УДК 517. 946

Ткач А.Б. здобувач

Квазітороїдальні багатовиди нелінійних систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4.

E–mail **us_ukr@yahoo.com**

A.B. Tkach competitor

Quasitoroidal manifolds for nonlinear systems of partial differential equations with impulse influence

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4

E–mail **us_ukr@yahoo.com**

Для нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом досліджуються умови існування квазітороїдальних багатовидів

Ключові слова: нелінійні системи, частинні похідні, квазітороїдальні багатовиди, імпульсний вплив.

The quasitoroidal manifolds for the systems of the usual differential equations with the impulse influence are investigated by Yu. A. Mitropolskiy, A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. The integral manifolds for the systems of the partial differential equations are studied by J. Kurzweil, A. B. Vasilyeva, Yu. S. Kolesov, S. A. Kashchenko, N.H. Rosov , Yu. A. Mitropolskiy, B. P. Tkach and by author of this article. In this work the sufficient conditions of the existence of the quasitoroidal manifolds for the nonlinear systems of the partial differential equations with the impulse influence are investigated. The impulse influence depends on the space variable, on the values of the unknown function and its partial derivative in the fixed moments of the impulse influences. The quasitoroidal manifolds we costruct by the iterations method. We define a matrixant for the homogeneous system of the partial differential equations. Then using A. M. Samoilenko's approach we introduce a projective matrix which is continuous in its arguments, periodic in second argument. Further we construct Green's function for the problem on the restricted solutions of the unhomogeneous systems of the partial differential equations with the impulse influence. Using this Green's function we obtain the Green's function for finding the quasitoroidal manifold of the nonlinear systems of the partial differential equations with the impulse influence and representation of the quasitoroidal manifold of our system as the uniform limit of the sequence of the approximate quasitoroidal manifolds.

Key word: nonlinear systems, partial derivatives, quasitoroidal manifolds, impulse influence.

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор Перестюк М.О.

Вступ. Квазітороїдальні багатовиди для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням досліджувалися в роботах Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1,2].

Дослідженню інтегральних багатовидів дифференціальних рівнянь з частинними похідними присвячені роботи Я. Курцвейля, А.Б. Васильєвої, Ю.С. Колесова, С.А. Кащенка, Н.Х. Розова [3, 4], робота Ю.О. Митропольського, Б.П. Ткача [5], а також робота автора [6].

Постановка задачі. В даній роботі досліджуються умови існування квазітороїдальних багатовидів для нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом вигляду

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = A\big(x,\varphi,u(t,x),u'_x(t,x)\big)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c\big(x,\varphi,u(t,x),u'_x(t,x)\big),\ \ t \neq t_j$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b(\varphi), \tag{1}$$

$$\Delta\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j} = H_j\big(x,\varphi(t_j),u(t_j,x),u'_x(t_j,x)\big)\cdot$$

Тут u, c, $H_j \in E_n$, $\varphi \in E_m$, $A(x, \varphi, u, u'_x)$ – (n x n)-матриця. Вектор-функції $c(x, \varphi, u, u'_x)$, $H_j(x, \varphi, u, u'_x)$, $b(\varphi)$ і матриця $A(x, \varphi, u, u'_x)$ неперервні по своїх аргументах, періодичні по φ з періодом 2π.

Припускаємо, що моменти часу t_j і вектор-функції H_j задовольняють умови

$$t_{j+1} - t_j \geq h, \quad H_{j+p} = H_j \tag{2}$$

де h, p – деякі додатні числа, $j = 1, 2$ ...

Нехай $\varphi_t(\tau_0,\varphi)$ буде розв'язком системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = b(\varphi)\ , \tag{3}$$

який задовольняє умову $\varphi_{\tau_0}(\tau_0,\varphi) = \varphi$, причому τ_0, φ – довільні сталі.

Функція $u = u(x,\ \varphi)$ визначає квазітороїдальний багатовид [1] системи рівнянь (1), якщо $u(x,\ \varphi)$ обмежена, неперервна і періодична по φ з періодом 2π функція, для якої при всіх $(x,t)\ \in\ [-a,a]\times(-\infty,\infty)$ виконується тотожність

$$\frac{\partial^2 u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial t\partial x}\equiv$$
$$\equiv A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),u'_x(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\big)\times$$
$$\times\frac{\partial u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial x}+c(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_x(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))),\quad t\neq t_j$$
$$\Delta\frac{\partial u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),\qquad (4)$$
$$u(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_x(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))),\qquad j=1,2,...$$

Квазітороїдальний багатовид системи рівнянь з імпульсним впливом (1) будуємо за допомогою методу ітерацій. Для знаходження першого наближення отримуємо систему рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t\partial x}=A(x,\varphi,0,0)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}+c(x,\varphi,0,0),\ t\neq t_j,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=b(\varphi),\qquad (5)$$
$$\Delta\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0),u_1(t,0)=0.$$

якщо за нульове наближення взяти $u_0(t,x)\equiv 0$.

Розглядаємо далі систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)=A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).$$

Визначимо її матрицант як матрицант такої системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dt}=A(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0)z$$

та позначимо цей матрицант через $\Omega_{1\tau}{}^{t}(x,\varphi)$.

Тепер введемо функцію $G_0^1(x,\tau,\varphi)$ співвідношенням

$$G_0^1(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{1\tau}{}^{0}(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<0\\ \Omega_{1\tau}{}^{0}(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E], & \tau>0\end{cases}$$

де $P(x,\varphi_\tau(\tau,\varphi))$ є проекційна матриця. Вона неперервна по своїх аргументах і періодична по другому аргументу з періодом 2π.

Будемо припускати, що функція $G_0^1(x,\tau,\varphi)$ задовольняє нерівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\ G_0^1(x,\tau,\varphi)\ \|\,d\tau\ <R_1\ <+\infty,$$

де R_1 є додатна стала.

Функцію $G_t^1(x,\tau,\varphi)$ визначимо рівністю [1]

$$G_t^1(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{1\tau}{}^{t}(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<t\\ \Omega_{1\tau}{}^{t}(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E], & \tau>t\end{cases}$$

Вона є функцією Гріна для задачі про обмежені розв'язки наступної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}=A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big)\frac{\partial u_1}{\partial x}+c\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big),$$
$$\Delta\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0).\qquad (5')$$

Тоді обмежений розв'язок системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (5') записуємо у вигляді

$$u_{1t}(x,\varphi)=\int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty}G_t^1(\xi,\tau,\varphi)c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),0,0)\,d\tau d\xi+$$
$$+\int_0^x\sum_{-\infty<j<+\infty}G_t^1(\eta,t_j,\varphi)H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0)d\eta.$$

Визначена вище функція $G_0^1(x,\tau,\varphi)$ є функцією Гріна задачі про квазітороїдальний багатовид системи (5). Тоді отримуємо наступне представлення квазітороїдального багатовиду

$$u=u_{10}(x,\varphi)=\int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty}G_0^1(\xi,\tau,\varphi)c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),0,0)d\tau d\xi+$$
$$+\int_0^x\sum_{-\infty<j<+\infty}G_0^1(\eta,t_j,\varphi)H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0)d\eta.$$

Для одержання k-го наближення квазітороїдального багатовиду розглядаємо систему рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x)}{\partial t\partial x}=A\big(x,\varphi,u_{k-1}(t,x),u'_{(k-1)x}(t,x)\big)\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}+$$
$$+c\big(x,\varphi,u_{k-1}(t,x),u'_{(k-1)x}(t,x)\big),\quad t\neq t_j$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=b(\varphi),$$
$$\Delta\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j\big(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),\qquad (6)$$
$$u_{k-1}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)x}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))\big)$$

Нехай $\Omega_{k\tau}{}^{t}(x,\varphi)$ є матрицант системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)=A\Big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),\ u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\Big)\frac{\partial u_k}{\partial x}.$$

Визначимо функцію $G_t^k(x,\tau,\varphi)$ рівністю

$$G_t^k(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{k\tau}{}^{t}(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<t\\ \Omega_{k\tau}{}^{t}(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E], & \tau>t,\end{cases}$$

де $P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))$ є проекційна матриця, неперервна по своїм аргументам і періодична по другому аргументу з періодом 2π.

Припускаємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| G_0^{\,k}(x,\tau,\varphi) \right\| d\tau < R_k < +\infty,$$

де R_k є додатна стала.

Функція $G_t^{\,k}(x,\tau,\varphi)$ є функцією Гріна задачі про обмежені розв'язки для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\big)\frac{\partial u_k}{\partial x} +$$
$$+ c\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\big),$$
$$\Delta\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j} = H_j\big(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))\big). \qquad (7)$$

Тоді обмежений розв'язок системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (7) записується у вигляді

$$u_{kt}(x,\varphi) = \int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty} G_t^{\,k}(\xi,\tau,\varphi)\, c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),$$
$$u_{(k-1)}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)),\, u'_{(k-1)\xi}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)))\, d\tau d\xi +$$
$$+\int_0^x \sum_{-\infty<j<+\infty} G_t^{\,k}(\eta,t_j,\varphi)\, H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi), \qquad (8)$$
$$u_{(k-1)}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),\, u'_{(k-1)\eta}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)))\, d\eta\,.$$

Функція $G_0^{\,k}(x,\tau,\varphi) = G_t^{\,k}(x,\tau,\varphi)\big|_{t=0}$ є функцією Гріна задачі про квазітороїдальний багатовид системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (7). Тоді квазітороїдальний багатовид системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (7) записується у вигляді

$$u_{k0}(x,\varphi) = \int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{\,k}(\xi,\tau,\varphi)\, c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),$$
$$u_{(k-1)}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), u'_{(k-1)\xi}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)))\, d\tau d\xi +$$
$$+\int_0^x \sum_{-\infty<j<+\infty} G_0^{\,k}(\eta,t_j,\varphi)\, H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi), \qquad (9)$$
$$u_{(k-1)}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),\, u'_{(k-1)\eta}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)))d\eta$$

Припускаємо, що:

I. Матриця $A(x,\varphi,u,u'_x)$ неперервна по сукупності своїх аргументів, періодична по φ з періодом 2π і задовольняє умову Ліпшиця

$$\| A(x,\varphi,\bar{u},\bar{u}'_x) - A(x,\varphi,u,u'_x) \| \le L_1 \| \bar{u}-u \| + L_2 \| \bar{u}'_x - u'_x \|, \quad (10)$$

де L_1, L_2 – додатні сталі.

II. Вектор-функції $c(x,\varphi,u,u'_x), b(\varphi), H_j(x,\varphi,u,u'_x)$ неперервні по своїм аргументам, періодичні по φ з періодом 2π і виконуються нерівності

$$\| c(x,\varphi,u,u'_x) \| \le M,$$
$$\| H_j(x,\varphi(t_j),u(t_j,x),u'_x(t_j,x)) \| \le M, \quad (11)$$
$$\| c(x,\varphi,\bar{u},\bar{u}'_x) - c(x,\varphi,u,u'_x) \| \le$$
$$\le K_1 \| \bar{u}-u \| + K_2 \| \bar{u}'_x - u'_x \|,$$
$$\| H_j(x,\varphi,\bar{u},\bar{u}'_x) - H_j(x,\varphi,u,u'_x) \| \le$$
$$\le K_1 \| \bar{u}-u \| + K_2 \| \bar{u}'_x - u'_x \|, \quad (12)$$

причому K_1, K_2 – додатні сталі.

III. Функції Гріна $G_t^{\,k}(x,\tau,\varphi), (k=1,2,...)$ періодичні по φ з періодом 2π і задовольняють нерівності

$$\| G_t^{\,k}(x,\tau,\varphi) \| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}. \quad (13)$$

Тут *К*, γ – додатні сталі.

IV. Стала

$$Q = \left(\frac{2KM}{\gamma}(aL_1+L_2) + aK_1 + K_2\right)\alpha_0 K \quad (14)$$

менше одиниці. Тут

$$\alpha_0 = \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1-e^{-\gamma h}}. \quad (15)$$

Основний результат.

Теорема. *Нехай система рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (1) задовольняє умови I – IV.*

Тоді існує єдиний обмежений розв'язок системи диференціальних рівнянь (1), який є рівномірною по t, x *границею при* $k\to\infty$ *послідовності* $\{u_{kt}(x,\varphi)\}$, *де* $u_{kt}(x,\varphi)$ *визначається співвідношенням (8), і система рівнянь (1) має квазітороїдальний багатовид* $u = u(x,\varphi)$. *Він є рівномірною по x,* φ *границею при* $k\to\infty$ *послідовності квазітороїдальних багатовидів* $\{u_{k0}(x,\varphi)\}$,

$$u = u(x,\varphi) = \lim_{k\to\infty} u_{k0}(x,\varphi). \quad (16)$$

Доведення теореми. Доведемо рівномірну збіжність послідовних наближень $u_{kt} = u_{kt}(x,\varphi), k = 1,2,...$

Спочатку оцінимо $\| u_{kt}(x,\varphi) \|$.

Використовуючи представлення (8) розв'язку системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (7), а також нерівності (11) – (13), знаходимо оцінки

$$\| u_{kt}(x,\varphi) \| \le a\alpha_0 KM ,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{kt}(x,\varphi) \right\| \le \alpha_0 KM \cdot \qquad (17)$$

Використовуючи функцію Гріна $G_t^{(n+1)}(\xi,\tau,\varphi)$ відповідної неоднорідної системи рівнянь з частинними похідними, знаходимо інтегральне представлення різниці $u_{(n+1)t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi)$.

За допомогою умов Ліпшиця (10), (12), нерівностей (13), (17) для різниць $u_{2t}(x,\varphi) - u_{1t}(x,\varphi)$, $u_{3t}(x,\varphi) - u_{2t}(x,\varphi)$, … отримуємо оцінки.

Продовжуючи послідовно процес знаходження оцінок, маємо

$$\| u_{(n+k)t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi) \| \le aQ^n \sum_{i=0}^{k-1} Q^i \alpha_0 KM ,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{(n+k)t}(x,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x} u_{nt}(x,\varphi) \right\| \le Q^n \sum_{i=1}^{k-1} Q^i \alpha_0 KM. \qquad (18)$$

В силу умови IV із нерівностей (18) при $k \to \infty$ випливає існування рівномірної по x,φ,t границі послідовності $\{ u_{nt}(x,\varphi) \}$,

$$u_{\infty t}(x,\varphi) = \lim_{n\to\infty} u_{nt}(x,\varphi) , \qquad (19)$$

а отже, і рівномірної по x,φ границі послідовності квазітороїдальних багатовидів $\{ u_{n0}(x,\varphi) \}$,

$$u = u_{\infty}(x,\varphi) = \lim_{n\to\infty} u_{n0}(x,\varphi) . \qquad (20)$$

Із оцінок (18) при $k \to \infty$ для граничної функції $u_{\infty t}(x,\varphi)$ одержуємо нерівності

$$\| u_{\infty t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi) \| \le aQ^n (1-Q)^{-1} \alpha_0 KM ,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{\infty t}(x,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x} u_{nt}(x,\varphi) \right\| \le Q^n (1-Q)^{-1} \alpha_0 KM \cdot \qquad (21)$$

Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1.*Митропольский Ю. А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами /Ю.А.Митропольский, А.М.Самойленко, Д.И.Мартынюк. – Киев: Наукова думка, 1984. - 216 с.

2.*Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк. – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.

3. *Kurzweil J.* Exponentially stable integral manifolds, averaging principle and continuos dependence on a parameter / O.Kurzweil// Czechoslovak. Math. J. – 1966. – N 4.– P. 463 – 492.

4.*Васильева А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А.Б.Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С.Колесов, Н.Х.Розов // Математический сборник. – 1986. – т.130, №4. – С.489 – 499.

5. *Митропольский Ю. А.* Квазитороидальные многообразия систем уравнений с частными производными с запаздыванием/ Ю.А.Митропольский, Б.П.Ткач //. – Киев, 1992 (Препринт / АН УССР, Институт математики; 92.5). – 40 с.

6. *Ткач А.Б.* Інтегральні багатовиди деяких систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним збуренням / А.Б.Ткач // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,серія:математика, механіка. – 2005. – Вип.. 13–14. – С. 76–80.

References

1.MITROPOLSKIY YU.A., SAMOILENKO A.M., MARTINYUK D.I. (1985) Sistemy evolyutsionnyh uravneniy s periodicheskimi i kvaziperiodicheskimi koeffitsientami. Kiev: Naukova dumka.

2. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1987) Differentsialnyie uravneniya s impulsnym vozdeystviem. Kiev: Vyshcha shkola.

3. KURZWEIL J. (1966) Exponentially stable integral manifolds, averaging principle and continuous dependence on a parameter .Czechoslovak. Math. J.(4). P. 463 – 492.

4. VASILYEVA A.B., KASHCHENKO S.A., KOLESOV YU.S., ROSOV N.H. (1986) Bifurkatsiya avtokolebaniy nelineynyh parabolicheskih uravneniy s maloy diffuziey. Matematicheskiy sbornik 130 (4). P. 489 – 499.

5. MITROPOLSKIY YU.A., TKACH B.P. (1992) Kvazitoroidalnyie mnogoobraziya sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi s zapazdyvaniem. Preprint Instituta matematiki AN USSR (92.5). Kiev. 40 p.

6. TKACH A.B. (2005) Integralni bagatovydy deyakyh sistem rivnyan z chastnymy pohidnymy z impulsnym zburennyam. Visnyk of Kyiv Taras Shevchenko National University Series Mathemat., Mech. -2005. V. 13 -14. p. 76 -80.

Надійшла до редколегії 10.09.2014