УДК 532.595

І. Ю. Семенова[1], к. ф.-м. н.

Побудова координатного базису для задачі коливань рідини в двопорожнинному гіперболоїді.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Semenova I.Yu.[1], phD.

Construction of coordinate basis of liquid sloshing problem in two-sheeted hyperboloid.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Для задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда, побудувана система координатних функцій. Побудований координатний базис задовольняє умові неперетікання на змочуваній в незбуреному стані бічній поверхні бака і на певному подовжені, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль. Для випадку гіперболічного резервуару побудовано системи координатних функцій і для них визначені похибки задоволення граничних умов. Чисельні приклади свідчать про ефективність побудованої моделі.

Ключові слова: рідина, двопорожнинний гіперболоїд, похибки виконання граничних умов.

For the problem about nonlinear oscillations of liquid with a free surface in reservoir of two-sheeted hyperbolic shape we created a system of coordinate functions. The constructed coordinate basis with a high accuracy holds non-flowing conditions on unperturbed moisten boundary and on its prolongation, where crests of nonlinear waves can reach. It is shown that the traditional technique of determination of basis functions results in the violation of solvability conditions of the problem. For two-sheeted hyperbolic reservoir we constructed systems of coordinate functions and determined for them errors of realization of boundary conditions. This approach was generated on the basis of the analysis of the mechanical nature of the statement of the problem about free oscillations of liquid with a free boundary. Numerical examples are evidence of effectiveness of the constructed model.

Key Words: liquid, two-sheeted hyperboloid, errors of boundary conditions.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Розглянуто задачу моделювання нелінійних коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Це некласична нелінійна крайова задача математичної фізики. Труднощі розв'язання нелінійних крайових задач гідродинаміки обмеженого об'єму рідини із вільною поверхнею полягають не тільки в тому, що крайові умови на вільній поверхні нелінійні, але й в тому, що вільна поверхня невідома і наперед невідома область визначення потенціалу швидкостей рідини.

Головною складністю в розв'язанні такого класу задач є залучення великої кількості форм коливань в дискретну модель, що базується на варіаційному принципі Гамільтона - Остроградського. Причому, кінематична і динамічна граничні умови мінімізуються по єдиному ортогональному базису. Побудовані координатні функції задовольняють кінематичним граничним умовам і умові розв'язності задачі. До того ж в резервуарах з нециліндричними стінками виникають геометричні нелінійності, що призводить до додаткової нелінійної залежності всіх форм коливань.

Постановка задачі

Розглянемо задачу коливань рідини у резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Рідина вважається ідеальною, однорідною, нестисливою, початковий рух безвихровий. Введені припущення значно спрощують постановку задачі, при цьому зберігається її практичне значення.

© І.Ю. Семенова, 2014

Математичне формулювання задачі динаміки системи резервуар-рідина з вільною поверхнею є сукупністю кінематичних і динамічної граничних умов. Кінематичні умови повинні розглядатися як механічні в'язі, що накладають обмеження на варіації невідомих при описі механічної системи на основі принципу Гамільтона-Остроградського. При цьому динамічні граничні умови витікають з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природні.

Першим етапом розв'язання нелінійної задачі про коливання рідини є введення недекартової параметризації області, яку займає рідина [4]. В нових параметрах рідина набуває циліндричної форми, це дає можливість представити рівняння вільної поверхні в розв'язаному щодо однієї з координат вигляді.

Для ефективної реалізації нелінійної дискретної моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в гіперболічній порожнині, потрібно визначити набір координатних функцій для представлення потенціалу швидкостей рідини.

Класична задача про визначення частот та форм коливань має вигляд:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\varphi \text{ на } S_0,$$

а її варіаційне формулювання:

$$\delta I = 0,\ I = \int_{\tau_0} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 ds. \qquad (2)$$

Основні етапи реалізації методу побудови координатних функцій тісно пов'язані з виконанням умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа. Умова розв'язності є вимогою задоволення в слабкому сенсі умови неперетікання на змоченій в незбуреному стані стінці бака, неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею і вимоги збереження об'єму рідини в збуреному русі. Враховуючи зв'язок умови неперетікання на незбуреній твердій поверхні з умовами розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа, цю умову необхідно виконати з високою точністю.

На відміну від циліндричних порожнин для випадку гіперболоїда обертання, виконання умови збереження об'єму для кожної форми коливання рідини окремо недостатньо для виконання вимоги збереження в цілому.

З аналізу умов розв'язності крайової задачі Неймана випливає, що для отримання ефективного розв'язку нелінійної задачі координатні функції повинні задовольняти кінематичним умовам задачі і умовам її розв'язності. Тобто необхідно задовольнити з високою точністю умовам неперетікання на змоченої в незбуреному стані стінки бака; також задовольнити умовам неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею; виконати умови збереження об'єму рідини в збуреному русі. Треба підкреслити, що задовольнити цим умовам необхідно на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Для знаходження мінімуму функціоналу (2) застосовується метод Рітца [3].

Після підстановки розкладів за методом Рітца отримуємо задачу на власні значення:

$$Ax - \lambda Bx = 0 \qquad (3)$$

Розклад потенціалу швидкостей представляємо як лінійну комбінацію базисних функцій w_k:

$$\varphi \sim w_k^{(m)}(r,z) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta, \qquad (4)$$

де $w_k^{(m)}(r,z)$ є системою гармонічних поліномів [4], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення [4]. Це дозволяє легко отримувати функції та їх похідні навіть для великих індексів, що важливо при комп'ютерній реалізації. Прийнятий розклад задовольняє вимогам повноти, ортогональності та гармонічності, проте не задовольняє кінематичним граничним умовам на твердих стінках і на вільній поверхні.

Оскільки умова неперетікання на входить у постановку задачі (2), тобто не накладається ніяких обмежень на рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні, для успішного розв'язання нелінійної задачі застосовується метод допоміжної області [1, 2]. При цьому у якості базису приймаються не форми коливань рідини з вільною поверхнею, а близькі до них функції, які додатково задовольняють умовам розв'язності задачі. Першим етапом в алгоритмі побудови системи базисних функцій є додаткове збільшення глибини заповнення резервуару $\Delta\tau$,

де $\Delta\tau$ вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні змочуваної стінки бака, куди можуть досягати гребні хвиль. Класичним методом розв'язується задача для області $\tau + \Delta\tau$. Знайдений розв'язок уточнюється методом ітерацій, а функції з однаковим окружним номером ортогоналізуються. Для оцінки частотних характеристик і контролю власні числа для кожної функції визначаються за методом Релея.

Чисельна реалізація

Застосуємо метод допоміжної області для резервуара, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Розглянемо результати розв'язання задачі для рівняння твірної $r = \frac{a}{c}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$. Розв'язок задачі побудований на основі розкладу по 22 гармонічних поліномах. Алгебраїчна проблема власних чисел розв'язувалась при $\varepsilon = 10^{-19}$. Модифікаційний метод використовувався при $\Delta H = 0.2R$ (значення ΔH визначає розмір допоміжних областей $\Delta\Sigma$ та $\Delta\tau$).

Таблиця 1. містить значення відносної похибки виконання умови неперетікання на твердій змочуваній стінці резервуара, коли рівень заповнення резервуара змінювався у діапазоні [0.50; 2.00] при збереженні постійного значення радіуса вільної поверхні *R = 1*. Де Δz - рівень вище незбуреної вільної поверхні, куди очікувано досягають гребні хвиль рідини. В таблиці 1 представлені результати визначення перших форм коливань (*k=1*) для параметрів розкладу по кутовій координаті *m=1, m=2, m=3.* Варіант 1 відповідає класичній реалізації методу, варіант 2 - методу допоміжної області, застосованому у сукупності з методом ітераційного уточнення.

Для оцінки точності отриманого розв'язку приймається відносна похибка у вигляді:

Таблиця 1

Залежність похибки виконання умови неперетікання від висоти

z/H	*m=1,k=1*		*m=2,k=1*		*m=3,k=1*	
	1	2	1	2	1	2
Δz	-0.068952	-0.000112	-0.195152	-0.000322	-0.358532	-0.000586
1,00	-0.000101	0.000005	-0.000239	0.000017	-0.000361	0.000037
0,80	-0.000007	0.000006	-0.000016	0.000013	-0.000019	0.000017
0,60	0.000003	-0.000002	0.000008	-0.000008	0.000008	-0.000013
0,40	-0.000003	0.000000	-0.000005	0.000007	0.000001	0.000012
0,20	0.000004	-0.000001	-0.000002	-0.000012	-0.000014	-0.000014
0,00	0.000004	-0.000009	0.000001	-0.000006	0.000000	-0.000002

$$\delta = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} \Big/ \max\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_0} \qquad (5)$$

Раніше на основі методу допоміжної області раніше були побудовані координатні функції для розв'язання задачі про нелінійні коливання рідини в конічному, еліптичному, параболічному та циліндричному баках. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняли умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. Аналіз похибки умов неперетікання наведені в таблиці 1 показує, що для класичного методу поведінка розв'язку над вільною поверхнею є незадовільною з точки зору використання у якості координатних функцій для нелінійної задачі. Це очікуваний результат, оскільки формулювання крайової задачі (2), отримане на основі гіпотез лінійної теорії, не обмежує характер поведінки розв'язку вище рівня вільної поверхні. Метод допоміжної області покращує значення похибки вище рівня вільної поверхні (приблизно у 600 разів). Значення відхилень δ на Σ_0 також зменшуються (точність виконання умови неперетікання збільшується).

Таблиця 2 містить результати визначення похибки виконання умови неперетікання на стінках бака: δ_h - вище рівня вільної поверхні, δ_c - в кутовій точці і δ_i - максимальне значення на Σ_0. Дані приведені для резервуара з параметрами: *a=1.0, c=2.4, H = 1.*

Таблиця 2

Застосування модифікаційного методу

z/H	*m=1,k=1*	*m=0,k=1*	*m=2,k=1*	*m=1,k=2*	*m=3,k=1*	*m=0,k=2*
δ_h	-0.000112	-0.000912	-0.000322	-0.003074	-0.000586	-0.00778
δ_c	0.000005	0.000010	0.000017	0.000136	0.000037	0.000153
δ_i	0.000007	0.000032	0.000017	0.000199	0.000037	0.000266

Аналіз даних свідчить про те, що одержані базисні функції з прийнятною точністю задовольняють умовам неперетікання як на бічній поверхні ($\delta \sim 10^{-4}$), що відповідає незбуреній рідині, так і на її певному продовженні, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль ($\delta \sim 10^{-3}$).

Висновки

Розглянуто застосування методики визначення координатних функцій, що базується на розв'язку лінійної задачі знаходження частот і форм коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарах, що мають форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосований метод доповнює класичну задачу низкою вимог, що виходять поза межі лінійної постановки задачі і відображають частину кінематичних обмежень нелінійної задачі. Показано, що виконання цих умов дозволило побудувати систему координатних функцій, що уточнено задовольняють умові неперетікання на збуреній змочуваній межі області, яку займає рідина. Аналіз чисельних результатів показав значне ослаблення впливу особливої точки на контурі при підвищенні точності виконання граничних умов задачі, особливо на ділянці бічної поверхні, куди можуть досягати гребні нелінійних хвиль. Отримані базисні функції уточнено задовольняють умові неперетікання на змочуваній границі і можуть бути використані як координатні функції при побудові нелінійних дискретних моделей руху ідеальної рідини в резервуарах, що мають форму двопорожнинного гіперболоїда.

Список використаних джерел

1. *Лимарченко О.С.* Нелинейная динамика конструкций с *жидкостью/Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338 *с*.
2. *Лимарченко О.С.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения. /*Лимарченко О.С., Семенова И.Ю* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями. Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ, Інститут математики НАН України, 2006. – **3**. – №4. – С. 374 – 388.
3. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / *Михлин С.Г.* – М: Наука, 1970. – 512 с.
4. *Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы./ *Луковский И.А.* – Киев, Издательство "Наукова думка" 1975. –135 с.

References

1. LIMARCHENKO, O., YASINSKI, V. (1997) *Nonlinear dynamics of structures with liquid.* - Kiev: Nat.Techn. Univ. Ukraine "KPI".
2. LIMARCHENKO, O., SEMENOVA, I. (2006) Construction of coordinate functions for nonlinear problem of liquid sloshing in parabolic reservoir. *Complex analysis and free surface flows. Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.* 3(4). p. 374-388.
3. MIKHLIN, S. (1970*) Variational methods in mathematical physics.* – Moskva: Nauka.
4. LUKOVKY, I. (1975) *Nonlinmear oscillations of liquid in vessels of complex geometric.* Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 18.09.14