional equation in the complex plane strip which contains the imagine axis. The factorization of the functional equation coefficient is realized by the decomposing of the coefficient in two functions: the function which is factorized in gamma-functions and the function which is factorized by the using of Cauchy type integral properties. According to these factorizations, the exact solution of the Wiener – Hopf equation which expressed in Cauchy type integrals and gamma-functions is obtained. Based on the functional equation solution, stresses in the problem and the main terms of the stresses expansion in asymptotic series near the corner point are determined. The stress behavior near the corner point is investigated.
Key words: corner point, interface, interior semi-infinite crack, Wiener – Hopf method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. В літературі з механіки руйнування композитних матеріалів опублікована велика кількість праць, які присвячено плоским статичним задачам теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. При цьому о більшості з них вважається, що межа поділу середовищ є гладкою, у першу чергу, прямолінійною [1]. Але кутові точки негладкої межі поділу середовищ являють собою концентратори напружень. У відповідних задачах теорії пружності при наближені точки області до кутової точки межі поділу середовищ напруження прямують до нескінченності. Тому кожний з таких концентраторів напружень є надзвичайно небезпечним з точки зору можливості розриву суцільності біля нього і зародження тріщин, що виходять з нього, довжини яких значно менші за розміри тіла.

Викладене вище обґрунтовує актуальність проблеми дослідження задач механіки руйнування композитних матеріалів про тріщини у кусково-однорідних тілах з негладкою межею поділу середовищ.

В даній роботі розв'язано задачу такого класу та досліджено поведінку напружень біля кутової точки межі поділу середовищ.

Постановка задачі. Розглянемо кусково-однорідну ізотропну пружну площину з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка в одній з частин містить симетричну внутрішню напівнескінченну тріщину (Рис. 1). Береги тріщини знаходяться під дією нормального тиску, розподіленого за законом F/r^2, $r \geq l$ (F – задана додатна стала, що має розмірність сили).

© В. М. Назаренко, О.Л. Кіпніс, 2014

Крайові умови відповідної статичної симетричної задачі теорії пружності мають вигляд

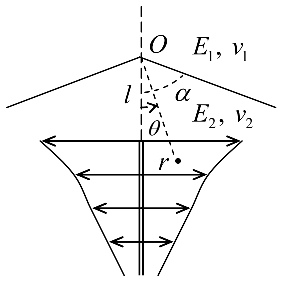

Рис. 1

$$\theta=\alpha,\ \langle\sigma_\theta\rangle=\langle\tau_{r\theta}\rangle=0,\ \langle u_\theta\rangle=\langle u_r\rangle=0; \tag{1}$$

$$\theta=0,\ \tau_{r\theta}=0;\ \theta=\pi,\ \tau_{r\theta}=0,\ u_\theta=0;$$

$$\theta=0,\ r<l,\ u_\theta=0;\ \theta=0,\ r>l,\ \sigma_\theta=-F/r^2. \tag{2}$$

($0\le\theta\le\pi$; $\langle a\rangle$ – стрибок a).

Метою роботи є аналіз поведінки напружень біля кутової точки.

$$\sigma_\theta^*(p,0)=\frac{\tilde{\Delta}(p)}{2\Delta_0(p)}\frac{E_2}{2(1-\nu_2{}^2)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}, \tag{3}$$

$$\Delta_0(p)=\left(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha\right)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]+\Big\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 p\pi-\left(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha\right)\times$$
$$\times\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]-\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\left(æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha\right)\Big\}e+$$
$$+\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\left(æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha\right)e^2,$$

$$\tilde{\Delta}(p)=-4\left(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha\right)\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]+\Big\{(1+æ_1)(1+æ_2)\sin 2p\pi+4\left(\sin^2 p\alpha-p^2\sin^2\alpha\right)\times$$
$$\times\left[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha\right]-\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\Big[(1+æ_1)(1+æ_2)-4\left(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha\right)\Big]\Big\}e+$$
$$+\left[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha\right]\Big[(1+æ_2)^2-4\left(æ_2\sin^2 p\alpha+p^2\sin^2\alpha\right)\Big]e^2,$$

$$e=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_o,\quad e_0=\frac{E_1}{E_2},\quad æ_{1,2}=3-4\nu_{1,2}$$

($-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – досить малі додатні числа).

Згідно з (2)

$$\sigma_\theta^*(p,0)=l^{p+1}\left[\Phi^-(p)+\frac{\sigma}{p-1}\right], \tag{4}$$

$$\frac{E_2}{2(1-\nu_2{}^2)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}=l^{p+1}\Phi^+(p),$$

$$\Phi^-(p)=\int_0^1\sigma_\theta(\rho l,0)\rho^p d\rho,$$

$$\Phi^+(p)=\frac{E_2}{2(1-\nu_2{}^2)}\int_1^\infty\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho,$$

$$\sigma=\frac{F}{l^2}.$$

Підставляючи (4) у (3), одержуємо наступне функціональне рівняння Вінера – Гопфа:

Рівняння Вінера – Гопфа та його розв'язок. Серед методів розв'язання задач механіки руйнування, які застосовуються у даний час [1 – 4], одним з ефективних є метод Вінера – Гопфа. Для побудови точного розв'язку задачі, що розглядається, будемо використовувати метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [5, 6].

Застосовуючи перетворення Мелліна

$$m^*(p)=\int_0^\infty m(r)r^p dr$$

до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і умов (1), приходимо до співвідношення, що зв'язує трансформанти $\sigma_\theta{}^*(p,0)$ і $\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}$

$$\Phi^-(p)+\frac{\sigma}{p-1}=\operatorname{ctg}p\pi\, G(p)\Phi^+(p), \tag{5}$$

$$G(p)=\frac{\tilde{\Delta}(p)\sin p\pi}{2\Delta_0(p)\cos p\pi}\quad\left(-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2\right).$$

За допомогою факторизацій

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)}\ (\operatorname{Re}p=0), \tag{6}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p), & \operatorname{Re}p<0\\ G^-(p), & \operatorname{Re}p>0\end{cases};$$

$$p\operatorname{ctg}p\pi=K^+(p)K^-(p),\ K^\pm(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція) рівняння (5) перепишемо так:

$$\frac{G^-(p)\Phi^-(p)}{K^-(p)}+\frac{\sigma G^-(p)}{(p-1)K^-(p)}=\frac{K^+(p)G^+(p)\Phi^+(p)}{p}$$
$$(\mathrm{Re}\, p=0). \qquad (7)$$

Справедливе представлення

$$\frac{\sigma G^-(p)}{(p-1)K^-(p)}=\frac{\sigma}{p-1}\left[\frac{G^-(p)}{K^-(p)}-\frac{G^-(1)}{K^-(1)}\right]+\frac{\sigma G^-(1)}{(p-1)K^-(1)}$$
$$(\mathrm{Re}\, p=0). \qquad (8)$$

Підставляючи (8) у (7), одержуємо

$$\frac{K^+(p)G^+(p)\Phi^+(p)}{p}-\frac{\sigma G^-(1)}{(p-1)K^-(1)}= \qquad (9)$$
$$=\frac{G^-(p)\Phi^-(p)}{K^-(p)}+\frac{\sigma}{p-1}\left[\frac{G^-(p)}{K^-(p)}-\frac{G^-(1)}{K^-(1)}\right] \text{(Rep=0).}$$

Функція в лівій частині (9) аналітична у півплощині $\mathrm{Re}\, p<0$, а функція в правій частині (9) аналітична у півплощині $\mathrm{Re}\, p>0$. На основі принципу аналітичного продовження ці функції дорівнюють одній і тій самій функції, що аналітична у всій площині p.

Виходячи з відомої асимптотики розв'язку біля кінця тріщини, за теоремою абелева типу одержуємо

$$\Phi^+(p)\sim\frac{K_I}{\sqrt{-2pl}},\ \Phi^-(p)\sim\frac{K_I}{\sqrt{2pl}} \quad (p\to\infty) \qquad (10)$$

(K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці тріщини).

З (6), (10) випливає, що функції у лівій і правій частинах (9) прямують до нуля при $p\to\infty$ у півплощинах $\mathrm{Re}\, p<0$ і $\mathrm{Re}\, p>0$ відповідно. За теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій площині p.

Таким чином, розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\Phi^+(p)=\frac{\sigma G^-(1)p}{K^-(1)(p-1)K^+(p)G^+(p)} \quad (\mathrm{Re}\, p<0), \qquad (11)$$
$$\Phi^-(p)=\frac{\sigma K^-(p)}{(p-1)G^-(p)}\left[\frac{G^-(1)}{K^-(1)}-\frac{G^-(p)}{K^-(p)}\right] \quad (\mathrm{Re}\, p>0).$$

Аналіз поведінки напружень біля кутової точки. Використовуючи (3), (4), (11) і формулу обернення Мелліна, знаходимо

$$\sigma_\theta(r,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma M(p)r^{-p-1}dp, \qquad (12)$$
$$M(p)=\frac{\sigma G^-(1)p\tilde{\Delta}(p)l^{p+1}}{2K^-(1)(p-1)\Delta_0(p)K^+(p)G^+(p)}$$

(γ – довільна пряма, яка лежить у смузі $-\varepsilon_1<\mathrm{Re}\, p<0$).

У смузі $-1\le\mathrm{Re}\, p<0$ підінтегральна функція у (12) має єдину особливість – простий полюс в точці $p=-\lambda_0-1$, де λ_0 – єдиний на інтервалі $]-1;0[$ корінь рівняння $\Delta_0(-\lambda-1)=0$. За теоремою про лишки

$$\sigma_\theta(r,0)=\Sigma r^{\lambda_0}+f(r) \quad (r\to 0),$$
$$\Sigma=\frac{\sqrt{\pi}\tilde{\Delta}(-\lambda_0-1)\Gamma(\lambda_0+3/2)G^-(1)}{4(\lambda_0+2)s_0\Gamma(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)}\frac{F}{l^{\lambda_0+2}},$$
$$s_0=\Delta_0'(-\lambda_0-1).$$

У цій формулі $f(r)\to 0$ при $r\to 0$; $\Delta_0'(p)$ – похідна функції $\Delta_0(p)$.

Залежність показника степеня сингулярності напружень λ_0 від кута α якісно зображено на рис. 2. Значення $\alpha^\circ_{\min 1}$, $\alpha^\circ_{\min 2}$ кута α, при яких функція $\lambda_0(\alpha)$ досягає свого найменшого значення на кожному з інтервалів $]0;\pi/2[$, $]\pi/2;\pi[$, а також значення $\lambda(\alpha_{\min 1})$, $\lambda(\alpha_{\min 2})$ наведено у табл. 1 ($\nu_1=\nu_2=$ 0,3). Деякі значення λ_0 наведено у табл.. 2.

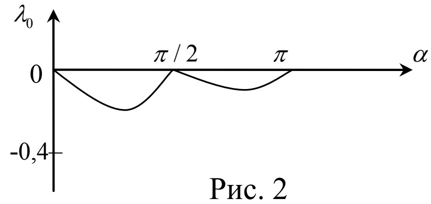

Рис. 2

e_0	2	3	5	10
$\alpha^\circ_{\min 1}$	$57{,}3^\circ$	$54{,}1^\circ$	$46{,}7^\circ$	$42{,}2^\circ$
$\lambda(\alpha_{\min 1})$	-0,1232	-0,1893	-0,2622	-0,3321
$\alpha^\circ_{\min 2}$	$152{,}6^\circ$	$155{,}8^\circ$	$163{,}4^\circ$	$168{,}3^\circ$
$\lambda(\alpha_{\min 2})$	-0,1204	-0,1801	-0,2474	-0,3181

Табл.1

Аналіз одержаних результатів дозволяє зробити наступні висновки. Кутова точка O є особливою точкою крайової задачі теорії пружності, що розглядається. Вона являє собою гострокінцевий концентратор напружень. При наближенні точки області до точки O напруження прямують до нескінченності.

Особливість напружень у точці O степенева. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієнтів Пуассона. Цей показник являє собою єдиний на інтервалі $]-1;0[$ корінь певного трансцендентного рівняння.

Зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ і від $\pi/2$ до π концентрація напружень біля кутової точки спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням відношення модулів Юнга, що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють $57{,}3^\circ$; $54{,}1^\circ$; $46{,}7^\circ$; $42{,}2^\circ$.

e_0 \ α°	15	30	45	60	75	105	120	135	150	165
2	-0,036	-0,075	-0,112	-0,112	-0,086	-0,025	-0,054	-0,089	-0,117	-0,104
3	-0,068	-0,132	-0,180	-0,184	-0,127	-0,037	-0,081	-0,130	-0,173	-0,168
5	-0,122	-0,232	-0,258	-0,248	-0,167	-0,049	-0,104	-0,168	-0,228	-0,241
10	-0,215	-0,310	-0,332	-0,308	-0,203	-0,059	-0,124	-0,202	-0,278	-0,318

Табл.2

Чим більше відрізняються матеріали (зі зростанням відношення модулів Юнга), тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки.

Зі зростанням відношення модулів Юнга гострий кут максимальної концентрації напружень зменшується, а тупий – збільшується.

.

Висновки. На основі одержаного в даній роботі точного розв’язку симетричної задачі про пружну рівновагу кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить внутрішню напівнескінченну навантажену тріщину, вивчено вплив зміни кута і пружних сталих на рівень концентрації напружень біля кутової точки.

Список використаних джерел

1. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. Т.1,2. – К.: Наук. думка, 1988.
2. *Guz A.N.* Stability of elastic bodies under uniform compression (Review)/ A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, №3. – P. 241 – 243.
3. *Guz A.N.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) / A.N. Guz, I.A. Guz, A.V. Men’shikov, V.A. Men’shikov /Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, №1. – P. 1 – 61.
4. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, №1. – P. 1 – 57.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
6. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

References

1. *Mekhanika razrusheniya i prochnost materialov: Spravochnoe posobie v 4 tomah. Tom 1,2 (1988).* Kiev: Nauka.
2. GUZ, A.N. (2012) Stability of elastic bodies under uniform compression (Review). *Int. Appl. Mech.* 48(3). p. 241-243.
3. GUZ, A.N., GUZ, I.A., MEN’SHIKOV, A.V. and MEN’SHIKOV, V.A. (2013) Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.* 49(1). p. 1- 61.
4. GUZ, A.N. (2014) Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.* 50(1). p. 1-57.
5. NOBL, B. (1962*) Primenenie metoda Winera – Hopfa dlya resheniia differentsialnikh uravneniy v chastnikh proizvodnikh.* Moskva: Izdatelstvo inostrannoyi literaturi.
6. UFLYAND, YA. (1967) *Integralnyie preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti.* Leningrad: Nauka.

Надійшла до редколегії 18.06.2014