УДК 539.3

Острик В. І.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Улітко А. Ф.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України

Аналогія між неосесиметричною деформацією та крученням у контактних задачах для півпростору

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

V. I. Ostryk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. F. Ulitko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU

Analogy between the nonaxisymmetric strain and torsion in the contact problems for a half-space

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Виявлено математичну аналогію між задачею Абрамова про гладкий контакт кругового штампа з плоскою похилою основою і пружного півпростору та задачею Рейсснера – Сагоци про кручення пружного півпростору жорстко з'єднаним з ним круговим штампом. Аналогія між цими задачами полягає у співпадінні диференціальних рівнянь і змішаних крайових умов на межі півпростору, що веде також до співпадіння інтегральних рівнянь вказаних контактних задач. Напруження та переміщення виражаються через розв'язувальну функцію по-різному. Наводиться розв'язання задач методом Вінера – Гопфа. Знайдено як контактні напруження, так і переміщення та напруження всередині півпростору.

Ключові слова: контакт, кручення, пружний півпростір, штамп.

Mathematical analogy between V. Abramov's problem of the smooth contact of circular punch with a flat sloping base on the elastic half-space and the E. Reissner – H. Sagocci's problem of the torsion of elastic half-space under the rigidly connected round stamp has been uncovered. The analogy between these problems lies in the coincidence of differential equations and mixed conditions at the half-space's boundary, what leads also to the coincidence of integral equations of mentioned contact problems. In the first case the resolving harmonic function is the principal radial factor multiplied by the cosine of angular coordinate. In the second case such harmonic function is the circular displacement. Stresses and displacement in these two problems are expressed through the resolving function in differen way.

Solutions of problems are given by the Wiener – Hopf's method using Mellin's integral transform in spherical coordinates. Stresses in the contact zones and stresses and displacements inside the half-space are found. Let us notice, that stresses in the contact zones of the half-space were previously determined by V. Abramov, E. Reissner, and H. Sagocci by the use of dual integral equations, tension and displacement from torsion were given by I. Sneddon and N. A. Rostovtsev, but in the V. Abramov's problem they were not fully defined.

Key Words: contact, torsion, elastic half-space, stamps.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Неосесиметрична задача про гладкий контакт кругового штампа з плоскою похилою основою і пружного півпростору вперше розв'язана В. М. Абрамовим [1] методом парних інтегральних рівнянь із застосуванням інтегрального перетворення Ганкеля у циліндричних координатах. Визначено розподіл контактного тиску уздовж основи штампа, а також вертикальні переміщення та нормальні напруження всередині півпростору, виражені в еліптичних координатах. Інших компонентів вектора переміщень і тензора напружень не було знайдено.

Контактний тиск визначено Е. Рейсснером і Х. Сагоци в іншій контактній задачі – про кручення пружного півпростору жорстко з'єднаним з ним круговим штампом [2]. Повний розв'язок задачі Рейсснера – Сагоци із визначенням переміщень та напружень всередині півпростору знайдено І. Снеддоном [3] і Н. А. Ростовцевим [4].

Як буде показано нижче, між задачами Абрамова і Рейсснера – Сагоци існує математична аналогія. Тут ми будуємо повні розв'язки обох задач із застосуванням методу Вінера – Гопфа [5].

Розв'язання неосесиметричної контактної задачі для півпростору методом Вінера – Гопфа

Вперше застосування методу Вінера – Гопфа до визначення контактного тиску в осесиметричній задачі гладкого контакту кругового штампа з пружним півпростором здійснено Г. Я. Поповим [6]. Іншими методами контактна задача для півпростору розв'язувалась у роботах [7-9] та інших.

Надамо розв'язання методом Вінера – Гопфа неосесиметричної контактної задачі для півпростору у випадку кругової області контакту. На відміну від підходу роботи [6], де для виведення інтегрального рівняння задачі застосовувалось інтегральне перетворення Ганкеля у циліндричних координатах, використаємо інтегральне перетворення Мелліна у сферичних координатах.

З пружним півпростором $z \ge 0$ зв'яжемо декартову (x, y, z), циліндричну (r, φ, z) та сферичну $(\rho, \vartheta, \varphi)$ системи координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$, $r = \rho\sin\vartheta$).

Нехай штамп кругової циліндричної форми (a – радіус поперечного перерізу циліндра), основа якого задається рівнянням $z = f_0(r, \varphi)$, вдавлюється на деяку відстань δ нормальною силою P в пружний півпростір. В умовах гладкого контакту змішані крайові умови задачі мають вигляд

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\delta + f_0(r, \varphi) \quad (0 \le r \le a),$$
$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (a < r < \infty),$$
$$\tau_{\rho\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \quad \tau_{\varphi\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (0 < r < \infty). \tag{1}$$

Крім того, виконується умова рівноваги

$$\iint\limits_{r \le a} \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} r\,dr\,d\varphi = -P. \tag{2}$$

В області контакту $0 \le r < a$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $\vartheta = \pi/2$ введемо невідому функцію контактного тиску

$$p(r, \varphi) = -\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}, \tag{3}$$

де G – модуль зсуву, та розвинемо всі напруження та переміщення разом із функціями $f_0(r, \varphi)$, $p(r, \varphi)$ у ряди Фур'є за окружної координатою, наприклад,

$$f_0(r, \varphi) = f_0^{(0)}(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[f_0^{(1m)}(r)\cos m\varphi + f_0^{(2m)}(r)\sin m\varphi\right]. \tag{4}$$

Як відомо [9], переміщення та напруження у випадку відсутності дотичних напружень на межі півпростору виражаються через одну гармонічну функцію Φ за формулами

$$u_r = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} - z\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad u_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$
$$u_z = 2(1-\nu)\Phi - z\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\sigma_r}{2G} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},$$
$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{z}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$
$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = -z\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}, \quad \frac{\tau_{r\varphi}}{2G} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right) - z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right),$$
$$\frac{\tau_{\varphi z}}{2G} = -\frac{z}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\partial z}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} \equiv (1-2\nu)\Phi, \tag{5}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

На підставі (5) крайові умови (1) набувають вигляду

$$2(1-\nu)\Phi^{(jm)}\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\delta_{0m}\delta + f_0^{(jm)}(r) \quad (0 \le r \le a),$$
$$\partial\Phi^{(jm)}/\partial\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (a < r < \infty), \tag{6}$$

де δ_{0m} – символ Кронекера, $f_0^{(j0)}(r) \equiv f_0^{(0)}(r)$. Тут і далі $j = 1, 2$; $m = 0, 1, \ldots$. Кожний із доданків розвинення функції Φ у ряд Фур'є задовольняє рівняння Лапласа:

$$\nabla^2\Phi^{(1m)}\cos m\varphi = 0, \quad \nabla^2\Phi^{(2m)}\sin m\varphi = 0. \tag{7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Мелліна, отримаємо інтегральне подання

$$\Phi^{(jm)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_{jm}(s)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s}ds,$$
$$A_{jm}(s) = \frac{\Gamma((s-m)/2)\Gamma((1-s-m)/2)}{2^{m+1}\sqrt{\pi}}\tilde{p}^{(jm)}(s),$$
$$\tilde{p}^{(jm)}(s) = \int_0^a p^{(jm)}(y)y^s dy \quad (0 < c < 1), \tag{8}$$

де $P_{s-1}^m(\cos\vartheta)$ – приєднана функція Лежандра [10], яке задовольняє другу умову (6). Звідси

$$\Phi^{(jm)}\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma((s-m)/2)\Gamma((1-s-m)/2)\tilde{p}_m(s)}{\Gamma((1+s-m)/2)\Gamma(1-(s+m)/2)}r^{-s}ds. \tag{9}$$

Увівши до розгляду оператори

$$L_{2n} = -D_{-2n}\frac{D_{2n-1}}{D_1}D_{1-2n}^{-1}\prod_{k=1}^{n-1}D_{-2k}D_{2k}^{-1}D_{2k-1}D_{1-2k}^{-1},$$

$$L_{2n-1} = D_{1-2n} \prod_{k=1}^{n-1} D_{2k} D_{-2k}^{-1} D_{1-2k} D_{2k-1}^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$D_k\, u(r) = -r^{k+1} \frac{d}{dr}\left(\frac{u(r)}{r^k}\right),$$

$$D_k^{-1} u(r) = -r^k \int_0^r \frac{u(r)}{r^{k+1}} dr \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad (10)$$

із (9) матимемо

$$L_{2n}\, \Phi^{(j,2n)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{K(is)}{s+1} \tilde{p}_{2n}(s) r^{-s} ds,$$

$$L_{2n-1}\, \Phi^{(j,2n-1)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{K(is)} \tilde{p}_{2n-1}(s) r^{-s} ds,$$

$$K(is) = \frac{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)} \quad (n = 1, 2, \dots). \ (11)$$

Підставивши в (11) функції $\tilde{p}^{(jm)}(s)$ із (8), виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = ae^{-\xi}, \quad y = ae^{-\eta},$$

$$\phi^{(jm)}(\eta) = p^{(jm)}(ae^{-\eta})e^{-\eta} \quad (0 < \eta < \infty), \qquad (12)$$

змінивши порядок інтегрування та змістивши у внутрішньому інтегралі контур інтегрування на дійсну вісь, знайдемо

$$L_m\, \Phi^{(jm)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = a\int_0^\infty k_m(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta) d\eta,$$

$$k_m(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$K_{2n}(\tau) = \frac{K(\tau)}{1-i\tau}, \quad K_{2n-1}(\tau) = \frac{1}{K(\tau)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$L_0 = -D_0, \quad K_0(\tau) = K(\tau). \qquad (13)$$

Задовольнивши першу крайову умову (6) після дії на неї оператором L_m, отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k_m(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta) d\eta = f^{(jm)}(\xi) \quad (0 < \eta < \infty), \ (14)$$

$$f^{(jm)}(\xi) = \frac{1}{2(1-\nu)a} L_m f_0^{(jm)}(r), \quad r = ae^{-\xi}.$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (14) методом Вінера – Гопфа [5] розповсюдимо його на всю числову вісь, поклавши $\phi^{(jm)}(\eta) = 0$ при $\eta \le 0$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши невідомі функції

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \phi^{(jm)}(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^\infty k(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta) d\eta, \quad (15)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо функціональне рівняння

$$K_m(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-),$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f^{(jm)}(\xi) e^{iz\xi} d\xi. \qquad (16)$$

Факторизуємо коефіцієнт $K_m(z)$ рівняння (16), тобто подамо його у вигляді

$$K_m(z) = K_m^+(z) K_m^-(z), \qquad (17)$$

де функції $K_m^+(z)$ і $K_m^-(z)$ є аналітичними та не обертаються в нуль у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ відповідно. Маємо

$$K_{2n}^+(z) = K^+(z)\big/(1-iz), \quad K_{2n}^-(z) = K^-(z),$$

$$K_{2n-1}^\pm(z) = 1\big/K^\pm(z) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$K^+(z) = \frac{\Gamma(1-iz/2)}{\Gamma(1/2-iz/2)}, \quad K^-(z) = \frac{\Gamma(1/2+iz/2)}{\Gamma(1+iz/2)}. \ (18)$$

З урахуванням (17) рівняння (16) запишемо так:

$$K_m^+(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z)\big/K_m^-(z) = F^+(z)\big/K_m^-(z), \ (19)$$

а після подання правої частини рівняння (19) різницею аналітичних функцій:

$$F^+(z)\big/K_m^-(z) = f^+(z) - f^-(z),$$

$$f^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic^\pm}^{\infty+ic^\pm} \frac{F^+(\zeta)}{K_m^-(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (20)$$

перетворимо до наступного вигляду:

$$K_m^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \Phi^-(z)\big/K_m^-(z) - f^-(z). \ (21)$$

Функції, які являють собою ліву і праву частину рівності (21), є аналітичним продовженням одна одної на всю комплексну площину. Із оцінок на нескінченності

$$K^+(z) = O(\sqrt{z}), \ K_m^+(z) = O(1/\sqrt{z}), \ \Phi^+(z) = o(1),$$

$$f^+(z) = O(1/z), \ |z| \to \infty, \qquad (22)$$

заключаємо ця єдина аналітична у всій комплексній площині функція є довільною сталою C, якщо $m = 0$, і тотожно дорівнює нулеві при $m = 1, 2, \dots$. Звідси отримуємо розв'язок функціонального рівняння (16):

$$\Phi^+(z) = \left[f^+(z) + \delta_{0m} C\right]\big/K_m^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = K_m^-(z)\left[f^-(z) + \delta_{0m} C\right]. \qquad (23)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (14) знаходимо оберненим перетворенням Фур'є першої рівності (15) з урахуванням розв'язку (23):

$$\phi^{(jm)}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{+}(t)+\delta_{0m}C}{K_m^{+}(t)}e^{-it\xi}dt\,. \qquad (24)$$

Після цього з використанням замін (12) визначаємо функцію контактного тиску із (3), а сталу C отримуємо із умови рівноваги (2). За формулами (5), (8) знаходимо переміщення та напруження у кожній точці півпростору.

Задача Абрамова

У цій контактній задачі для півпростору круговий штамп має плоску похилу основу так, що $f_0(r,\varphi)=Bx$, $x=r\cos\varphi$, де $B=\mathrm{tg}\,\varepsilon$, ε – кут нахилу плоскої основи штампа до недеформованої межі півпростору.

У розвиненні (4) відмінним від нуля є тільки коефіцієнт $f_0^{(11)}(r)=Br$. Тоді, наприклад, переміщення u_ϑ подамо у вигляді $u_\vartheta=u_\vartheta^{(0)}+u_\vartheta^{(11)}\cos\varphi$, тобто суми осесиметричної $u_\vartheta^{(0)}$ і неосесиметричної $u_\vartheta^{(11)}\cos\varphi$ складових. Аналогічно подамо всі інші компоненти переміщень та напружень у півпросторі.

В інтегральному рівнянні (14) маємо $f^{(j0)}(\xi)\equiv$ $\equiv f^{(0)}(\xi)\equiv 0$, $f^{(11)}(\xi)=-\frac{B}{1-\nu}e^{-\xi}$. Тоді згідно з розв'язком (24) знаходимо

$$\phi^{(j0)}(\xi)\equiv\phi^{(0)}(\xi)=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\xi}}{K^{+}(t)}dt\,,$$

$$\phi^{(11)}(\xi)=-\frac{B}{\sqrt{\pi^3}(1-\nu)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-it)K_1^{+}(t)}e^{-it\xi}dt\,. \qquad (25)$$

Розвинувши інтеграли із (25) у ряди за теорією лишків, отримуємо

$$\phi^{(j0)}(\xi)=\frac{4C}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}e^{-2k\xi}=\frac{2\sqrt{2}\,Ce^{-\xi}}{\sqrt{1-e^{-2\xi}}}\,,$$

$$\phi^{(11)}(\xi)=4e^{-2\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}e^{-2k\xi}=\frac{4\sqrt{\pi}e^{-2\xi}}{\sqrt{1-e^{-2\xi}}}\,, \qquad (26)$$

а врахувавши заміни (12), знаходимо функцію контактного тиску [1]:

$$p(r,\varphi)=p^{(0)}(r)+p^{(11)}(r)\cos\varphi=$$
$$=\left(\frac{P}{4\pi Ga}-\frac{2B}{\pi(1-\nu)}r\cos\varphi\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,, \qquad (27)$$

причому значення $C=P/8\sqrt{2}\,\pi Ga^2$ визначене із умови рівноваги (2).

За формулами (8) маємо

$$\Phi^{(0)}\equiv\Phi^{(j0)}=\frac{P}{8Ga}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{P_{s-1}(\cos\vartheta)}{s\cos(\pi s/2)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-s}ds\,,$$

$$\Phi^{(11)}=\frac{Ba}{1-\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{P_{s-1}^{1}(\cos\vartheta)}{(s^2-1)\sin(\pi s/2)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-s}ds\,. \qquad (28)$$

Обчисливши інтеграли за теорією лишків з використанням суми ряду [10]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad (29)$$

і перейшовши до циліндричних координат, знайдемо

$$\Phi^{(0)}=\frac{P}{4\pi Ga}\mathrm{Re}\,A\,,\quad \Phi^{(11)}=\frac{B}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Re}\left(\frac{a-iz}{r}R-rA\right),$$

$$A=\arcsin\frac{a+iz}{r}\,,\quad R=\sqrt{r^2-(a+iz)^2}\,. \qquad (30)$$

За формулами (5) визначаємо переміщення та напруження у кожній точці півпростору:

$$u_r^{(11)}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left\{\left[1-2\nu+\frac{iz}{r^2}\Big(\nu a-(1-\nu)iz\Big)\right]R-\right.$$
$$\left.-\frac{1-2\nu}{3r^2}\Big(R^3-ia^3\Big)-\frac{iaz}{R}+(1-\nu)izA\right\},$$

$$u_\varphi^{(11)}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left[\frac{iz}{r^2}\Big(\nu a-(1-\nu)iz\Big)R+\right.$$
$$\left.+\frac{1-2\nu}{3r^2}\Big(R^3+ia^3\Big)-(1-\nu)izA\right],$$

$$u_z^{(11)}=\frac{2B}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{(1-\nu)a+\nu iz}{(1-\nu)r}R+\frac{iaz(a+iz)}{(1-\nu)rR}-rA\right),$$

$$\frac{\sigma_z^{(11)}}{2G}=\frac{2Br}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{R}-\frac{iaz}{R^3}\right),$$

$$\frac{\sigma_r^{(11)}}{2G}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left\{\frac{2}{3r^3}\Big[(1+\nu)r^2-(1-2\nu)a^2-\right.$$
$$\left.-(2-\nu)iz(a-iz)\Big]R+\frac{a(a+iz)+z^2}{rR}+\frac{ariz}{R^3}\right\},$$

$$\frac{1}{2G}\left(\sigma_z^{(11)}+\sigma_r^{(11)}+\sigma_\varphi^{(11)}\right)=\frac{4(1+\nu)B}{\pi(1-\nu)r}\mathrm{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right),$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(11)}}{2G}=-\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left[\frac{a+iz}{R}\left(\frac{iz}{r^2}-\frac{a}{R^2}\right)\right],$$

$$\frac{\tau_{r\varphi}^{(11)}}{2G}=-\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\mathrm{Im}\left(\frac{1-2\nu}{3r^3}R^3-\frac{iaz}{rR}+\frac{2i}{3}(1-2\nu)\frac{a^3}{r^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-2\nu)a(a+iz)+iz(a-iz)}{r^3}R\right),$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}^{(11)}}{2G}=\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)r^2}\mathrm{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right). \qquad (31)$$

Позначивши

$$\sqrt{r^2-(a+iz)^2}=R_1e^{-i\varphi_0}\,,\quad a+iz=R_0e^{i\vartheta_0}\,, \qquad (32)$$

залежності (31) також подамо у вигляді

$$u_r^{(11)} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left[\left(1-2\nu+(1-\nu)\frac{z^2}{r^2}\right)R_1\sin\varphi_0 + \right.$$

$$+az\left(\frac{1}{R_1}-\nu\frac{R_1}{r^2}\right)\cos\varphi_0 - \frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R_1^3\sin 3\varphi_0 + a^3\right) -$$

$$\left. -(1-\nu)z\cdot\mathrm{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right],$$

$$u_\varphi^{(11)} = \frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left\{\frac{zR_1}{r^2}\left[\nu a\cos\varphi_0 - (1-\nu)z\sin\varphi_0\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R_1^3\sin 3\varphi_0 - a^3\right) - (1-\nu)z\cdot\mathrm{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right\},$$

$$u_z^{(11)} = \frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left\{\frac{R_1}{r}\left[(1-\nu)a\cos\varphi_0 + \nu z\sin\varphi_0\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{azR_0}{rR_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0) - (1-\nu)r\cdot\mathrm{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right\},$$

$$\frac{\sigma_z^{(11)}}{2G} = \frac{2Br}{\pi(1-\nu)R_1}\left(\sin\varphi_0 - \frac{az}{R_1^2}\cos 3\varphi_0\right),$$

$$\frac{\sigma_r^{(11)}}{2G} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{2}{3}\left(1+\nu-(1-2\nu)\frac{a^2}{r^2}-\frac{z^2}{R_1^2}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{R_1}{r}\sin\varphi_0 + \frac{2}{3}(2-\nu)\frac{z}{r^3}R_0R_1\cos(\vartheta_0+\varphi_0) -$$

$$\left. -\frac{aR_0}{rR_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0) - \frac{arz}{R_1^3}\cos 3\varphi_0\right],$$

$$\frac{1}{2G}\left(\sigma_z^{(11)}+\sigma_r^{(11)}+\sigma_\varphi^{(11)}\right) =$$

$$-\frac{4(1+\nu)B}{\pi(1-\nu)r}\left(R_1\sin\varphi_0 - \frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right),$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(11)}}{2G} = -\frac{2BzR_0}{\pi(1-\nu)R_1}\left(\frac{z}{r^2}\cos(\vartheta_0+\varphi_0) - \frac{a}{R_1^2}\sin(\vartheta_0+3\varphi_0)\right),$$

$$\frac{\tau_{r\varphi}^{(11)}}{2G} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)r^3}\left\{\frac{1-2\nu}{3}\left(2a^3 - R_1^3\sin 3\varphi_0\right) + R_0R_1\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1-2\nu)a\sin(\vartheta_0-\varphi_0) + z\cos(\vartheta_0+\varphi_0)\right] - \frac{az}{R_1}r^2\cos\varphi_0\right\},$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}^{(11)}}{2G} = -\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)r^2}\left(R_1\sin\varphi_0 - \frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right). \quad (33)$$

Вирази для переміщень та напружень осесиметричної складової розв'язку можна знайти в [3].

Задача Рейсснера – Сагоци

Деформація кручення пружного середовища навколо осі $\vartheta = 0, \pi$ передбачає наявність тільки однієї компоненти u_φ вектора переміщень ($u_\rho \equiv 0$, $u_\vartheta \equiv 0$), яка не залежить від змінної φ. У цьому разі маємо

$$\tau_{\rho\varphi} = G\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right), \quad \tau_{\vartheta\varphi} = G\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\varphi\sin\vartheta\right). \quad (34)$$

Напруження σ_ρ, σ_φ, σ_ϑ, $\tau_{\rho\vartheta}$ тотожно дорівнюють нулеві. У циліндричних координатах відмінні від нуля тільки напруження

$$\tau_{r\varphi} = Gr\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right), \quad \tau_{z\varphi} = G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \quad (35)$$

Із трьох рівнянь рівноваги у напруженнях [8]:

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tau_{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\varphi\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} = 0 \quad (36)$$

перші два виконуються тотожно. Підстановкою виразів для напружень із (35) у третє рівняння (36) отримуємо рівняння

$$\nabla_0^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2}u_\varphi = 0, \quad \nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (37)$$

або у сферичних координатах:

$$\nabla_0^2 u_\varphi - \frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}u_\varphi = 0, \quad (38)$$

$$\nabla_0^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right].$$

Рівняння (38) подамо у вигляді

$$\nabla^2 u_\varphi\cos\varphi = 0. \quad (39)$$

Отже, функція $u_\varphi\cos\varphi$ є гармонічною так само, як і функція $\Phi^{(11)}\cos\varphi$ із (7). Тому згідно з (8) для колових переміщень маємо подання

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A(s)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\rho^{-s}ds, \quad (40)$$

$$A(s) = \frac{\Gamma((s-1)/2)\Gamma(-s/2)}{4\sqrt{\pi}}\tilde{t}(s), \quad \tilde{t}(s) = \int_0^a t(r)r^s dr,$$

$$t(r) = \frac{1}{G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} \ (0 \le r < a), \quad t(r) = 0 \ (r > a).$$

У задачі Рейсснера – Сагоци круговий штамп з плоскою горизонтальною основою радіуса a жорстко з'єднаний з межею пружного півпростору і повертається навколо своєї осі на кут α. Крайові умови задачі наступні:

$$u_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \alpha r \ (r \le a), \quad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \ (r > a). \quad (41)$$

З урахуванням другої рівності (34), заключаємо, що умови (41) еквівалентні умовам (6) при $m = 1$ і $f_0^{(11)}(r) = Br$, тобто крайовим умовам задачі Абрамова.

Завдяки тому, що вираз для колових переміщень $u_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2}$ із (40), помножений на $-2(1-\nu)$, співпадає з виразом для меридіональних переміщень $u_\vartheta^{(1m)}\big|_{\vartheta=\pi/2}$ при $m=1$ у неосесиметричні задачі гладкого контакту (якщо $\tilde{t}(s)$ замінити на $\tilde{p}_1(s)$), задача Рейсснера – Сагоци зводиться до інтегрального рівняння задачі Абрамова, де

$$B=-2(1-\nu)\alpha\,. \tag{42}$$

Отже, із (27) отримуємо контактні напруження

$$t(r)=\frac{4\alpha}{\pi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \quad (0\le r<a). \tag{43}$$

Функція u_φ із (40) співпадає з функцією $\Phi^{(11)}$ із (28), якщо множники α і B, які входять до цих виразів зв'язати рівністю (42). Тому, звернувшись до другої формули (30), знаходимо колові переміщення у циліндричних координатах:

$$u_\varphi=-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{a-iz}{r}R-rA\right). \tag{44}$$

Напруження виражаємо через переміщення u_φ із (44) за формулами (35). Знаходимо

$$\tau_{r\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{a-iz}{r^2}R-\frac{a}{R}\right),$$

$$\tau_{z\varphi}=-\frac{4\alpha G}{\pi r}\mathrm{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right). \tag{45}$$

У позначеннях (32) залежності (44), (45) подамо у вигляді

$$u_\varphi=-\frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{R_0R_1}{r}\cos(\vartheta_0+\varphi_0)-r\cdot\mathrm{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right),$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi}\left(\frac{R_0R_1}{r^2}\cos(\vartheta_0+\varphi_0)-\frac{a}{R_1}\cos\varphi_0\right),$$

$$\tau_{z\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi r}\left(R_1\sin\varphi_0-\frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right). \tag{46}$$

Формули (44) – (46) отримані І. Снєддоном [3] та Н. А. Ростовцевим [4] іншим шляхом.

Список використаних джерел

1. *Абрамов В. М.* Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство // Докл. АН СССР. – 1939. – **23**, № 8. – С. 759-763.
2. *Reissner E., Sagocci H.* Forced torsional oscillations of an elastic half-space // Journal of Applied Physics. – 1944. – **15**, N 9. – P. 652-654.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
4. *Ростовцев Н. А.* К задаче о кручении упругого полупространства // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**. – С. 55-60.
5. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
6. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, вып. 1.
7. *Леонов М. Я.* Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**, вып. 1. – С. 87-98.
8. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

References

1. ABRAMOV, B. (1939) Issledovanije sluchaja nesimmetrichnogo davlenija shtampa kruglogo sechenija. *Doklady AN SSSR.* V. 23. N 8.
2. REISSNER, E. and SAGOCCI, H. (1944) Forced torsional oscillations of an elastic half-space. *Journal of Applied Physics.* V. 15. N 9. P. 652-654.
3. SNEDDON, I. (1951) *Fourier Transforms.* New York – Toronto – London.
4. ROSTOVTSEV, N. (1955) K zadache o kruchenii uprugogo poluprostranstva. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 19. P. 55-60.
5. NOBL, B. (1958) *Methods based on the Wiener – Hopf technique.* London – New York – Paris – Los Angeles.
6. POPOV, G. (1961) Ob odnom sposobe reshenija osesimmrichnoi kontaktnoi zadachi. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 25. Issue 1.
7. LEONOV, M. (1953) Obschaja zadacha o davlenii krugovogo shtampa na uprugoje poluprostranstvo. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 17. Issue 1. P. 87-98.
8. LUR'JE, A. (1955) *Prostranstvennyje zadachi teorii uprugosti.* Moskva: Gostehizdat.
9. UFLJAND, JA. (1968) *Integral'nye preobrazovanija v zadachah teorii uprugosti.* Leningrad: Nauka.
10. ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, A. (ed.) (1964) *Handbook of mathematical Functions.* National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. New York.

Надійшла до редколегії 28.10.14