УДК 004.93

Донченко В.С.[1], д.ф.м.-н., професор,
Скотаренко Ф.М.[2], аспірант

Прямі формули Гревіля - Кириченка для матричних евклідових просторів

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т Глушкова 4д,

e-mail: voldon@bigmir.net
e-mail: fred.unicyb@gmail.com

V.S. Donchenko[1], D. Sci., Professor,
F.M. Skotarenko[2], postgraduate student

Direct formulas Greevil - Kirichenko for matrix Euclidean spaces

[1-2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: voldon@bigmir.net
e-mail: fred.unicyb@gmail.com

Пропонована робота використовує основні конструкції згаданої роботи [1] для подальшого розвитку техніки оперування в матричних евклідових просторах: для доведення твердження, на яке посилатимемось як на формулу Гревіля - Кириченка. Результат перетворення залежить від того, чи є рядок, яким розширюється матриця лінійно залежним чи ні від решти рядків матриці. Можна говорити також про таку саму задачу, але пов'язану з викреслюванням рядку чи стовпчика. Комбінація двох варіантів: викреслювання та розширення дають можливість досліджувати задачу опису зміни ПдО матриці за заміни рядка чи стовпчика на інший. Прикладне значення формул Гревіля - Кириченка в прямому варіанті: розширення, - чи в оберненому: викреслювання, - визначається тим, що техніка ПдО в лінійному регресійному аналізі дозволяє отримати повний опис задачі МНК- оцінювання параметрів як за виконання умов однозначності рівнянь Гаусса - Маркова (повний стовпчиковий ранг матриці плану). Формули Гревіля-Кириченка дозволяють конструктивно реалізувати етапи статистичного аналізу, пов'язані із появою у вибірці нових спостережень, вилученням певних спостережень - аутлайєрів, заміну одних спостережень на інші.

Ключові слова: матричні евклідові простори, ПдО матриці, формула Гревіля - Кириченка.

This paper uses the basic design mentioned in [1] for further development of technology operating in the matrix of Euclidean space, to prove the assertion for which cited as the formula Greevil - Kirichenko. Actually, in the classic version of this result [2] the question is how the PDO extension matrix of row or column. Considering switching PDO and transposition, the result is usually formulated for extension line option. The result of the transformation depends on whether the line which extends linearly dependent matrix or not the rest of the rows of the matrix. You can also talk about the same problem, but related strikeouts row or column. The combination of the two options: deletion and expansion make it possible to investigate the problem of describing changes PDO matrix by replacing the row or column to another. Applied formulas Greevil - Kirichenko live version: expansion - or inverted: deletion - determined that the equipment PDO in linear regression analysis provides a complete description of the problem MNK- parameter estimation as the conditions for the uniqueness of equations Haussa - Markov (full rank matrix Column plan). Formula Greevil -Kirichenko allow constructive steps to implement statistical analysis related to the emergence of new observations in the sample, removing certain observations - outlayers, replacing some other observations.

Key Words: matrix of Euclidean space, PDO matrix, the formula Greevil - Kirichenko.

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г

1 Формули Гревіля- Кириченка: евклідові простори числових векторів

Зважаючи на важливість прямого варіанту формул Гревіля - Кириченка для евклідових просторів числових векторів, нижче наводиться їхній вигляд для матриць за [Обчислювальна математика] у наступних визначеннях та позначеннях.

Для матриці $A \in R^{m\times n}$ та вектора $a \in R^n$ через $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \in R^{(m+1)\times n}$ позначатиметься розширена матриця через $"+"$- позначатиметься ПдО матриць: $A^+ : R^m \to R^n$, $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ : R^{m+1} \to R^n$.

Саме ПдО визначається через SVD- подання оператора, який визначається відповідною матрицею.

Крім того, у зв'язку із вихідною матрицею та ПдО визначається дві пари асоційованих з ПдО операторів:

- ортогональні проектори:

$$Z(A) = E_n - A^+ A,$$

$$Z(A^T) = E_m - \left(A^T\right)^+ A^T \overset{теорема}{=} E_m - AA^+$$

- групувальні оператори:

$$R(A) = A^+ A^{+T} \overset{теорема}{=} \left(A^T A\right)^+,$$

$$R(A^T) = \left(A^T\right)^+ \left(\left(A^T\right)^+\right)^T \overset{теорема}{=} \left(AA^T\right)^+$$

Лінійна залежність рідка a^T від решти рядків матриці A описується через оператор ортогонального проектування $Z(A)$: a^T лінійно не залежить від решти рядків матриці A $\Leftrightarrow$ $a^T Z(A) a \neq 0$; a^T лінійно залежить від решти рядків матриці A $\Leftrightarrow$ $a^T Z(A) a = 0$.

У введених вище позначеннях має вигляд наступної теореми.

Теорема 1 (пряма формула Гревіля - Кириченка над R^n). За розширення рядком ПдО розширеної матриці пов'язане із ПдО вихідної матриці співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \left(\left(E_n - qa^T\right)A^+ \vdots q\right), \tag{1}$$

$$q = \begin{cases} \dfrac{Z(A)a}{a^T Z(A)a}, & a^T Z(A)a \neq 0 \text{ (лін. нез.)} \\ \dfrac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a}, & a^T Z(A)a = 0 \text{ (лін. зал.)} \end{cases}$$

2 Формули Гревіля- Кириченка: евклідові простори матриць

Як вже зазначалося вище, тим важливим класом лінійних операторів, який дозволяє перенести техніку оперування на основі SVD та ПдО в евклідові простори є клас так званих кортежних операторів (КорО), введених, зокрема, в роботі [5] . Ці оператори породжуються матричними кортежами $\alpha = \left(A_1, \ldots, A_K\right), A_k \in R^{m\times n}$. Зокрема, КорО $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$ визначається як лінійний оператор, дія якого на елемент з $z \in R^K$ визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha z = \sum_{k=1}^{K} z_k A_k, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_K \end{pmatrix} \in R^K . \tag{2}$$

Зауваження 1. Зауважимо, що у варіанті КорО транспонування як замінюється спряженістю, чим, власне є транспонованість, реалізована засобами матричної алгебри.

Зауваження 2. Зауважимо також, що перехід від вектору $a \in R^n$ до вектору - рядку a^T у евклідових просторах числових числових векторів в матричних евклідових просторах є еквівалентним переходу до відповідної лінійної форми $l_a x = (a,x), x \in R^n$.

У вже цитованій віще роботі, доводиться, що спряжений $\wp_\alpha^*$ до операторів згаданого класу визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \cdots \\ (A_K, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} \\ \cdots \\ l_{A_m} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \cdots \\ l_{A_m} X \end{pmatrix} : R^{m\times n} \to R^K, (3)$$

$$l_A X = (A,X), X, A \in R^{m\times n}.$$

І оператори типу (2) і типу (3) побудовані за впорядкованими наборами матриць - за кортежами: рядковими чи стовпчиковими - і тому позначатимуться одним і тим самим терміном КорО.

В роботі [5] зазначається, що SVD - розклад КорО типу (2) чи (3), як і визначення псевдо обернення (ПдО) для них зводиться до задачі на власні значення для лінійного оператора над R^K, що задається матрицею

$F = \left(\left(A_i, A_j \right) \right)_{i,j=\overline{1,K}} : R^K \to R^K$,

- власне, матрицею Грама набору матриць $A_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$ в евклідовому просторі $R^{m\times n}$.

Є справедливими наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $\left(v_i, \lambda_i^2 \right), i = \overline{1,r}$ - набір ненульових сингулярностей матриці $F, r = rank F \le K$, $\lambda_1^2 \ge \cdots \ge \lambda_r^2 > 0$ та $U_i = \frac{\wp_\alpha v_i}{\lambda_i}, i = \overline{1,r}$.

Тоді є справедливим SVD - подання двох пов'язаних між собою операторів:

$$\wp_\alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i v_i^T, \wp_\alpha^* X = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \left(U_i, X \right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i l_{U_i} X, (4)$$

а ПдО для обох типів операторів визначається співвідношеннями:

$$\wp_\alpha^+ X = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i \left(U_i, X \right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i l_{U_i} X : R^{m\times n} \to R^K, (5)$$

$$\wp_\alpha^{*+} = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} U_i v_i^T : R^K \to R^{m\times n}. \quad (6)$$

Зауваження 1. Зауважимо, що як і в стандартному варіанті визначення ПдО, спряження та перехід до ПдО комутують між собою:

$$\left(\wp_\alpha^* \right)^+ = \left(\wp_\alpha^+ \right)^*$$

Зауваження 2. Загалом структура КорО типу (3) представляє собою набір значень лінійних функціоналів $l_{A_k}, k = \overline{1,K}$, заданих на евклідовому просторі $R^{m\times n}$. У випадку евклідового простору числових векторів таким набором лінійних функціоналів є рядки матриці лінійного оператора. Таким чином, кортежний оператор типу (3) - узагальнення матриці лінійного оператора, що діє між двома евклідовими просторами числових векторів.

Для пов'язаних між собою КорО (2), (3) розглядаються їхні розширення: позначатимуться відповідно $\wp_{\alpha,A}, \wp_{\alpha,A}^*$, отриманих додаванням іще одного елементу до кортежу, за якими будуються відповідні оператори:

$$\wp_{\alpha,A} \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\wp_\alpha \vdots A \right) \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = \wp_\alpha z + \beta A = \sum_{k=1}^K z_k A_k + \beta A \quad : z \in R^K, \beta \in R^1,$$

$$z \in R^K, z_{K+1} \in R^1$$

$$\wp_{\alpha,A}^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \cdots \\ (A_K, X) \\ (A, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} \\ \cdots \\ l_{A_m} \\ l_A \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \cdots \\ l_{A_m} X \\ l_A X \end{pmatrix} : R^{m\times n} \to R^{K+1},$$

де $l_A, A \in R^{m\times n}$ позначає лінійний функціонал, що природним чином визначається скалярним добутком: $l_A X = (A,X), X, A \in R^{m\times n}$.

Зауваження 3. Очевидним чином, КорО $\wp_{\alpha,A}^*$ є спряженим до КорО:

$$\wp_{\alpha,A} : \left(\wp_{\alpha,A} \right)^* = \wp_{\alpha,A}^*. \quad (7)$$

Обидва оператори визначаються за набором елементів $A_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$, що очевидним чином визначають набори лінійних функціоналів $l_{A_k} X = (A_k, X), k = \overline{1,K}, X \in R^{m\times n}$ чи $l_A X = (A,X), X \in R^{m\times n}$ відповідно

Зауваження 4. Очевидним чином $l_A^* z_1 = z_1 A, \quad z_1 \in R^1$.

Зауваження 5. Спряжений до оператора $Ql_A : R^{m\times n} \to R^{m\times n}, Q, A \in R^{m\times n}$, дія якого визначається як $Ql_A X = Q(A,X), X \in R^{m\times n}$, задається співвідношенням:

$$(Ql_A)^* = Al_Q \text{, тобто}$$

для довільного $Y \in R^{m\times n}$

$$(Ql_A)^* Y = A(Q,Y).$$

Загалом, в прямих формулах Гревіля - Кириченка, власне, мова йде про рекурентні формули, що визначають псевдо обернення розширеного оператора через псевдо обернення вихідного оператора для операторів - матриць між евклідовими просторами числових векторів. У цьому випадку теорема вказує, як псевдо обернення матриці, доповненої рядком виражається через псевдо обернену для вихідної матриці. Нижче цей результат переноситься на кортежні оператори. Як і випадку матриць лінійних операторів вигляд рекурентної залежності визначається тим, чи є лінійний функціонал, яким розширюється оператор, - лінійно залежним від решти функціоналів, що формують кортежний оператор. Так само, умова лінійно залежності конструктивно описується в термінах слушних операторів ортогонального проектування, що будується за SVD - розкладом КорО .

Так само, як і для просторів числових векторів, з ПдО КорО асоціюються дві пари КорО: ортогональні проектори та групувальні оператори (зважені проекційні) із тими самим способом використання:

Крім того, у зв'язку із вихідною матрицею та ПдО визначається дві пари асоційованих з ПдО операторів:

- ортогональні проектори:

$$Z(\wp_\alpha) = E_{m\times n} - \wp_\alpha^* \wp_\alpha, \quad ,$$

$$Z(\wp_\alpha^*) = E_m - \left(\wp_\alpha^*\right)^+ \wp_\alpha^* \overset{\text{теорема}}{=} E_m - \wp_\alpha \wp_\alpha^+$$

$E_{m\times n}$ - тотожній в матричному просторі, з необхідними і достатніми умовами лінійної залежності - незалежності доданої матриці від решти матриць-елементів кортежу:

$(A, Z(\wp_\alpha)A) = 0$ -лінійна залежність,

$(A, Z(\wp_\alpha)A) > 0$ -лінійна незалежність;

- групувальні оператори

$$R(\wp_\alpha) = \wp_\alpha^+ \wp_\alpha^{+*} \overset{\text{теорема}}{=} \left(\wp_\alpha^* \wp_\alpha\right)^+,$$

$$R(\wp_\alpha^*) = \left(\wp_\alpha^*\right)^+ \left(\left(\wp_\alpha^*\right)^+\right)^T \overset{\text{теорема}}{=} \left(\wp_\alpha \wp_\alpha^*\right)^+$$

Загалом, формулювання результату має вигляд наступної теореми.

Теорема 2. Псевдо обернення розширеного КорО $\wp_{\alpha,A}^*$ за лінійної незалежності чи залежності A від елементів $A_1,\ldots,A_K$ кортежу $\alpha = (A_1,\ldots,A_K)$ визначається співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \wp_\alpha^* \\ l_A \end{pmatrix}^+ = \left(\left(E_{m\times n} - Ql_A\right)\wp_\alpha^{*+} \vdots Q\right),$$

$$Q = \begin{cases} \dfrac{Z(\wp_\alpha^*) l_A}{\left(A, Z(\wp_\alpha^*)A\right)} A & \text{лін. нез.} \Leftrightarrow \left(A, Z(\wp_\alpha^*)A\right) > 0 \\ \dfrac{R(\wp_\alpha^*)A}{1 + (A, R(\wp_\alpha^*)A)} & \text{лін.зал.} \Leftrightarrow \left(A, Z(\wp_\alpha^*)A\right) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Висновки

В статті продовжений розвиток математичних засобів оперування з базовими структурами в матричних евклідових просторах на основі побудови стандартних конструкцій SVD - та ПдО для важливого класу так званих кортежних операторів. Запропоновано перенесення важливої у застосуваннях формули Гревіля - Кириченка для лінійних операторів над R^n на матричні евклідові простори з тими самими можливостями застосування, що і для евклидового простору числових векторів.

Список використаних джерел

1. *Кириченко Н.Ф.* Применение псевдо-обратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации / Н.Ф. *Кириченко, Н.П.Лепеха* // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 4. – С. 107 - 124.
2. *Кириченко Н.Ф.* Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация/ *Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко, Д.П. Сербаев* // Кибернетика и системный анализ. – №3, 2005. – С. 58 - 68.
3. *Кириченко Н.Ф.* Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации/ *Н.Ф. Кириченко, Ю.Г. Кривонос, Н.П. Лепеха* // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. С. 47 – 57
4. *Донченко В.С.* Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструткивные методы описания базовых структур и их использование. //International Journal "Information technologies & Knowledge". - 2011. - Vol. 5.- Number 3. - С. 203 - 216.
5. *Донченко В.* "Вектори ознак" в задачі групування інформації: вектори і матриці/ *В. Донченко, Т. Зінько, Ф. Скотаренко//* Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - С. 111 – 124.

References

1. KIRICHENKO, M., LEPEHA, M. (2002) *The use of pseudo-and projection matrices to research problems of control, surveillance and identification.* Cybernetics and Systems Analisys. Vol.4. P. 107 - 124.
2. KIRICHENKO, M., DONCHENKO, V. & SERBAEV, D (2005). *Nonlinear regression recursive converters: dynamical systems and optimization.* Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 58 - 68.
3. KIRICHENKO,M., KRIVONOS, Y., LEPEHA, M. (2007) *Synthesis systems neurofunctional converters in solving classification problems.* Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 47 – 57.
4. DONCHENKO, V. (2011) *Euclidean spaces numerical vectors and matrices: design methods for describing the basic structures and their use.* International Journal "Information technologies & Knowledge". Vol. 5. - Number 3. - P. 203 - 216.
5. DONCHENKO, V., ZINKO, T., SKOTARENKO, F. (2012) *"Feature Vectors" in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes.* - Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - P. 111 - 124.

Received 17.02.2015