УДК 519.9

Демченко І.Ю., аспірант

# Про одну модель управління запасами

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: irinka_8891@mail.ru

I.Y. Demchenko, graduate student

# About one model of inventory control

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: irinka_8891@mail.ru

*Досліджується деяка модель управління запасами, для якої знаходяться умови оптимальності (s, S)-стратегії.*

*Ключові слова: (s, S)-стратегія, оптимальна стратегія, управління запасами.*

*In this paper it is considered the problem of inventory control of warehouse of infinite capacity. One of the most important challenges is to find the conditions when the optimal control problem can be reduced to a problem of stochastic programming. Of course, it allows to describe the searched optimal strategy. The paper presents conditions when it is possible. What is more, view of the optimal strategy was found. The result is formulated in the form of a theorem. It is considered a model of the inventory control system in stationary mode, besides the cost for one period of its operation are optimized. The quality of the operation of the system is determined by several features, namely the cost of maintaining the goods, fine for the goods shortage and the cost of the order of a new product. However, and in the situation when it is considered a system that operates in an unlimited time interval, and it is necessary to find a strategy that minimizes the average cost per unit of time, the problem can often be reduced to a stationary case.*

*Key Words: (s, S)-strategy, the optimal strategy, inventory control.*

Статтю представив д.т.н., проф. Кудін В.І.

Розглянемо задачу поповнення запасами деякого сховища нескінченної місткості. Припустимо, що в деякий момент часу рівень запасу дорівнює $x$. В момент перевірки наявного рівня запасу приймається рішення про його поповнення на величину $y - x$. Таким чином, стратегія замовлення – вибрати величину $y = y(x)$. Між моментами перевірок є попит на товар, що є випадковою величиною $\xi$ з функцією розподілу $F(\upsilon)$. Якість функціонування системи визначається деякими функціями $r_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, де $r_1(x) = cx$ – вартість утримання товару в кількості $x$ одиниць, $r_2(x)$ – штраф за дефіцит товару в кількості $x$ одиниць, $r_3(x) = K$ – вартість замовлення нового товару.

Розглянемо функцію втрат вигляду

$$W(x, y, \xi) = cy + r_2(\xi - y)I_{[y<\upsilon]} + KI_{[x<y]},$$

де $I_{[z<s]}$ – індикатор події $[z < s]$.

Визначимо функцію ризику наступним чином:

© І.Ю. Демченко, 2015

$$V(x,y) = E[W(x,y,\xi)] =$$
$$= cy + \int_{y^+}^{\infty} \varphi(\upsilon - y)dF(\upsilon) + KI_{[x<y]},$$
де
$\varphi(x) = r_2(x)I_{[x>0]}$.

Будемо казати, що $y = y(x)$ – оптимальна стратегія , якщо
$$V(x, y(x)) = \inf_{y \ge x} V(x,y)$$
для всіх $x \ge 0$.

Якщо існує функція $y = y(x)$ така, що
$$y(x) = SI_{[x<s]} + xI_{[x \ge s]}$$
для деяких констант $0 \le s \le S$, та
$$V(x, y(x)) = \min_{y \ge x} V(x,y)$$
для всіх $x \ge 0$, то будемо казати, що оптимальна стратегія є $(s,S)$-стратегією.

Справедливо наступне твердження.

**Лема.** Нехай виконуються умови:

1) функція $\varphi(z)$ монотонно не убуває та диференційована при $z > 0$;

2) $\varphi(0) = 0$;

3) рівняння $\int_{y^+}^{\infty} \varphi'(\upsilon - y)dF(\upsilon) = c$ має єдиний корінь.

Тоді існує $S > 0$ таке, що:

a) при $0 < y < S$ функція $V(y,y)$ монотонно не зростає;

b) якщо $c > 0$, то при $y > S$ функція $V(y,y)$ монотонно не убуває.

**Доведення.** Розглянемо функцію
$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi(\upsilon - y)dF(\upsilon) = \psi(y).$$

Покажемо, що функція $\psi(y)$ є монотонно незростаючою.

Позначимо
$$\zeta(x) = \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ 0, & \xi \le x. \end{cases}$$
Тоді
$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi(\upsilon - y)dF(\upsilon) = M\varphi(\zeta(y)).$$

Випадковий процес $\varsigma(x)$ є монотонно незростаючим, а функція $\varphi(z)$ – монотонно неубуваючою, оскільки $M\varphi(\zeta(y))$ – монотонно незростаюча функція.

Розглянемо функцію $V(y,y)$, знайдемо її похідну та прирівняємо до нуля:
$$V'(y,y) = c - \int_{y^+}^{\infty} \varphi'(\upsilon - y)dF(\upsilon),$$
$$V'(y,y) = 0,$$
тобто
$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi'(\upsilon - y)dF(\upsilon) = c.$$

Позначимо $S$ єдиний корінь останнього рівняння.

Тоді
$$\inf_{y \ge 0} V(y,y) = \min_{y \ge 0} V(y,y) = V(S,S).$$

Очевидно, що при $y \le S$ функція $V(y,y)$ монотонно не зростає, а при $y > S$ монотонно не убуває.

**Теорема.** Нехай виконуються умови леми. Тоді існують $0 \le s \le S$ такі, що $(s,S)$-стратегія є оптимальною.

**Доведення.** Розглянемо три випадки.

1. Нехай $x > S$. Тоді
$$V(x,y) = V(y,y) + KI_{[x<y]} \ge$$
$$\ge V(x,x) + KI_{[x<y]} \ge$$
$$\ge V(x,x)$$
для всіх $y \ge x$.

А це означає, що
$$\inf_{y \ge x > S} V(x,y) = \min_{y \ge x > S} V(x,y) = V(x,x).$$

2. Нехай $0 \le x < S$ та $V(0,0) < V(S,S) + K$. Тоді
$$V(x,y) =$$
$$= V(y,y) + KI_{[x<y]} \ge V(S,S) + KI_{[x<y]} =$$
$$= V(S,S) + K \ge V(0,0) \ge V(x,x)$$
для всіх $y \ge x$.

Отже,
$$\inf_{y \ge x,\, 0 \le x \le S} V(x,y) = V(x,x).$$

3. Нехай $0 \le x < S$ та $V(0,0) > V(S,S) + K$.

В силу леми $V(y,y)$ є монотонно незростаючою і неперервною справа для

$0 \le y \le S$. Тому існує точка $0 < s \le S$ така, що

$$V(s,s) = V(S,S) + K.$$

А це означає, що для $0 \le x < s \le y \le S$

$$V(0,0) \ge V(x,x) > V(s,s) =$$
$$= V(S,S) + K \ge V(y,y) \ge V(S,S).$$

Таким чином, маємо наступний результат.

1. Якщо $0 \le x < s \le S$, то

$$V(x,S) = V(S,S) + K = V(s,s) < V(x,x),$$

$$V(x,y) = V(y,y) + K \ge V(S,S) + K =$$
$$= V(x,S)$$

при $y > x$.

Це означає, що

$$\inf_{y \ge x,\, 0 \le x \le S} V(x,y) =$$
$$= \min_{y \ge x,\, 0 \le x \le S} V(x,y) = V(x,x).$$

2. Якщо $s \le x \le S$, то

$$V(x,y) = V(y,y) + K \ge V(S,S) + K =$$
$$= V(x,x)$$

при $y > x$.

Це означає, що

$$\inf_{y \ge x,\, 0 \le x \le s} V(x,y) =$$
$$= \min_{y \ge x,\, 0 \le x \le S} V(x,y) = V(x,x).$$

Таким чином, оптимальна стратегія $y = y(x)$ має вигляд

$$y(x) = SI_{[x<s]} + xI_{[x \ge s]}.$$

Теорема доведена.

Відносно знаходження точок s та $S$, можна помітити наступне. З леми випливає, що точка $S$ є єдиною точкою мінімума функції

$$V(y,y) = cy + M\varphi(\zeta(y)),$$

або

$$V(y,y) = E\psi(\xi, y),$$

де

$$\psi(\xi, y) = cy + \varphi(\xi - y)I_{[y<\upsilon]}.$$

Таким чином, знаходження точки $y \ge 0$, в якій досягається мінімум $V(y,y)$, – типова задача стохастичного програмування. Для її розв'язання можна скористатися, наприклад, методами роботи [1].

Точка $s$ – розв'язок рівняння

$$V(s,s) = V(S,S) + K,$$

для якого існує безліч методів вирішення.

**Список використаних джерел**

1. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования / Ю.М. Ермольев. – Москва: Наука, 1976. – 240 с.
2. *Wald A.* Statistical decision functions / A. Wald. – New York: Wiley, 1950. – 179 p.
3. *Howard R.* Dynamic programming and Markov processes / R. Howard. – New York: Wiley, 1960. – 136 p.
4. *Дынкин Е.Б.* Управляемые марковские процессы и их приложения / Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. – Москва: Наука, 1975. – 289 с.

**References**

1. ERMOLEV Y.M. (1976) *Methods of stochastic programming.* Moscow: Science.
2. WALD A. (1950) *Statistical decision functions.* New York: Wiley.
3. HOWARD R. (1960) *Dynamic programming and Markov processes.* New York: Wiley.
4. DYNKIN E.B., YUSHKEVICH A.A. (1975) *Controlled Markov decision processes and their applications.* Moscow: Science.

Надійшла до редколегії 10.03.2015