

УДК 519.9

Горошко О. О.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Лебедева І. В.¹, к. ф.-м. н., доц.

Прецесійні рухи та сомоцентрування роторів

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: Lebedevai@ukr.net

O. O. Goroshko¹, Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
I. V. Lebedyeva¹, Candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor

Precession movements and self centering of rotors

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova St., 4e, e-mail: Lebedevai@ukr.net

Досліджуються вимушені прецесійні рухи ротора на нелінійних опорах, обумовлені дисбалансами ротора. Отримано нові результати з перебігу резонансних процесів та сомоцентрування ротора в умовах зовнішнього та внутрішнього тертя.

Ключові слова: ротор на нелінійних опорах, конічні вимушені прецесії, особливості сомоцентрування ротора.

Dynamics of machines, in particular, industrial centrifuges, constantly attracts designers of centrifuges of different purpose. The paper presents the results of investigations of rotor machines self-centering and precessions under conditions of static and dynamic imbalances. Frequencies of forced precessions of unbalanced rotor coincide with the frequencies of proper rotation. The damping of the rotor precessions is realized by external and internal friction. External friction is considered to be proportional to the precessions velocity (Newton friction). Internal friction in the materials of the rotor elastic fixing is presented by complex modulus of rigidity. The equations of conical and cylindrical precessions and center of mass motion of the rotor are determined by the theorems on center of mass motion and the change of angular momentum of the system. Inertia members of these equations are expressed in coordinates of the major central axis of inertia and elastic forces – by the coordinates of the axis of revolution. With the help of relations between the coordinates of the major central axis and the axis of proper rotation the equation of precessions and self-centering are presented in the coordinates of the axis of revolution of the rotor. On the base of analysis to the solutions to these equations it was found that at high speeds of the proper rotation the coordinates of the major central axis of inertia tend to zero, and the axis of proper revolution realizes cylindrical and conical precessions about the "fixed" major central axis of inertia (the self-centering of the rotor is realized). It was established that at high supercritical speeds the external friction factor is offset and the internal factor of friction remains unchanged. It was shown that the resonant peaks of precessions are inversely proportional to the frequencies and factors of damping.

Key Words: rotor on nonlinear bearings, tapered forced precession, features self-centering of the rotor.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Динаміка розбалансованих роторів постійно привертає увагу конструкторів роторних машин різного цільового призначення [3]. Узагальнення досліджень з цього питання проведено в роботах [1,2].

У роботі досліджуються динамічні процеси роторних машин, обумовлені дисбалансами та

зовнішніми періодичними силами з урахуванням дисипативних факторів. Метою роботи є вивчення перебігу резонансних циліндричних та конічних прецесій роторних машин, специфіки внутрішніх та зовнішніх дисипативних сил.

Ротор здійснює циліндричні та конічні прецесії на пружних лінійних опорах. Основним фактором збудження є розбалансованість ротора. Вимушені прецесії здійснюються на частотах

обертання ротора. Демпфування прецесій ротора реалізується зовнішнім та внутрішнім тертям. Зовнішнє тертя у даній роботі вважається пропорційним швидкостям прецесій (ньютонівське тертя). Внутрішнє тертя в матеріалах пружних опор представлено комплексним модулем жорсткості. Представлення внутрішнього тертя комплексними жорсткостями впливає безпосередньо з моделі стандартного реологічного тіла [4].

Рівняння прецесійних рухів та самоцентрування ротора

Статичний та динамічний дисбаланси ротора

Статичний та динамічний дисбаланси описуються ексцентриситетом e центра мас відносно осі обертання та перекосом δ осі обертання відносно головної центральної осі інерції ротора (рис.1) [5]. Дисбаланси в роторних центрифугах виникають також унаслідок несиметричного розподілу продукту фугування тощо. Кутом ε визначається положення площини перекосу ротора, $\varphi(t)$ -- закон власного обертання ротора.

Для дослідження прецесійних рухів та самоцентрування ротора необхідно визначити рухи осі обертання та головної центральної осі інерції. Кутові рухи цих осей описуються кутами Резаля. Координати осі обертання $\xi_0, \eta_0, \alpha_0, \beta_0$, головної центральної осі інерції - $\xi_C, \eta_C, \alpha_C, \beta_C$. Обмежимося вивченням руху довгого ($A > C$) симетрично закріпленого відносно центра мас ротора. Для координат осей мають місце кінематичні співвідношення

$$\begin{aligned} \xi_C &= \xi_0 + e \cos \varphi(t), & \alpha_C &= \alpha_0 + \delta \cos(\varphi(t) + \varepsilon), \\ \eta_C &= \eta_0 + e \sin \varphi(t), & \beta_C &= \beta_0 + \delta \sin(\varphi(t) + \varepsilon). \end{aligned} \quad (1)$$

У даній роботі сили та моменти зовнішнього тертя вважаються пропорційними швидкостям прецесій (ньютонівське тертя). Внутрішнє тертя в матеріалі опор представлено комплексними модулями жорсткості [4].

Рівняння руху ротора визначаються теоремами про рух центра мас та про зміну кінетичного моменту матеріальної системи [5]. При симетричному закріпленні ротора відносно центра мас у загальноприйнятій символіці [5] прецесійні рухи осі ротора описуються рівняннями

$$m\ddot{\xi}_0 + n\dot{\xi}_0 + c(1+ih)\xi_0 = m_0 e \omega^2 \cos \omega t,$$

$$m\ddot{\eta}_0 + n\dot{\eta}_0 + c(1+ih)\eta_0 = m_0 e \omega^2 \sin \omega t, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_0 + H\dot{\beta}_0 + n_1\dot{\alpha}_0 + c_1(1+ih)\alpha_0 &= \\ &= (A-C)\omega^2 \delta \cos(\omega t - \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta}_0 - H\dot{\alpha}_0 + n_1\dot{\beta}_0 + c_1(1+ih)\beta_0 &= \\ &= (A-C)\omega^2 \delta \sin(\omega t - \gamma). \end{aligned}$$

Тут n та n_1 -- коефіцієнти в'язкого зовнішнього тертя, $c(1+ih)$, $c_1(1+ih)$ -- комплексні жорсткості опор [4], введені для опису внутрішнього тертя, $\omega = \dot{\varphi}(t)$ -- кутова швидкість власного обертання ротора.

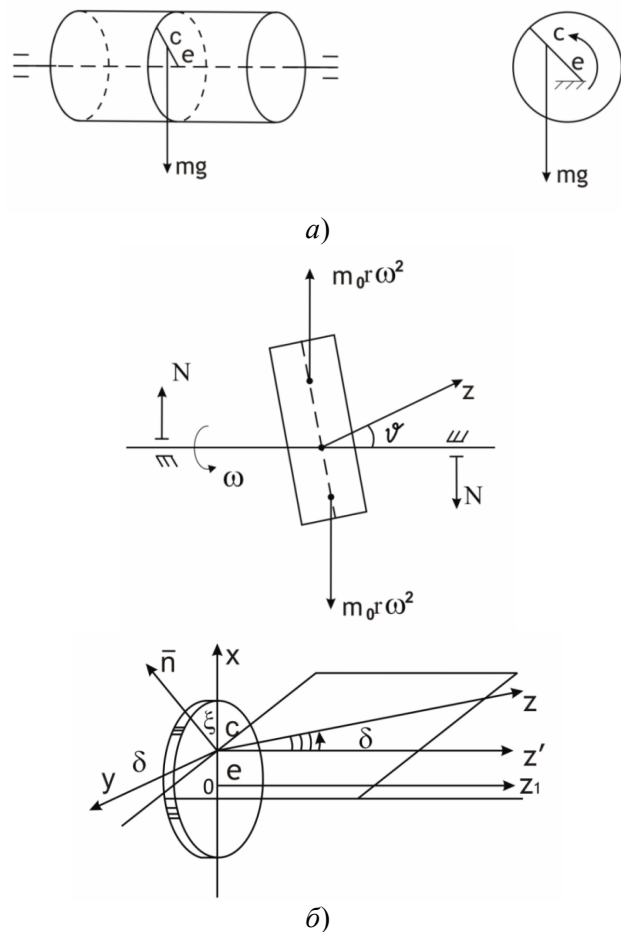


Рис.1. Статичний *а)* та динамічний *б)* дисбаланси ротора визначаються ексцентриситетом центра мас e , кутом перекосу δ та кутом ε , який задає орієнтацію площини перекосу.

Для спрощення опису руху ротора перейдемо до комплексних координат

$$\Phi_0 = \xi_0 + i\eta_0, \quad \Phi_1 = \alpha_0 + i\beta_0.$$

У комплексних координатах рівняння (2) записуються так:

$$m\ddot{\Phi}_0 + n_0\dot{\Phi}_0 + c(1+ih)\Phi_0 = me\omega^2 e^{i(\omega t + \gamma_2)}, \quad (3)$$

$$A\ddot{\Phi}_1 - iH\dot{\Phi}_1 + n_1\dot{\Phi}_1 + c_1(1+ih)\Phi_1 = (A-C)\omega^2 \delta e^{i(\omega t - \gamma_1)},$$

де фазові зсуви $\gamma_1 = \varepsilon + \psi_1$, $\gamma_2 = \varepsilon + \psi_2$ виникають під дією зовнішнього та внутрішнього тертя, $(A-C)$ – різниця осьових моментів інерції

У роботі обмежимося аналізом руху довгого ротора $(A-C) > 0$.

Представимо частинні розв'язки рівнянь (3), які описують вимушені прецесії ротора, у вигляді

$$\Phi_0 = B_0 e^{i(\omega t + \psi_2)}, \quad \Phi_1 = B_1 e^{i(\omega t - \varepsilon + \psi_1)}.$$

Для визначення амплітуд вимушених прецесій осі обертання B_0 і B_1 дістанемо рівняння

$$B_0(-m\omega^2 + i(n\omega + ch) + c) = em\omega^2 e^{-i\psi_2}, \quad (4)$$

$$B_1(-(A+C)\omega^2 + i(n_1\omega + c_1h) + c_1) = (A-C)\delta\omega^2 e^{-i\psi_1} B_0^{pez} = \frac{e\omega_2^2}{n + \omega_2 h}, \quad B_1^{pez} = \frac{A-C}{A+C} \frac{\omega_1^2 \delta}{n_1 + \omega_1 h}. \quad (9)$$

Дійсні та уявні частини рівнянь (4) мають вигляд

$$\begin{aligned} B_0(\omega_2^2 - \omega^2) &= e\omega^2 \cos \psi_2, \\ B_1(c_1 - (A+C)\omega^2) &= (A-C)\delta\omega^2 \cos \psi_1, \\ B_0(n\omega + \omega_2^2 h) &= -e\omega^2 \sin \psi_2, \\ B_1(n_1\omega + h_1\omega^2) &= -(A-C)\delta\omega^2 \sin \psi_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Зсуви фаз ψ_1 та ψ_2 визначаються формулами

$$\operatorname{tg} \psi_2 = -\frac{n\omega + \omega_2^2 h}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{n_1\omega + \omega_1^2 h}{c_1 - (A+C)\omega^2}. \quad (6)$$

З рівнянь (4) для амплітуд циліндричної та конічної прецесій отримасмо вирази

$$\begin{aligned} B_0(\omega) &= \frac{e\omega^2}{(\omega_2^2 - \omega^2) + i(n\omega + \omega_2^2 h)} e^{-i\psi_2} \\ B_1(\omega) &= \frac{(A-C)\delta\omega^2}{-(A+C)\omega^2 + c_1 + i(n_1\omega + c_1 h)} e^{-i\psi_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Власні частоти прецесії обчислюються за формулами

$$\omega_2^2 = \frac{c}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{A+C}.$$

Представимо формули (7) у вигляді

$$B_0(\omega) = e\omega^2 \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) - i(n\omega + \omega_2^2 h)}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (n\omega + \omega_2^2 h)^2} \cos \psi_2, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B_1(\omega) &= \\ &= \frac{(A-C)\delta\omega^2 [(\omega_1^2 - \omega^2) - i(\tilde{n}_1\omega + \omega_1^2 h)]}{(A+C)[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + i(\tilde{n}_1\omega + \omega_1^2 h)^2]} \cos \psi_1. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \tilde{n}_1 = \frac{n_1}{A+C}.$$

Дійсні частини рівнянь (8) описують модулі амплітуд прецесій – уявні декременти. На рис.2 зображені амплітудні криві прецесій та перебігів самоцентрування роторів.

Для резонансних значень швидкостей власного обертання ротора $\omega_{pez}^2 = \omega_0^2$ та $\omega_{pez}^2 = \omega_1^2$ резонансні піки набувають таких значень

При високих закритичних швидкостях демпфуючий фактор зовнішнього тертя нівелюється, а внутрішнє залишається незмінним.

Для зсувів фаз ψ_1 та ψ_2 при закритичних значеннях ω^2 мають місце такі оцінки $\psi_2 \rightarrow O\left(\frac{1}{\omega}\right)$, $\psi_1 \rightarrow O\left(\frac{1}{\omega}\right)$.

На рис.2 зображені резонансні криві циліндричних та конічних прецесій та процеси самоцентрування роторів, побудовані за розв'язками (9).

Зі співвідношень (1) амплітуди відповідних прецесій головної центральної осі інерції визначаються такими рівняннями

$$B_{0c}(\omega) = B_0(\omega) + e, \quad B_{01} = B_1(\omega) + \delta. \quad (10)$$

Рівняння (10) описують резонансні процеси та самоцентрування осі обертання ротора. При низьких початкових і високих закритичних швидкостях власного обертання ω амплітуди прецесій набувають таких значень

$$\begin{aligned} B_0(0) &= 0, \quad B_0(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow -e, \\ B_1(0) &= 0, \quad B_1(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow -\delta, \\ B_{0c}(0) &= e, \quad B_{01}(0) = \delta, \\ B_{0c}(\omega \rightarrow \infty) &= 0, \quad B_{01}(\omega \rightarrow \infty) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

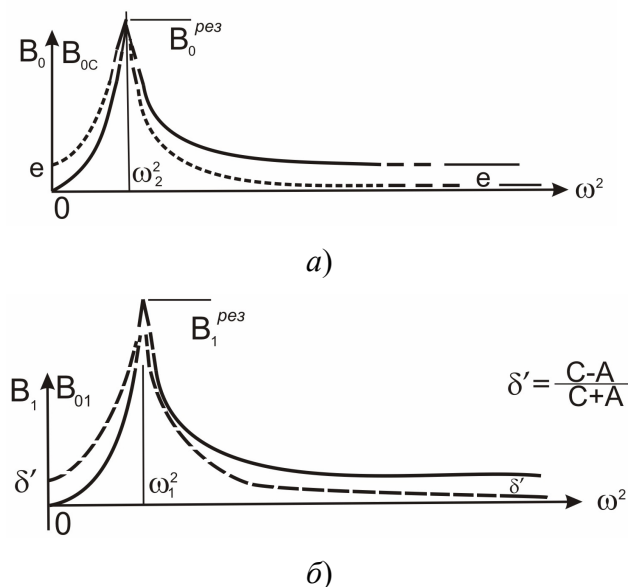


Рис.2. Прецесії та самоцентрування ротора на пружних опорах за наявності внутрішнього та зовнішнього тертя. Суцільні криві - амплітуда прецесії осі власного обертання; штрихові криві - амплітуда прецесії головної центральної осі інерції (а) циліндричні прецесії, б) конічні прецесії).

При високих швидкостях власного обертання ротора ($\omega \rightarrow \infty$) координати головної центральної осі інерції прямують до нульових значень, а вісь обертання здійснює циліндричну та конічну прецесії навколо головної центральної осі інерції. Це явище дістало назву «самоцентрування роторів при високих швидкостях власного обертання» [5].

Отримані результати можуть бути використані для вибору робочих режимів промислових центрифуг [3].

Висновки

Встановлено такі закономірності перебігів циліндричних та конічних прецесій та самоцентрування роторів за наявності дисбалансів та дисипації енергії.

1. При дисбалансному збудженні висоти резонансних піків прецесій пропорційні резонансним частотам та обернено пропорційні декрементам. При високих частотах збудження роль внутрішнього тертя перебігах резонансів зводиться нанівець, а зовнішнє тертя у формуванні декрементів залишається незмінним.

2. Отримано значення резонансних піків циліндричної та конічної прецесій.

3. При високих закритичних швидкостях реалізується самоцентрування роторів: амплітуди прецесійних рухів головної центральної осі інерції прямують до нуля, а амплітуди рухів осі обертання – до від’ємних значень ексцентриситетів та перекосів незалежно від рівня внутрішніх та зовнішніх дисипативних сил.

4. Для сферичних роторів ($A=C$) вимушені прецесії не збуджуються і самоцентрування ротора відсутнє.

Список використаних джерел

1. Філімоніхін Г. Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Філімоніхін Г. Б. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. Кельзон А. С. Динамика роторов в упругих опорах / Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И. – М.: Наука, 1982. – 278 с.
3. Лукьяненко В.М. Промышленные центрифуги / Лукьяненко В.М., Таранец А.В. – М.: Химия, 1974. – 376 с.
4. Нашиф А. Демпфирование колебаний / Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
5. Горошко О. О., Лебедева І.В. Теорія гіроскопічних систем : Навчальний посібник / – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 131 с.

References

1. FILIMONICHIN, G.B., (2004) *Zrивnovazhennya i vibrozahyst rotoriv avtobalansyramy z tverdymy koryguval'nymy vantazhamy*. Kirovograd: KNTU.
2. KEL'ZON, A.S., TSIMANSKIY, U.P. and YAKOVLEV, V.I. (1982) *Dinamika rotorov v uprugikh oporakh*. M.: Nauka.
3. LUKIYANENKO, V.M. and TARANETS, A.V. (1974) *Promyshlennyye tsentrifugi*. M.: Khimiya.
4. NASHIF, A., JOHNES, D., HENDERSON J.(1988) *Vibration Damping* – N.Y.:J. Wiley & Sons,.
5. GOROSHKO, O.O. and LEBEDYEVA, I.V. (2013) *Teoriya giroskopichnykh system*. Kiev: KU.

Надійшла до редколегії 28.11. 2014