УДК 004.42:510.69

Шкільняк О.С.[1], к. ф.-м. н.

Семантичні аспекти модальних логік часткових немонотонних предикатів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

O.S. Shkilniak[1], PhD (Phys.-Math.).

Semantic aspects of modal logics of partial non-monotone predicates

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: me.oksana@gmail.com

Запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності (еквітонності). Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових логік цього класу, досліджено їх семантичні властивості. Показана відмінність пропонованих логік від відповідних логік еквітонних предикатів.

Ключові слова: модальна логіка, мова, семантика, предикат.

Modal logics are successfully used in computer science and programming. Temporal logics are used in dynamic systems modelling, program specification and verification; epistemic logics are used for information systems description, in data bases and knowledge bases. Traditionally, modal logics are based on classical predicate logic. However, classical logic has fundamental limitations. Thus, it makes important the problem of description of new program oriented logical formalisms. Composition-nominative modal logics (CNML) are one of such formalisms. Modal transitional logics (MTL) are an important variant of CNML; they represent the fact of changing and evolution in subject domains. The paper is concerned with a further study of these logics. We propose to remove the monotonicity restriction which was usually considered (equitone predicates) and introduce a new class of pure first-order MTL of partial non-monotone predicates. We distinguish multimodal and temporal logics as subclasses of MTL; in multimodal MTL we specify general MTL and epistemic MTL. Semantic models and languages for MTL are described, their semantic properties are studied. Various classes of MTL are defined depending on the conditions imposed on the transition relations. Interactions of modalities with renominations and quantifiers in MTL are investigated. We show the difference between corresponding classes of MTL of non-monotone and monotone (equitone) predicates.

Key words: modal logic, language, semantics, predicate.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Для опису й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини з великим успіхом використовується апарат модальних логік. Темпоральні логіки застосовуються для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм, на базі цих логік розроблено низку систем і мов специфікацій. Епістемічні логіки використовуються для опису інформаційних та експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією. Водночас принципові обмеження класичної логіки предикатів, яка лежить в основі традиційних модальних логік, висувають на перший план задачу побудови нових, програмно-орієнтованих класів логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), які поєднують можливості традиційних модальних логік [1] і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [2]. Важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. В межах ТМЛ природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки. Низку класів ТМЛ еквітонних (монотонних) предикатів запропоновано та досліджено, зокрема, в роботах [3, 4]

Метою даної роботи є побудова та дослідження нових класів КНМЛ. Запропоновано ТМЛ часткових квазіарних предикатів, *не обмежених* умовою монотонності. Підкласами ТМЛ є мультимодальні (ММЛ) та темпоральні (ТмМЛ) логіки, в межах ММЛ виділено ТМЛ епістемічного типу та загальні ТМЛ. Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ зазначених класів, розглянуто їх семантичні властивості. Показан а відмінність ТМЛ немонотонних предикатів від ТМЛ еквітонних предикатів.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2–4].

1. Транзиційні модальні системи

Основним семантичним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Такі системи описують світи розгляду модальної логіки і є моделями цих світів. КНМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Im)$. Тут Cms – композиційна модальна система (КМС), вона задає семантичні аспекти світу; Fm – множина формул відповідної мови КНМЛ; Im – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС є семантичними моделями реляційного типу. Вони мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\rho \subseteq S \times S^n$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr.

В роботі розглядаємо чисті першопорядкові КНМЛ. Для них S – це множина алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^VA_\alpha \to \{T, F\}$, їх називаємо предикатами стану α.

Множина $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ – це множина усіх базових даних світу. Предикати вигляду ${}^VA \to \{T, F\}$ назвемо глобальними.

Для чистих першопорядкових КНМЛ множина композицій задається базовими загальнологічними композиціями кванторного рівня $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та базовими модальними композиціями.

Нагадаємо, що V-квазіарний предикат на A – це функція вигляду ${}^VA \to \{T, F\}$, де ${}^VA$ – множина всіх V-іменних множин (V-ІМ) над A, $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень. V-ІМ над A – це однозначна функція вигляду $d : V \to A$, де V та A – множини предметних імен (змінних) та предметних значень. Подаємо V-ІМ як $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$. Для V-ІМ задаємо операції вилучення компоненти $\|_{-x}$, накладки ∇, реномінації $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Ім'я $x \in V$ (строго) неістотне для квазіарного предиката P, якщо для довільних $d_1, d_2 \in {}^VA$ таких, що $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}$, маємо $P(d_1) = P(d_2)$.

Предикат P еквітонний (монотонний), якщо: $P(d){\downarrow}$ та $d \subseteq d' \Rightarrow P(d'){\downarrow} = P(d)$.

Області істинності та хибності предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ визначаються так:
$T(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = T\}$, $F(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = F\}$.

Предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ (частково) істинний, або неспростовний, якщо $F(P) = \varnothing$.

Композиції $\neg$, $\vee$ задамо через області істинності й хибності відповідних предикатів:
$T(\neg P) = F(P)$, $F(\neg P) = T(P)$;
$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$, $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$.

Композиція реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ визначається так:

$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)(d) = f(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$.

Транзиційні модальні системи (ТМС) – це КНМС, у яких R складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$. Трактуємо їх як відношення переходу (досяжності) на станах.

ТМС із множиною відношень $R = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i, $i \in I$, у яких кожному $\rhd_i \in R$ зіставлено відповідну K_i, назвемо *мультимодальними* (ММС).

Загальні ТМС є окремим випадком ММС, для них R складається з єдиного відношення $\rhd$ та наявна єдина базова модальна композиція $\Box$ (необхідно). Для загальних ТМС задають похідну композицію $\Diamond$ (можливо): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

ТМС, у яких R складається з єдиного бінарного відношення, а базовими модальними композиціями є $\Box_\uparrow$ (завжди буде) та $\Box_\downarrow$ (завжди було), називають *темпоральними* (ТмМС).

Для ТмМС також задають похідні композиції $\Diamond_\uparrow$ (колись буде) і $\Diamond_\downarrow$ (колись було): $\Diamond_\uparrow P$ означає $\neg\Box_\uparrow\neg P$; $\Diamond_\downarrow P$ означає $\neg\Box_\downarrow\neg P$.

Опишемо мову чистих першопорядкових КНМС. Алфавіт мови: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів (сигнатура мови); символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно. Маємо $Ps \subseteq Fm$; а далі:

$\Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fm$;

$\Phi \in Fm$ та $\text{⌘} \in Ms \Rightarrow \text{⌘}\Phi \in Fm$.

Тип КНМС задається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із R для кожного ⌘$\in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності [3].

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах $Im : Ps \times S \to Pr$. При цьому має виконуватись умова $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$, це означає, що базові предикати є предикатами станів. Таке Im продовжимо до відображення $Im : Fm \times S \to Pr$ інтерпретації формул на світах:

$Im(\neg, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha))$;
$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha))$;
$Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha))$;

для кожних $d \in {}^V\!A$ задаємо $Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо існує } a \in A_\alpha\text{: } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T, \\ F, \text{ якщо } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовуються символи із Ms), належать до предикатів станів.

Визначення Im для формул вигляду $⌘\Phi$ конкретизуємо залежно від різновидності ТМС.

У випадку ММС для формул вигляду $K_i\Phi$, де $K_i \in Ms$, для кожних $\alpha \in S$ та $d \in {}^V\!A$ задаємо

$Im(K_i\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \rhd_i \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \rhd_i \delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β, що $\alpha \rhd_i \beta$, то $Im(K_i\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V\!A$.

У випадку ТмМС для формул вигляду $\Box_\uparrow\Phi$ та $\Box_\downarrow\Phi$ для кожних $\alpha \in S$ та $d \in {}^V\!A$ задаємо:

$Im(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \rhd \delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$Im(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \delta \rhd \alpha \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β, що $\alpha \rhd \beta$, то для кожного $d \in {}^V\!A$ вважаємо $Im(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d)\uparrow$.

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β, що $\beta \rhd \alpha$, то для кожного $d \in {}^V\!A$ вважаємо $Im(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d)\uparrow$.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

Формула Φ *істинна в стані* α (позначаємо $\alpha \models \Phi$), якщо Φ_α – істинний предикат.

Формула Φ *істинна в КНМС* $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо для кожного $\alpha \in S$ предикат Φ_α є істинним. Формула Φ *усюди істинна* (позн. $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Залежно від умов, накладених на відношення переходу, можна визначати різні класи ТМС. Традиційно ці відношення розглядають як рефлексивні, симетричні чи транзитивні.

Для ММС розглянемо випадки, коли всі відношення переходу однотипні (рефлексивні, симетричні чи транзитивні). Якщо вони рефлексивні, то в назві ММС пишемо R; якщо транзитивні, то пишемо T; якщо симетричні, то пишемо S.

Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, T-ММС, S-ММС, RT-ММС, RS-ММС, TS-ММС, RTS-ММС.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень переходу назвемо *епістемічними*, або ММС епістемічного типу. Загальні ТМС можна трактувати як окремий випадок епістемічних.

Розглядаючи для ТмМС випадки, коли відношення переходу може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним, маємо такі їх класи:

R-ТмМС, T-ТмМС, S-ТмМС, RT-ТмМС, RS-ТмМС, TS-ТмМС, RTS-ТмМС.

2. Властивості транзиційних модальних систем

При умові $d \notin {}^V\!A_\delta$ постає питання: як задати значення $\Phi_\delta(d)$? Залежно від відповіді на нього для логік еквітонних предикатів виділено [3] ТМС із сильною та із загальною умовами визначеності на станах. Для загального випадку КНМЛ квазіарних предикатів ми виділяємо предикати станів та глобальні предикати. Предикати, які є значеннями немодалізованих формул, належать до предикатів станів. Вони задаються так: для $d \in {}^V\!A$ вважаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ позначає ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$. Неформально це означає, що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти вигляду $v \mapsto a$ із $a \in A_\delta$.

Символи модальних композицій можна проносити через реномінації.

Теорема 1. Для кожних $⌘ \in Ms$, $\Phi \in Fm$, $d \in {}^V\!A$ маємо $R^{\bar v}_{\bar x}\, ⌘\,\Phi(d) = ⌘\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi(d)$

Тут і надалі вважаємо: $Ms = \{\Box\}$ для випадку загальних ТМС, $Ms = \{\Box_\uparrow, \Box_\downarrow\}$ для випадку ТмМС, $Ms = \{K_i \mid i \in I\}$ для випадку ММС.

Наслідок 1. Кожна формули вигляду $R^{\bar v}_{\bar x}\, ⌘\,\Phi \leftrightarrow ⌘\, R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi$, де $⌘ \in Ms$, всюди істинна.

Розглянемо взаємодію в ТМС модальних композицій та кванторів.

Для ТМЛ еквітонних предикатів формули вигляду $⌘\forall x\Phi \to \forall x⌘\Phi$ та $\exists x⌘\Phi \to ⌘\exists x\Phi$ всюди істинні [3, 4]. Це не так для загального випадку ТМЛ немонотонних (нееквітонних) предикатів.

Приклад 1. Формули вигляду $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$ не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$. Нехай $S = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{\alpha \rhd \beta\}$, $A_\alpha = \{a\}$, $A_\beta = \{b\}$. Візьмемо $p \in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha(\varnothing) = F$, $p_\beta(\varnothing) = F$, $p_\beta([x \mapsto b]) = T$. Тоді маємо $(\forall x\, p)_\beta(\varnothing) = T$, звідки $(\Box\forall x\, p)_\alpha(\varnothing) = T$. Водночас $(\Box p)_\alpha([x \mapsto a]) = F$, адже в силу $[x \mapsto a]_\beta = \varnothing$ маємо $p_\beta([x \mapsto a]_\beta) = p_\beta(\varnothing) = F$. Звідси $(\forall x\Box p)_\alpha(\varnothing) = F$. Отже, $(\Box\forall x\, p \to \forall x\Box p)_\alpha(\varnothing) = F$, тому $\alpha \not\models \Box\forall x\, p \to \forall x\Box p$.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$. Нехай $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha=\{a, b\}$, $A_\beta=\{b\}$. Візьмемо $p\in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x, y. Задамо $p_\beta([x\mapsto b, y\mapsto b])=F$, $p_\beta([y\mapsto b])=T$. Із $p_\beta([x\mapsto b, y\mapsto b])=F$, враховуючи $A_\beta=\{b\}$, маємо $\exists x\,p_\beta([y\mapsto b])=F$, звідки $\Box\exists x\,p_\alpha([y\mapsto b])=F$. Із $p_\beta([y\mapsto b])=T$ маємо $\Box p_\alpha([x\mapsto a, y\mapsto b])=T$, звідки $\exists x\Box p_\alpha([y\mapsto b])=T$. Тому $(\exists x\Box p\to\Box\exists x\,p)_\alpha([y\mapsto b])=F$, звідки $\alpha\,|\!\neq\exists x\Box p\to\Box\exists x\,p$.

Зауважимо, що предикати p_β нееквітоні в обох побудованих тут ТМС.

Приклад 2. Формули вигляду $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$. Нехай $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{a, b\}$. Візьмемо $p\in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. Тоді $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, звідки $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$ згідно $A_\alpha=\{a\}$. Але згідно $p_\beta([x\mapsto b])=T$ маємо $(\exists x\,p)_\beta([x\mapsto a])=T$, звідки $(\Box\exists x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Отже, $(\Box\exists x\,p\to\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\,|\!\neq\Box\exists x\,p\to\exists x\Box p$.

Загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$, будуємо аналогічно, задаючи $p_\alpha([x\mapsto a])=T$, $p_\beta([x\mapsto a])=T$, $p_\beta([x\mapsto b])=F$. Тоді $(\forall x\,p)_\beta([x\mapsto a])=F \Rightarrow (\Box\forall x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Із $R=\{\alpha\rhd\beta\}$ маємо $p_\beta([x\mapsto a])=T \Rightarrow (\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Згідно $A_\alpha=\{a\}$ маємо $(\forall x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Отже, $(\forall x\Box p\to\Box\forall x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\,|\!\neq\forall x\Box p\to\Box\forall x\,p$.

Зауважимо, що предикати, які фігурують у прикладі 2 – еквітонні.

Аналогічні контрмоделі можна збудувати для випадків ММС та ТмМС.

Отже, формули вигляду $\forall x⌘\Phi\to⌘\forall x\Phi$ та $⌘\exists x\Phi\to\exists x⌘\Phi$ теж не є всюди істинними, причому вже для ТМЛ еквітонних предикатів.

Формула $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ відома як формула Баркан, $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ – це її конверсія. Як показують приклади 1 та 2, формула Баркан та її конверсія не є всюди істинними. Водночас [3] конверсія формули Баркан істинна в кожній загальній ТМС еквітонних предикатів.

Висновки

В роботі запропоновано і досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності (еквітонності). Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ, досліджено їх семантичні властивості. Залежно від умов, накладених на відношення переходу, визначено різні класи ТМЛ. Розглянуто взаємодію модальних композицій із реномінаціями та кванторами. Показана відмінність пропонованих класів ТМЛ немонотонних предикатів та відповідних класів ТМЛ монотонних (еквітонних) предикатів.

Дослідження ТМЛ планується продовжити в наступних роботах. Зокрема, будуть розглянуті властивості відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Список використаних джерел

1. *Cocchiarella N.B.* Modal logic / N.B. Cocchiarella, M.A. Freund. – Oxford University Press, 2008. – 267 p.
2. *Нікітченко М.С.* Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
4. *Шкільняк О.С.* Семантичні моделі та секвенційні числення транзиційних модальних логік / О.С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2013. – Вып. 1. – С. 141–150.

References

1. COCCHIARELLA, N. and FREUND, M. (2008). *Modal logic*. Oxford University Press.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. SHKILNIAK, O. (2009). Semantic properties of transitional modal logics. In *Problems in progamming*. № 4, p. 11–23.
5. SHKILNIAK, O. (2013). Semantic models and sequent calculi of transitional modal logics. In *Computer mathematics*. **1**, p. 141–150.

Надійшла до редколегії 30.09.2014