УДК 519.925.51

Юнькова О.О.[1], к.ф.-м.н.,
Кулян А.В.[2], студ.,
Прокопюк О.С.[2], студ.

Про ідентифікацію параметрів у задачах оптимального інвестування

[1]Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03068, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: firebird0001@gmail.com

O.O.[1] Yun'kova, Ph.D.,
A.V. Kulian[2], stud.,
O.S. Prokopyuk[2], stud.

On the identification of parameters in problems of optimal investment

[1]Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: firebird0001@gmail.com

Розглядається задача про побудову оптимальних значень параметрів математичних моделей, що застосовуються при інвестуванні у цінні папери.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, оптимальне інвестування, портфель акцій.

This study aims to address the problem of identification of parameters of mathematical models of dynamic processes that can be described by ordinary differential equations and systems of equations. In this paper we outline three different approaches to build optimal parameters of parametric models of dynamic systems. On the example of mathematical models of dynamic formation of the market value per share and stock portfolio developed algorithms for constructing optimal values of the parameters of such models. The algorithm can determine the multiple parameters estimation of mathematical models of dynamic processes in the class of ellipsoidal sets. When solving applied problems of financial analysis it allows researchers to obtain guaranteed financial performance of investment operations. The algorithm is based on the use of iterative procedure at each stage which formed ellipsoids containing the model parameters obtained through solving the additional problems of parametric identification. Each point in the space of such a set of model parameters is internal, or belongs to its boundary.

Key Words: mathematical model, control parameters of portfolio, diversification of the investment portfolio

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Як показано в роботі [2], математична модель формування ринкової вартості акції та портфеля акцій мають вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_{i_0},\ t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$i = \overline{1, n}$.

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \quad (2)$$

відповідно, і є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Задача про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x .$$

При практичному інвестуванні вона розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x$$

і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними і залежать від параметрів. Для забезпечення можливості її інтегрування

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)),$$
$$i, j = \overline{1, n}$$

побудуємо процедуру визначення параметрів α. При різних постановках задачі за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij})$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in A$, де A – обмежена замкнута множина. Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\overline{r}_i\ (t)$.

На основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0)$, $r_i(t_0) = r_{i0}$, $t \in (t_0, t_1)$.

З метою отримання оптимального значення параметра α_0^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_0^* = arg \min_{\alpha \in A} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2. \qquad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1})$, $r_i(t_{k-1}) = r_{i_{k-1}}$ $t \in (t_{k-1}, t_k)$.

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_k^* = arg \min_{\alpha \in A} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 \qquad (4)$$

Розв'язок задачі (4) дозволяє оптимально перейти із точки r_{k-1} у точку r_k. Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі для моделювання поведінки та прогнозування очікуваної прибутковості акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Розглянемо алгоритм побудови гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1) у просторі R^n параметрів α.

1. Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Вектор параметрів моделі запишемо у вигляді $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів математичної моделі

$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$.

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку

$\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена

замкнута множина параметрів математичної моделі
$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Серед критеріїв якості для перевірки належності параметра допустимій множині можемо розглянути такі:

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \quad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha) - x_{\exp}(t)) < \varepsilon, \ t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв

Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів математичної моделі формування ринкової вартості акції або портфеля акцій) визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_i^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i^j, \quad i = 1, 2.$$

Для цього розв'яжемо задачу одномірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p,q)$ – функція відстані між точками p та q.

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\overline{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати "гарантованою еліпсоїдальною оцінкою" параметрів моделі (1), побудованою на основі критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d): \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\}, \quad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha \in R^n$; d – геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^n$. Множину (7) будемо називати "гарантованою множинною оцінкою", якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j,$$

де k – кількість точок.

На $k+1$ – кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$
$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1})) <$$
$$(B^k(\alpha_{\bar{i}} - d^k), \alpha_{\bar{i}} - d^k),$$

де $\bar{i} = \arg\max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$.

$$(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1.$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j, (j – номер кроку процедури такий, що $(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує виконання обраних критеріїв якості.

Іншим підходом до розв'язання задачі параметричної ідентифікації є застосування функцій чутливості.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t,r,\alpha)$, де $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$. Вважатимемо також, що мають місце початкові умови $r(t_0)=r_0=r_0(\alpha)$, $t_0=t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром і $\alpha=\alpha_1$, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці $\rho_{ij}-$ коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r,α, а також за неперервної диференційованості функцій r_0,t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t,\alpha_1)=\frac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}.$$

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial r}u+\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1} \tag{8}$$

при початковій умові

$$u(t_0)=\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}-f(r_0(\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \tag{9}$$

Рівняння (9) отримано прямим диференціюванням $u(t,\alpha_1)$ за α_1, а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t,\alpha_1)=\int_{t_0(\alpha_1)}^{t} f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)d\tau+r_0(t_0,\alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t,\alpha_1)=\frac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}=$$

$$\int_{t_0(\alpha_1)}^{t}\left[\begin{array}{c}\dfrac{\partial f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial r}u(\tau,\alpha_1)+\\ \dfrac{\partial f(r(t,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}\end{array}\right]d\tau+$$

$$\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}-f(r(t_0(\alpha_1),\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \tag{10}$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t=t_0$.

Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1,α_2 математичної моделі (1). Математична задача має такий вигляд

$$\min_{\alpha_{i1},\alpha_{i2}}(r_i(t,\alpha_{i1},\alpha_{i2})-z_i(t))^2,\quad t\in[t_0,T].$$

Тут $z_i(t)-$спостереження за поведінкою ціни акції на ринку.

2. Алгоритм 3 побудови параметрів математичної моделі (1).

Розглянемо рівняння формування динаміки ринкової вартості однієї акції у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt}=(\alpha_1 SM_{ind}(t)+\alpha_2 I(t))r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}r_j(t)+\xi(t), \tag{11}$$

Тут α_1,α_2-параметри моделі; $\rho_{ij}-$враховує кореляційні залежності між акціями, $-1\le\rho_{ij}\le 1$; $\varsigma(t)-$вектор збурень.

У випадку, якщо $\alpha_1,\alpha_2=\mathrm{const}$, із (20) можемо отримати

$$(\alpha_1 SM_{ind}(t)+\alpha_2 I(t))r(t)+\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}=(\xi(t)-\frac{dr}{dt})r^{-1}(t), \tag{12}$$

У матричному вигляді

$$\alpha=(\xi-\dot R)R^{-1}. \tag{13}$$

Якщо вектори $\dot r,r,\xi$ є доступними для визначення, то (13) можна розглядати як прямий алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі. Похибка ідентифікації лінійно залежить від похибок визначень $\dot r,\xi$. Аналіз (13) вказує на те, що вплив похибок визначень r на оцінювання параметрів збільшується, якщо рівняння системи погано обумовлені, тобто коли матриця R близька до особливої, а визначник цієї матриці $|R|$ близький до 0. Для того, щоб рівняння

$$\dot R-\alpha R=\xi$$

було добре обумовленим, необхідно, щоб вектори $r_i(t)$ були незалежними. Якщо ж процес є стохастичним, то ця умова зводиться до некорельованості значень $r(t_i)$, $i=\overline{1,k}$.

Подальша процедура ідентифікації параметрів моделі зводиться до отримання розв’язку рівняння (13) для різних моментів часу $t\in[t_0,T]$.

Побудувавши розв’язки рівняння (13) для $k+2-$моментів часу, отримаємо систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі.

Розглянувши $\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Важливим недоліком першої частини алгоритму є те, що в ньому відсутнє усереднення або згладжування змінних, оскільки мають місце не лише ринкові, але і спекулятивні операції. Це може викликати великі похибки результатів обчислень у випадках, коли величини $\dot{r}, r, \xi$ спостерігаються у поєднанні зі збуреннями.

Помножимо (13) справа на r^T і осереднимо за інтервалом $t \in [t_0, T]$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt + \frac{1}{T}\alpha\int_{t_o}^{T} rr^T dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt .$$

Вважаючи, як і раніше, що $\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const}$, отримаємо

$$\alpha = (\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{T} rr^T dt)^{-1}.$$

Модифікацією цього підходу може слугувати алгоритм розрахунку середніх значень параметрів на відрізку $[t_0, t_0 + T_k]$ при достатньо значній їх зміні в межах вказаного інтервалу

$$\alpha = (\int_{t_o}^{t_0+T_k}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{t_0+T_k}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{t_0+T_k} rr^T dt)^{-1}.$$

Помножимо (13) справа на r^T і осереднимо за інтервалом $t \in [t_0, T]$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt + \frac{1}{T}\alpha\int_{t_o}^{T} rr^T dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt .$$

Вважаючи, як і раніше, що $\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const}$, отримаємо

$$\alpha = (\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{T} rr^T dt)^{-1}.$$

Модифікацією цього підходу може слугувати алгоритм розрахунку середніх значень параметрів на відрізку $[t_0, t_0 + T_k]$ при достатньо значній їх зміні в межах вказаного інтервалу

$$\alpha = (\int_{t_o}^{t_0+T_k}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{t_0+T_k}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{t_0+T_k} rr^T dt)^{-1}.$$

Побудувавши розв’язки рівняння (13) для $k+2-$моментів часу, отримаємо систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі. Розглянувши $\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Для математичних моделей динаміки формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій розглянуто задачі про ідентифікацію параметрів. Розроблено алгоритми пошуку гарантованих множинних оцінок таких параметрів.

Список використаних джерел

1. *Шарп У.* Инвестиции / *Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли.* –Москва: Инфра-М, 1999. –с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. –с. 3-10.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.

2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005*)* Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p.3-10.

Надійшла до редколегії 10.10.2014 р.