

УДК 517.54:519.63

А. П. Власюк¹, д.т.н., професор,
Т. А. Дроздовський², аспірант.

**Побудова числових конформних відображень
багатозв'язних областей складної
геометричної форми**

¹ Міжнародний економіко-гуманітарний
університет імені акад. Степана Дем'янчука,
33027, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука, 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com.

² Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: taras.drozdovskyi@gmail.com.

A. P. Vlasyuk¹, Doctor of Engineering, Professor,
T. A. Drozdovskiy², PhD Student.

**Numerical conformal mapping generating of
multiconnected domains with complicated
geometrical boundary**

¹ International university of Economics and
Humanities named after Academician Stepan
Demianchuk, 33027, Rivne acad. Stepan
Demianchuk str., 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com.

² National University of Water Management and
Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str.,
11, e-mail: taras.drozdovskyi@gmail.com

Сформульовано математичну постановку задачі конформного відображення багатозв'язної області складної геометричної форми з чотирма відміченими точками на її зовнішньому контурі на параметричний прямокутник з розрізом. Розроблено та програмно реалізовано обчислювальний алгоритм побудови її числового конформного відображення. Розроблено генератор побудови конформних різницьових сіток в таких областях.

Ключові слова: числове конформне відображення, конформна різницєва сітка, обчислювальний алгоритм, числові експерименти.

Conformal mapping of multiconnected domain with four fixed points on its outer boundary on the parametric rectangle with section problem mathematical statement is formulated. Conformal mapping constructing computational algorithm of mentioned domain was elaborated and implemented in software. Conformal differences grid generator was developed for those domains.

Key Words: numerical conformal mapping, conformal difference grid, computational algorithm, numerical experiments.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Досить актуальним для розв'язування крайових задач математичної фізики для диференціальних рівнянь з частинними похідними є сіткове або вузлове покриття розглядуваної області, оптимальна побудова якого спрощує обчислення і підвищує їх точність. Оптимальним для методу скінченних різниць є використання конформних відображень, які при деяких модифікаціях можуть бути застосовані і для інших числових методів. Конформні відображення знаходять широке застосування для числового розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач математичної фізики [1, 3, 16]. Особливий інтерес і складність представляє побудова конформних відображень в багатозв'язних областях складної геометричної форми [5, 7, 9] та

в областях з вільними межами [2]. Розробка відповідних алгоритмів значно поширює можливість розв'язування задач, що описують реальні фізичні процеси в гідро- та газодинаміці, теорії електромагнетизму, теорії фільтрації, тепло- та масоперенесення і т.д. [6, 9].

У науковій літературі розвинуто декілька підходів до побудови конформних відображень [10, 11, 12, 15].

Першим і найпростішим є відшукання аналітичних функцій, якими здійснюється відображення, проте такі функції відомі для обмеженого числа областей [10, 11].

Різновидом цього підходу можна виділити підбір функції, що володіє властивістю розтягу області, наприклад, до круга [14].

Другим підходом є відшукання параметрів

інтегралу Кристоффеля-Шварца для відображення області на многокутник. Проте коефіцієнти в загальному випадку не відомі і їх обчислення може потребувати значних затрат і також буде виконуватись наближено.

Тут застосовано підхід, який базується на розгляді функціоналу Рімана та побудові диференціальних рівнянь на отримання пари гармонічних функцій, якими і здійснюється відображення [1, 2].

Відображення багатозв'язних областей у більшості випадків передбачає зведення області до однозв'язної причому лінія розрізу може бути як фіксована так і встановлюватись в процесі побудови відображення [4].

У роботі [16] при побудові числових конформних відображень багатозв'язних областей використано також розрізання області та її подальше відображення на прямокутник, що зовнішній контур повністю відображається в одну із сторін прямокутника (наприклад, нижню), всі внутрішні контури, сполучені розрізами, відображаються в протилежну, лінія розрізу, що сполучає внутрішній контур із зовнішнім – в дві інші сторони прямокутника (при цьому враховуються умови періодичності).

У даній роботі реалізоване числове конформне відображення багатозв'язної області складної геометричної форми зі збереженням відображення зовнішнього контуру, який відображається у зовнішній контур параметричного прямокутника, а чотири відмічені точки – в чотири його вершини, внутрішні контури, сполучені розрізами, відображаються в розріз на одній із ліній сітки.

1. Постановка задачі побудови конформного відображення

Нехай потрібно конформно відобразити деяку багатозв'язну область з чотирма відміченими точками на її зовнішньому контурі, розрізану певним чином, у фізичній області G_z площини (x, y) (рис. 1) на параметричний

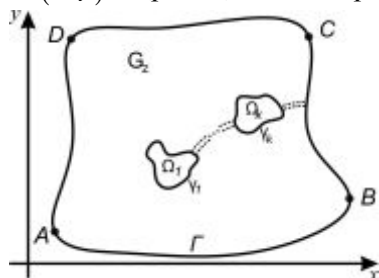


Рис. 1. Багатозв'язна область у фізичній області з 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі

прямокутник з розрізом G_ζ площини (ξ, η) (рис. 2). При цьому чотири відмічені точки A, B, C, D на зовнішньому контурі області G_z відображаються у вершини A', B', C', D' параметричного прямокутника G_ζ відповідно, а внутрішній контур $\gamma = \bigcup_{k=1}^d \gamma_k$ – у відповідний

розріз $\gamma' = \bigcup_{k=1}^d \gamma'_k$ параметричного прямокутника.

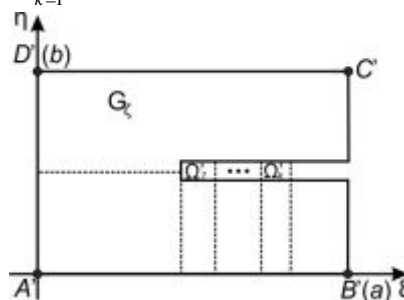


Рис. 2. Параметричний прямокутник з розрізом в комплексній області

2. Математична постановка задачі побудови числового конформного відображення в фізичній області площини (x, y)

Провівши нескінченно тонкі розрізи в фізичній області G_z , відобразимо конформно так розрізану область (рис. 1) на параметричний прямокутник (рис. 2) за допомогою функції

$$\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y), \quad (1)$$

дійсна і уявна частина якої, як відомо, задовольняє умовам Коші-Рімана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

На межі області G_z виконуються такі граничні умови:

$$\xi|_{AD} = 0, \quad \xi|_{BC} = a, \quad \eta|_{AB} = 0, \quad \eta|_{CD} = b, \quad (3)$$

$$\eta|_{\gamma_k} = b_0, \quad (4)$$

де b_0 визначається формою області, формою та положенням внутрішніх контурів.

Координати точок на межах зв'язані рівняннями, що задають дані межі

$$f_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, 4},$$

$$g_k(x, y) = 0, \quad k = \overline{1, d},$$

де $f_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ - рівняння кривих Γ_i ,
 $i = \overline{1, 4}$ зовнішнього контуру Γ , $g_k(x, y) = 0$,
 $k = \overline{1, d}$ - рівняння внутрішніх контурів γ_k .

Крім того, в околі меж Γ , γ_k багатозв'язної області виконуються додаткові умови «зв'язку» межових точок з внутрішніми у вигляді, наприклад, умов ортогональності ізоліній сітки до меж області:

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0. \quad (5)$$

$$\Phi(\xi, \eta, M) = \iint_{G_z} \left[\left(\frac{\xi_x}{\sqrt{M}} - \sqrt{M} \eta_y \right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{\sqrt{M}} + \sqrt{M} \eta_x \right)^2 \right] dx dy + \iint_{G_z} (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) dx dy. \quad (7)$$

З теорії конформних відображень відомо, що існує не вироджене однолисне конформне відображення $\bar{\zeta}(z) = \bar{\xi}(x, y) + i\bar{\eta}(x, y)$ області G_z на прямокутник $G_{\bar{\zeta}}$ з деяким певним відношенням сторін $M = a/b$, яке називається модулем прямокутника, тобто існують $\bar{\xi}, \bar{\eta}, M$ такі, що

$$\bar{\xi}_x = \bar{\eta}_y, \quad \bar{\xi}_y = -\bar{\eta}_x, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{\xi} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{M}} \right], \quad \bar{\eta} \in \left[0, \sqrt{M} \right].$$

З (7) видно, що функції $\xi(x, y) = \sqrt{M} \cdot \bar{\xi}(x, y)$, $\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \bar{\eta}(x, y)$ надають мінімум функціоналу (6).

Рівняння Ейлера, які виражають необхідну умову існування екстремуму функціоналу (6), в даному випадку мають вигляд [8]

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$M^2 = \frac{\iint_{G_z} (\xi_x^2 + \xi_y^2) dx dy}{\iint_{G_z} (\eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy}. \quad (10)$$

Єдиність розв'язку задачі (9) з крайовими умовами (3), (5) доведено в роботі [1]. Доведення єдності розв'язку для даної задачі з урахуванням умови (4) проводиться аналогічно.

Обчислювальний алгоритм побудови числового конформного відображення базується на розгляді функціоналу Рімана [8]

$$\Phi(\xi, \eta, M) = \iint_{G_z} \left(\frac{\xi_x^2}{M} + M \eta_x^2 + \frac{\xi_y^2}{M} + M \eta_y^2 \right) dx dy. \quad (6)$$

Функціонал (6) можна представити в такому вигляді:

3. Математична постановка задачі побудови числового конформного відображення в комплексній області площини (ξ, η)

Обернене конформне відображення $G_{\bar{\zeta}} \rightarrow G_z$ здійснюється аналітичною функцією

$$z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta), \quad (11)$$

дійсна і уявна частина якої задовольняє умовам Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta}. \quad (12)$$

На зовнішньому контурі справедливі умови

$$f_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (13)$$

На внутрішніх контурах виконуються такі залежності:

$$g_k(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad k = \overline{1, d} \quad (14)$$

та умови ортогональності

$$\text{grad } x(\xi, \eta) \cdot \text{grad } y(\xi, \eta) = 0. \quad (15)$$

На основі (15) умову ортогональності ізоліній сітки можна записати ще у такому вигляді:

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0. \quad (16)$$

В силу регулярності відображення $\zeta(z)$ з якобіаном $J > 0$, обернене відображення (11) існує і його дійсна і уявна частина $x(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, $y(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \alpha \cdot x_{\bar{\xi}\bar{\xi}} - 2\beta \cdot x_{\bar{\xi}\bar{\eta}} + \gamma \cdot x_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = 0, \\ \alpha \cdot y_{\bar{\xi}\bar{\xi}} - 2\beta \cdot y_{\bar{\xi}\bar{\eta}} + \gamma \cdot y_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{x_{\bar{\eta}}^2 + y_{\bar{\eta}}^2}{J_1}, \quad \beta = \frac{x_{\bar{\xi}}x_{\bar{\eta}} + y_{\bar{\xi}}y_{\bar{\eta}}}{J_1}, \quad \gamma = \frac{x_{\bar{\xi}}^2 + y_{\bar{\xi}}^2}{J_1},$$

$J_1 = x_{\bar{\xi}}y_{\bar{\eta}} - x_{\bar{\eta}}y_{\bar{\xi}}$ – якобіан оберненого конформного відображення.

В змінних $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ формула (10) для модуля параметричного прямокутника прийме вигляд [2]

$$M^2 = \frac{\iint_{G_z} \alpha d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{\iint_{G_z} \gamma d\bar{\xi} d\bar{\eta}} = \frac{\int_0^1 d\bar{\eta} \int_0^1 \alpha(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi}}{\int_0^1 d\bar{\eta} \int_0^1 \gamma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi}}. \quad (18)$$

З врахуванням умов ортогональності ізоляційної сітки $\beta \equiv 0$ і система рівнянь (17) запишеться

$$\begin{cases} \alpha x_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + \gamma x_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = 0, \\ \alpha y_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + \gamma y_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система нелінійних диференційних рівнянь (19) є генеруючою і використовується для розрахунку координат внутрішніх вузлів конформної різницевої сітки.

Модуль області, обчислений за формулою (18), будемо називати головним модулем так як він обумовлений чотирма відміченими точками на зовнішньому контурі області G_z . Проте розглядуване конформне відображення володіє ще $(s-1)$ модулем (де s - зв'язність області). Ці модулі відповідають $(s-1)$ підобластям, які виключаються з даної області, а в дискретному варіанті визначають номери ізоляційної конформної різницевої сітки, між якими розміщені («затиснуті») $(s-1)$ внутрішніх підобластей-включень, які виключаються з даної області і визначають її зв'язність.

4. Обчислювальний алгоритм побудови конформної різницевої сітки

Для побудови числового конформного відображення, використаємо генеруючу систему нелінійних диференційних рівнянь (19) з відповідними крайовими умовами (13), (14), (16) з врахуванням (18). Числовий розв'язок даної оберненої крайової задачі отримаємо методом скінченних різниць [12]. Для цього покриємо параметричний прямокутник $G_{\bar{\xi}}$ рівномірною

різницевою сіткою $w = \{(\xi_i, \eta_j) | \xi_i = ih_1, \eta_j = jh_2\}$, $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$, з кроками h_1, h_2 відповідно по осях $O\xi$ та $O\eta$ комплексної площини (ξ, η) .

Окрім того, лінія (i, m_0) , яка відповідає розрізу, роздвоюється на точках $\bigcup_{k=1}^d \bigcup_{p=nk_1}^{nk_2} (p, m_0)$,

які, в свою чергу, відповідають внутрішнім контурам. Для розрізнення таких точок, використовуватимемо індекс «+» – для точок, які лежать вище розрізу, і «-» – для точок, які лежать нижче розрізу.

Для знаходження координат вузлів конформної різницевої сітки, розв'язуємо задачу (19) з граничними умовами (13), (14), (16). Обчислювальний алгоритм побудови різницевої сітки наступний. Спочатку при фіксованому положенні «плаваючих» вузлів сітки на межі області визначаємо положення внутрішніх вузлів шляхом наближеного розв'язання системи різницевої рівнянь в результаті дискретизації (19). Далі при фіксованих внутрішніх вузлах знаходяться нові положення «плаваючих» вузлів по межах області.

Різницеву сітку будується в результаті багатократного повторення цих ітераційних процесів.

Потім отримана сітка перевіряється на «кофнормність» і, при потребі, змінюється кількість розбиттів сітки або значення модуля області.

4.1. Уточнення координат внутрішніх вузлів конформної різницевої сітки

Провівши дискретизацію системи нелінійних диференційних рівнянь (19) та лінеаризувавши її на деякому кроці, отримуємо

$$\begin{cases} \alpha^{(s-1)} x_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{(s)} + \gamma^{(s-1)} x_{\bar{\eta}\bar{\eta}}^{(s)} = 0, \\ \alpha^{(s-1)} y_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{(s)} + \gamma^{(s-1)} y_{\bar{\eta}\bar{\eta}}^{(s)} = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

де s – номер зовнішньої ітерації.

Розв'язок даної системи для пари координат відображення $x(\xi, \eta)$ і $y(\xi, \eta)$ отримуємо методом послідовної верхньої релаксації

$$u_{ij}^{(k+1)} = \omega \cdot \hat{u}_{ij}^{(k)} + (1 - \omega) \cdot u_{ij}^{(k)}, \quad (21)$$

$$\text{де } \hat{u}_{ij}^{(k+1)} = \frac{\alpha(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k) + \gamma(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k)}{2(\alpha + \gamma)},$$

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho^{(s)})^2}},$$

$$\alpha = \left(x_{i,j+1}^{(s-1)} - x_{i,j-1}^{(s-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(s-1)} - y_{i,j-1}^{(s-1)}\right)^2, \quad (22)$$

$$\gamma = \left(x_{i+1,j}^{(s-1)} - x_{i-1,j}^{(s-1)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(s-1)} - y_{i-1,j}^{(s-1)}\right)^2. \quad (23)$$

Значення спектрального радіуса на першій ітерації приймаємо наступним:

$$\rho^{(0)} = 1 - 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{\pi}{2m} \right).$$

Далі можна скористатись такою формулою [4]

$$\rho^{(s)} = 1 - 2 \min_{i,j} \frac{1}{\alpha + \gamma} \left(\alpha \sin^2 \frac{\pi i}{2n} + \gamma \sin^2 \frac{\pi j}{2m} \right), \quad s = 1, 2, \dots$$

Для точок зліва і справа від розрізу, які примикають до контура на розрізі, коефіцієнти у формулі (21) мають особливий вигляд. Наприклад, для точки зліва вони записуються так:

$$\hat{u}_{im_0}^{(k+1)} = \frac{\alpha \left(u_{i-1,m_0}^{k+1} + u_{i+1,m_0}^k\right) + \gamma_+ \left(u_{i,m_0-1}^{k+1} + u_{i,m_0+1}^k\right)}{4(\alpha + \gamma_+)} +$$

$$+ \frac{\alpha \left(u_{i-1,m_0}^{k+1} + u_{i+1,m_0}^k\right) + \gamma_- \left(u_{i,m_0-1}^{k+1} + u_{i,m_0+1}^k\right)}{4(\alpha + \gamma_-)},$$

$$\gamma_+ = \left(x_{i+1,m_0+}^{s-1} - x_{i-1,m_0+}^{s-1}\right)^2 + \left(y_{i+1,m_0}^{s-1} - y_{i-1,m_0}^{s-1}\right)^2,$$

$$\gamma_- = \left(x_{i+1,m_0-}^{s-1} - x_{i-1,m_0-}^{s-1}\right)^2 + \left(y_{i+1,m_0-}^{s-1} - y_{i-1,m_0-}^{s-1}\right)^2.$$

Тут під u розуміються функції x та y у координат оберненого відображення.

Обчислення за формулою (21) проводимо до досягнення заданої точності

$$\max_{ij} \left(\left| x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)} \right| + \left| y_{ij}^{(k+1)} - y_{ij}^{(k)} \right| \right) \leq \varepsilon_1,$$

де ε_1 - необхідне значення точності, яке залежить від розміру області та кількості ізоляційної сітки, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

4.2. Уточнення координат «плаваючих» вузлів різницевої сітки по межах області

Одним з обов'язкових етапів побудови конформної (ортогональної) сітки є уточнення вузлів, які знаходяться на зовнішній або внутрішній межі області і в ході роботи алгоритму «плавають» по ній. Перерахунок координат здійснюється з використанням одного із способів:

- одна координата обчислюється з

дискретизації умов Коші-Рімана, інша з рівняння межі за однією відомою координатою;

- з умови ортогональності градієнтів;

- геометричною побудовою нормалі з точки до лінії (профілю межі області);

- обчислення нормалі до сплайн-апроксимації межі.

Запишемо в загальному різниці співвідношення для визначення координат "плаваючих" вузлів, які потрібно доповнити умовами (13) для відповідних меж, зокрема для межі Γ_1 :

$$\left(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}\right) \left(-x_{i2} + 4x_{i1} - 3x_{i0}\right) +$$

$$+ \left(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}\right) \left(-y_{i2} + 4y_{i1} - 3y_{i0}\right) = 0;$$

для межі Γ_2 :

$$\left(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}\right) \left(-x_{i,m-2} + 4x_{i,m-1} - 3x_{i,m}\right) +$$

$$+ \left(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}\right) \left(-y_{i,m-2} + 4y_{i,m-1} - 3y_{i,m}\right) = 0;$$

для меж Γ_1 та Γ_2 $i = \overline{1, n-1}$;

для межі Γ_3 :

$$\left(-x_{2j} + 4x_{1j} - 3x_{0j}\right) \left(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}\right) +$$

$$+ \left(-y_{2j} + 4y_{1j} - 3y_{0j}\right) \left(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}\right) = 0;$$

для межі Γ_4 :

$$\left(-x_{n-2j} + 4x_{n-1j} - 3x_{nj}\right) \left(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}\right) +$$

$$+ \left(-y_{n-2j} + 4y_{n-1j} - 3y_{nj}\right) \left(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}\right) = 0;$$

для меж Γ_3 та Γ_4 $j = \overline{1, m-1}$.

Умови «плавання» по лінії розрізу отримуються аналогічним чином.

Нехай потрібно уточнити координати вузла C , який «плаває» по частині межі області G_z (рис. 3), заданої аналітично, наприклад, у явному вигляді $y = g(x)$, якому відповідає внутрішній вузол D різницевої сітки, що прилягає до даного вузла C . Таким чином вектор CD має співпадати з вектором нормалі до межі області G_z .

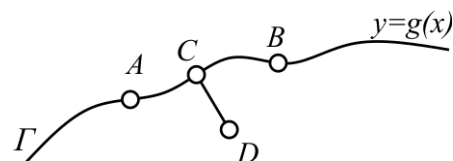


Рис. 3. Схема уточнення координати «плаваючого» вузла по межі Γ області G_z

З умови колінеарності двох векторів (вектора CD і вектора нормалі) отримуємо

$$\frac{d}{dx} g(x_c) \approx \frac{x_c - x_d}{y_c - y_d}.$$

На основі цього, отримуємо формули для проведення ітерацій для уточнення координат «плаваючого» вузла C

$$x_C^{(k+1)} = x_D^{(k+1)} - \left(y_D^{(k+1)} - g(x_C^{(k+1)}) \right) g'(x_C^{(k)}),$$

$$y_C = g(x_C), \quad k = 1, 2, \dots$$

У випадку громіздкості функції $y = g(x)$ можемо скористатись ознакою нормалі (найменша відстань від точки до кривої). Тоді одну з координат «плаваючого» вузла C знайдемо, як аргумент мінімуму відстані від точки D до кривої Γ

$$x_C = \arg \min_{x \in D(g)} \sqrt{(x_D - x)^2 + (y_D - g(x))^2},$$

де $D(g)$ - область визначення функції $y = g(x)$.

У випадку, якщо межі області G_z апроксимуються достатньо густою таблицею точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$, то інтерполюємо їх параметричним кубічним сплайном, який між точками $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ має вигляд

$$x = s_{x,i}(t) = a_{x,i}t^3 + b_{x,i}t^2 + c_{x,i}t + d_{x,i},$$

$$y = s_{y,i}(t) = a_{y,i}t^3 + b_{y,i}t^2 + c_{y,i}t + d_{y,i},$$

де $t \in [0, 1)$, $i = 0, r-1$.

На основі побудованого інтерполюючого наближення, знаходимо необхідне значення параметра t для обчислення координат «плаваючого» вузла C

$$t = \arg \min_{u,i} \sqrt{(x_D - s_{x,i}(u))^2 + (y_D - s_{y,i}(u))^2},$$

де $u \in [0, 1)$ для кожного $i = 0, r-1$.

4.3. Уточнення модулів області

Головний модуль області G_z обчислюється за формулою

$$M = \frac{a}{b} = \frac{n \cdot h_1}{m \cdot h_2} = \frac{n \cdot h_1}{m \cdot k \cdot h_1}.$$

Звідки

$$M^2 = \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

На основі (18) введемо позначення

$$L = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}},$$

де $I_1 = \int_0^b d\eta \int_0^a \alpha J_1 d\xi$, $I_2 = \int_0^b d\eta \int_0^a \gamma J_1 d\xi$ – інтеграли,

які легко обчислюються за відомими квадратурними формулами, α, γ, J_1 – функції координат (ξ, η) конформного відображення, які описані вище.

На основі вищевикладеного, отримаємо

$$L = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{k}.$$

В результаті реалізації повного циклу алгоритму і перерахувавши значення модуля, здійснюємо наступне:

- змінюємо кроки h_1, h_2 різницевої сітки параметричного прямокутника

$$h_2 = \frac{n}{L \cdot m} \cdot h_1;$$

- змінюємо кількість розбиттів сторін параметричного прямокутника

$$n = L \cdot m \frac{h_2}{h_1}.$$

Таким чином, проводимо перебудову різницевої сітки з метою її покращення

Уточнення наступних решти $(s-1)$ модулів (де s – зв'язність області) реалізовано у напівавтоматичному режимі в ході роботи алгоритму і описане у п. 4.5.

4.4. Перевірка сітки на «конформність»

Для перевірки отриманої різницевої сітки на «конформність», використовуємо низку критеріїв «конформності» різницевої сітки за отриманими вузлами [3]. Розглядатимемо критерії на множині всіх вузлів, крім фіксованих точок у вершинах прямокутника – Q_{all} та множині внутрішніх вузлів – Q_{inner} (рис. 4).

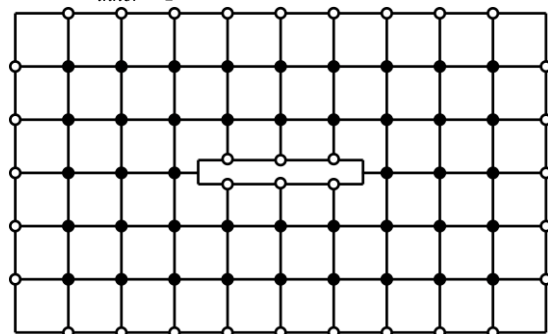


Рис. 4. Множини вузлів сітки

На рисунку 4 вузли множини Q_{inner} позначені чорним кольором, множина Q_{all} крім чорних вузлів включає ще й «виколоті» вузли. Зауважимо, що ні одна з множин не включає чотири відмічені вузли у вершинах прямокутника.

Перших два критерії відповідають ознакам прямокутності клітинок сітки: рівність діагоналей та рівність протилежних сторін чотирикутника. Перший критерій реалізується відношенням довжин діагоналей, другий – сумою відношень довжин протилежних сторін. Для регуляризації відношень, використаємо функцію $w(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Остаточні критерії матимуть такий вигляд:

$$k_1 = \max_{ij \in Q} \left(\frac{d_{ij}^{(1)}}{d_{ij}^{(2)}} + \frac{d_{ij}^{(2)}}{d_{ij}^{(1)}} \right) - 2, \quad (24)$$

$$k_2 = \max_{ij \in Q} \left(\frac{a_{ij}^1}{a_{ij}^2} + \frac{a_{ij}^2}{a_{ij}^1} + \frac{b_{ij}^1}{b_{ij}^2} + \frac{b_{ij}^2}{b_{ij}^1} \right) - 4, \quad (25)$$

де

$$d_{ij}^{(1)} = \|z_{ij} - z_{i+1, j+1}\|, \quad d_{ij}^{(2)} = \|z_{i+1, j} - z_{i, j+1}\|,$$

$$a_{ij}^1 = \|z_{ij} - z_{ij+1}\|, \quad a_{ij}^2 = \|z_{i+1, j} - z_{i+1, j+1}\|,$$

$$b_{ij}^1 = \|z_{ij} - z_{i+1, j}\|, \quad b_{ij}^2 = \|z_{ij+1} - z_{i+1, j+1}\|,$$

$\|z\|$ – довжина вектора $z = (x, y)$:

$$\|z_{kl} - z_{pq}\| = \sqrt{(x_{kl} - x_{pq})^2 + (y_{kl} - y_{pq})^2}.$$

Третій критерій – найменше значення синуса кута між координатними лініями [1], який обчислюємо за формулою

$$\sin \alpha = \frac{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}{\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}}.$$

Регуляризації досягаємо відніманням модуля значення синуса від одиниці. Критерій обчислюємо за формулою

$$k_3 = 1 - \min_{(i, j) \in Q} \frac{|x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|}{\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}}. \quad (24)$$

При обчисленні критерію за формулою (24) замість похідних обчислюватимемо значення їх різницевої аналогів (центральної або уточненої) на основі отриманих координат вузлів сітки.

Оптимальною є різницева сітка, для якої значення всіх трьох критеріїв прямують до нуля.

4.5. Конструктивна перевірка різницевої сітки

Перевірка правильності визначення номерів ізоляційної різницевої сітки для даної області, між якими знаходиться «включення», здійснюється експериментальним шляхом за наступним алгоритмом. Отримана різницева сітка розділяється по лінії $j = m_0$ на дві підобласті. Для кожної з них будується числове конформне відображення, яке й показує номери ліній n_{k1}, n_{k2} , що обмежують початок і кінець «включення».

5. Програмна реалізація, результати числових експериментів та їх аналіз

На основі описаного обчислювального алгоритму розроблено програмний комплекс «C-MaG» (Conformal Mapping Generator), реалізований засобами об'єктно-орієнтованої мови програмування C# в середовищі Microsoft Visual Studio 2010.

Окрім алгоритмів описаного дослідження, комплекс підтримує побудову числового конформного відображення однозв'язних областей, а також двозв'язних з іншим типом зведення до однозв'язної.

Інтерфейс програми (рис. 5) включає набір MDI-вікон:

- конструктор межі області;
- налаштування параметрів відображення;
- вікно перегляду візуалізації сітки;
- таблиці значень координат x_{ij} , y_{ij} вузлів сітки;
- значень характеристик побудованої сітки.

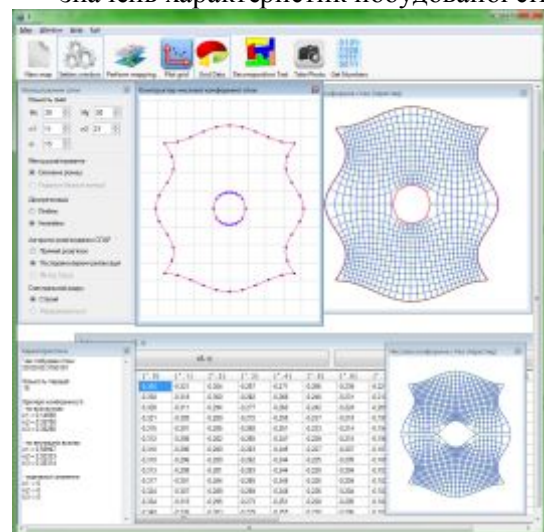


Рис. 5 Інтерфейс пакету «C-MaG»

Наведений алгоритм здійснює числове конформне відображення, при якому чотири відмічені точки на зовнішньому контурі області переходять у вершини параметричного прямокутника. Відмінність між побудованим відображенням та відображенням, при якому зовнішня межа переходить в одну сторону прямокутника, а внутрішні у протилежну [15], зображено на рис 6 а і б б.

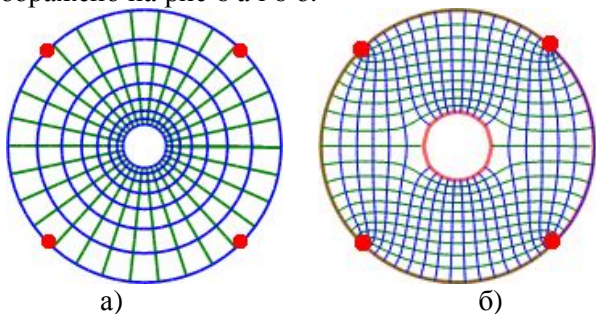


Рис. 6 Конформні різницеві сітки областей дискової форми з 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі, отримані різними методами

Нижче наведено приклади побудованих числових конформних відображень двохзв'язних і тризв'язних областей із 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі, які при відображенні переходять у вершини параметричного прямокутника.

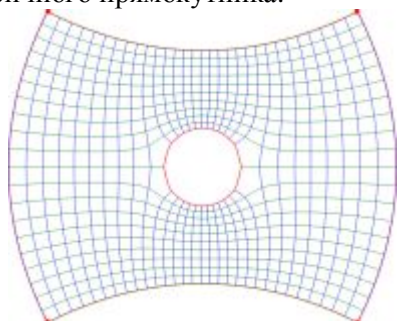


Рис. 7 Конформна різницева сітка в двохзв'язній неопуклій області

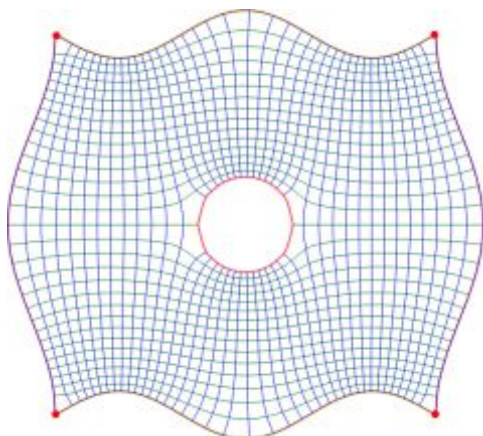


Рис. 8 Конформна різницева сітка в двохзв'язній неопуклій області

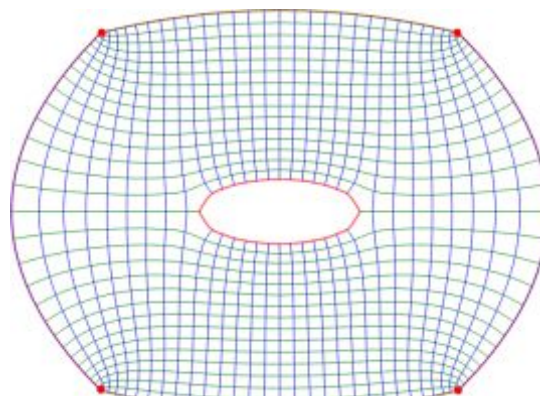


Рис. 9 Конформна різницева сітка в еліпсоподібній двохзв'язній області

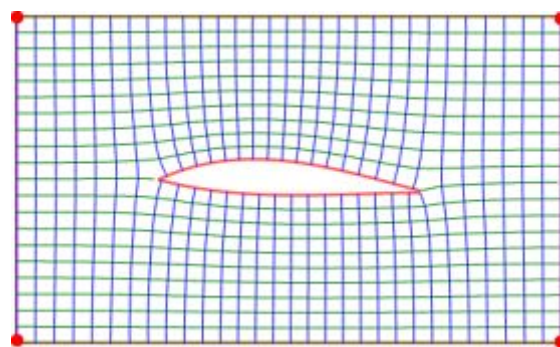


Рис. 10 Конформна різницева сітка при обтіканні крила в аеродинамічній трубці

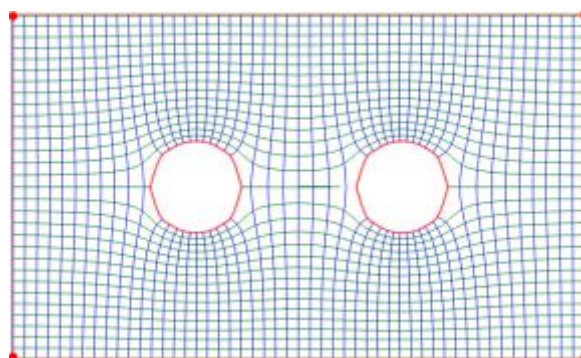


Рис. 11 Конформна різницева сітка в трьохзв'язній області

Значення критеріїв «коформності» для наведених областей занесено в таблиці 1 та 2.

Таблиця 1.

Значення критеріїв «коформності» для наведених різницевих сіток, обчислених з урахуванням всіх вузлів

Область	Значення критеріїв «коформності»		
	k_1	k_2	k_3
Рис. 7	0,041	0,227	0,232
Рис. 8	0,084	0,128	0,263
Рис. 9	0,078	0,153	0,458
Рис. 10	0,009	0,050	0,196
Рис. 11	0,084	0,112	0,380

Таблиця 2.
Значення критеріїв «конформності» для
наведених різницевих сіток, обчислених лише
для внутрішніх вузлів

Область	Значення критеріїв «конформності»		
	k_1	k_2	k_3
Рис. 7	0,127	0,215	0,240
Рис. 8	0,084	0,207	0,262
Рис. 9	0,075	0,153	0,093
Рис. 10	0,042	0,156	0,196
Рис. 11	0,075	0,108	0,0065

З таблиць 1 та 2 видно, що наведені алгоритми будують різницеві сітки, які задовольняють усім наведеним критеріям.

Список використаних джерел

1. Веретенцев В.А. Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного отображения / В.А. Веретенцев // В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 88-93.
2. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв'язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. (Препр. №3), – К., 1994. – 24 с.
3. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с „плавающими” узлами. – К., 1989. – 55 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т матем, 89.79).
4. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двух- и трехсвязных областей / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. (Препр. №2), – К., 1991. – 56 с.
5. Власюк А.П., Дроздовський Т.А. Комп'ютерна генерація конформних і квазиконформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми / А.П. Власюк, Т.А. Дроздовський // Тез. доп. XVI Міжнар. Конф. Прийняття рішень в умовах невизначеності – Ялта, 2010. – С.153–156.
6. Власюк А.П., Дячук Т.П. Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / А.П. Власюк, Т.П. Дячук / Вісник НУВГП Збірник наукових праць. Вип. 4(36) ч. 2 Рівне.- 2006. – С. 74–83.
7. Годунов С.К. Об автоматическом построении сеток для уравнений в конечных разностях в областях сложной формы / С.К. Годунов //

Результаты «декомпозиційного» тесту (п. 4.5) співпадають з побудованими сітками.

Висновки. В роботі розроблено достатньо ефективний обчислювальний алгоритм числової побудови конформних різницевих сіток в багатозв'язних областях складної геометричної форми. Проведена його програмна реалізація. Уточнено поняття критеріїв «конформності» різницевої сітки, які використовуються для її конструктивної побудови.

Проведені числові експерименти показали достатню ефективність даного алгоритму для побудови конформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми з криволінійними межами.

8. Actes Congr. Int. mathem., 1971. – 3, Paris, 1971. – С. 99-104.
8. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – 7, №5. – С. 1031-1059.
9. Годунов С.К., Ременский Е.И., Чумаков Г.А. Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений / С.К. Годунов, Е.И. Ременский, Г.А. Чумаков // Труды Ин-та матем. Сиб. Отд. АН СССР. – 1990. – Т. 18. С. 75–83.
10. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман – М.:ИЛ, 1963. – 406 с.
11. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям / В.И. Лаврик, В.Н. Савенков. – К.:Наукова думка, 1970. – 252 с.
12. Прокопов Г.П. Некоторые общие вопросы конструирования алгоритмов построения разностных сеток / Г.П. Прокопов – М., 1987. – 13 с. (Препр. АН СССР. Ин-т прикл. мат.; №98).
13. Самарский А.А. Численные методы математической физики: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.:Научный мир, 2003. — 316 с.
14. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отобразений / П.Ф. Фильчаков – К.:Наукова думка, 1964. – 532 с.
15. Шилов Б.Ф. О приближенном конформном преобразовании двухсвязных областей / Б.Ф. Шилов // Тр. Военно-механич. ин-та. – Л.: 1939. – С. 153-187.
16. Thompson J.F. Numerical Grid Generation / Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C. Wayne Mastin. – Mississippi:North-Holland. – 1985. – 327 p.

References

1. VERETENTSEV, V. (1989) Postroeniye raznostnoy setky v oblasti s kryvolynneynymy hranytsamy s pomoshch'yu konformnoho otobrazheniya *Aktualnye voprosy prykladnoy matematyky*. Moskva: Nvauka. pp. 88-93.
2. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1994) *Chyselne rozvyazuvannya odnogo klasu krayovykh zadach z vilnymy mezhamy v kryvoliniynyykh chotyrykutnykakh dlya eliptychnyykh system rivnyan*. Kiev.
3. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1989) *Avtomatycheskoe postroeniye konformnykh i kvazykonformnykh otobrazheniy chetyrekhholnykh oblastey s pomoshchyu raznostnykh setok s „plavayushchymy” uzlamy*. Kiev: Instytut matematyky.
4. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1991) *Avtomatycheskoe postroeniye konformnykh i kvazykonformnykh otobrazheniy dvukh- y trekhsvyaznykh oblastey*. Kiev Instytut matematyky.
5. VLASYUK, A., and DROZDOVSKYI, T. (2010) Kompyuterna heneratsiya konformnykh i kvazykonformnykh riznytsevykh sitok v oblastyakh skladnoyi heometrychnoyi formy. In *Problems of Decision Making under Uncertainties International Conference*, Monday 4th to Thursday 8th October 2010 at Yalta. Kiev pp.153–156.
6. VLASYUK, A., and DYACHUK, T. Kompyuterna vizualizatsiya hidrodynamichnykh poliv v oblastyakh z kryvoliniynymy mezhamy. *Visnyk NUVHP. Zbirnyk naukovykh prats*. 4(36) p.2. Rivne. pp. 74–83.
7. HODUNOV, S. (1971) Ob avtomatycheskom postroeniyy setok dlya uravnenyy v konechnyykh raznostyakh v oblastyakh slozhnoy formy. *Actes Congr. Int. mathem.* 3. Paris. pp. 99-104.
8. HODUNOV, S. and PROKOPOV, H. (1967) O raschetakh konformnykh otobrazheniy y postroeniyy raznostnykh setok. *Zhurn. vychysl. matematyky y mat. fizyky*. 7(5). pp. 1031-1059.
9. HODUNOV, S., REMENSKYY, E. and CHUMAKOV, H. (1990) Postroeniye raznostnykh setok v slozhnykh oblastyakh s pomoshch'yu kvazykonformnykh otobrazheniy. *Trudy Yn-ta matem. Syb. Otd. AN SSSR*. V. 18. pp. 75–83.
10. KOPPENFELS, V. and SHTALMAN, F. (1963) *Praktyka konformnykh otobrazheniy*. Moskva:YL.
11. LAVRYK, V. and SAVENKOV, V. (1970) *Spravochnik po konformnym otobrazheniyam*. Kiev:Naukova dumka.
12. PROKOPOV H. (1987) Nekotorye obshchye voprosy konstruyrovannya alhorytmov postroeniyya raznostnykh setok. *Prepr. AN SSSR. Yn-t prykl. mat.; №98*. Moskva.
13. SAMARSKYY, A. and HULYN, V. (2003) *Chyslennyye metody matematycheskoy fizyky: Ucheb. posobyе dlya vuzov*. Moskva:Nauchnyy myr.
14. FYLCHAKOV, P. (1964) *Pryblyzhennyye metody konformnykh ot obrazheniy*. Kiev:Naukova dumka.
15. SHYLOV, B. (1939) O pryblyzhennom konformnom preobrazovanii dvukhsvyaznykh oblastey *Tr. Voенno-mekhanych. yn-ta*. Leningrad. pp. 153-187.
16. THOMPSON, J., WARSI, Z., WAYNE MASTIN, C. (1985) *Numerical Grid Generation*. Mississippi:North-Holland.

Надійшла до редколегії 11.12.13