УДК 519.6

Касьянюк В.С.[1], к. ф.-м. н.

Відновлення детермінованих полів, спостережуваних на фоні випадкових, за даними від нестабільних рецепторів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

V.S. Kasyanyuk[1], PhD (Phys.-Math.)

Restoring of deterministic fields observed on a background of random fields with data from the unstable receptors

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

Розглянуто задачу відновлення поля (або процесу), що спостерігається на фоні випадкового поля, за даними вимірювань (спостережень) скінченої множини датчиків (рецепторів) з нестабільними характеристиками; крім того, дані вимірювань містять адитивну шумову компоненту. В якості розв'язку запропоновано парето-оптимальні оцінки, отримані в ході вирішення двокритеріальної задачі мінімізації рівня шумового фону (дисперсії) шуканої оцінки і величини її операторної нев'язки. Досліджено властивості побудованих оцінок, розглянуто часткові випадки.

Ключові слова: обробка і інтерпретація експериментальних даних, похибки вимірювань, нестабільні характеристики, парето-оптимальне оцінювання.

The problem that is actual for practical application of the restoration of field (or process) observed on a background of random field on measurements (observations) of finite set of sensors (receptors) with unstable characteristics is considered; besides, measurements' data contain an additive noise component. In mathematical terms, the problem is reduced to the estimation of a linear functional on a finite set of values of other linear functionals by function that contains an additive random component; the functionals' kernels are unstable and values are distorted by random errors. Pareto-optimal estimates obtained through solving the problem of two-criterion minimization of background noise level (variance) of the desired estimates and its operator residual are suggested as solution. Properties of estimates obtained are studied, recommendations on the estimate choice of the continuum of Pareto-optimal estimates are suggested, particular cases important for the practical application are considered.

Key words: processing and interpretation of experimental data, measurement's error, unstable characteristics, Pareto-optimal estimation.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Широкий клас задач обробки і інтерпретації експериментальних даних [1–4] може бути зведений до задачі відновлення поля (або процесу) $w(x)$, $x \in D$, $D \in E^m$, $w(x) \in L_2[D]$ - комплекснозначна функція x, що спостерігається в області D m-вимірного фазового простору параметрів $x \in E^m$, за даними вимірювань (спостережень) n датчиків (рецепторів)

$$y_k = \int_D q_k(x) w(x) dx + v_k\,,\ k = 1,\dots,n \qquad (1)$$

$q_k(x) \in L_2[D]$ - комплекснозначні характеристики датчиків, $v_k, k = 1,\dots,n$ - шуми вимірювань.

Задача відновлення $w(x)$ за даними (1) у припущенні, коли характеристики $q_k(x)$ вимірювальних приладів стабільні, поле $w(x)$ детерміноване, а щодо шумів вимірювань вважаються відомими їх перші два моменти, розглянута в [4], де побудовано псевдоінверсні, максимально-правдоподібні, регуляризовані та парето-оптимальні розв'язки системи (1), встановлений зв'язок між ними.

Постановка задачі

В даній роботі розглядається випадок, коли окрім шумів вимірювань v_k в (1) поле

$w(x)$ містить випадкову компоненту, а характеристики датчиків $q_k(x)$ нестабільні. Такого роду припущення широко зустрічаються на практиці [1] і значно розширюють коло задач, які описуються схемою вимірювань (1). Система (1) в цьому випадку приймає вигляд

$$y = \int_D q(x)w(x)dx + \nu\,, \tag{2}$$

де $y = (y_1,...,y_n)^T \in C^n$ - вектор даних, $q(x) = g(x) + \gamma(x)$, $w(x) = u(x) + \omega(x)$, $g(x) = (g_1(x),..., g_n(x))^T$ - вектор-функція паспортних характеристик рецепторів (тренд $q(x)$), $g(x) = M(q(x)) \neq const$, $\gamma(x) = (\gamma_1(x),...,\gamma_n(x))^T$ - випадкова вектор-функція (нестабільна компонента) з нульовим середнім $M(\gamma(x)) = 0$ і кореляційною матрицею-функцією $\Gamma(x,\xi) = M(\gamma(x)\gamma^*(\xi))$ (M - символ математичного сподівання, $*$ - символ ермітова спряження), $\omega(x)$ - фонове випадкове поле, на якому спостерігається $u(x)$, що підлягає оцінюванню. Будемо вважати, що $M(\omega(x)) = 0$, $M(\omega(x)\omega^*(\xi)) = \Omega(x,\xi)$. Нарешті, $\nu = (\nu_1,...,\nu_n)^T \in C^n$ - вектор шумів спостережень з $M(\nu) = 0$ і $M(\nu\nu^*) = R$, $\det R \neq 0$.

Для вирішення задачі відновлення поля $u(x)$ розглянемо спочатку задачу оцінювання деякого лінійного функціоналу

$$\Pi u = \int_D \pi(x)u(x)dx\,, \tag{3}$$

$\pi(x)$ - задана функція, $\pi(x)$, $u(x)$, $g(x) \in L_2[D]$, $\Gamma(x,\xi)$, $\Omega(x,\xi) \in L_2[D \times D]$ за даними (2) (задачу оцінювання за даними (2) виходу поля $u(x)$ з деякого приладу з заданими характеристиками). Оцінку Πu будемо шукати у вигляді By, де $B = (b_1,...,b_n)$ - ваговий вектор, визначений таким чином, щоб оцінка $\hat{\Pi} u = By$ мала мінімальну дисперсію і мінімальну операторну нев'язку, що характеризує її зсув.

Парето-оптимальне оцінювання

Для отримання оптимальної лінійної відносно даних (2) оцінки функціоналу (3) множенням (2) зліва на B перетворимо (2) до вигляду

$$By = \int_D \pi(x)u(x)dx + \int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx + \int_D B\gamma(x)u(x)dx + \int_D Bg(x)\omega(x)dx + \int_D B\gamma(x)\omega(x)dx + B\nu\,. \tag{4}$$

З рівності (4) видно, що оцінюваний функціонал Πu відрізняється від By наступними доданками: артефактом $\psi(u) = \int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx$ і шумовою складовою $\Delta = \int_D B\gamma(x)u(x)dx + \int_D Bg(x)\omega(x)dx + \int_D B\gamma(x)\omega(x)dx + B\nu$ з $M\Delta = 0$. Оскільки з нерівності Шварца випливає

$$\left|\int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx\right| \le \int_D |Bg(x) - \pi(x)||u(x)|dx \le$$

$$\le (\int_D |Bg(x) - \pi(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_D |u(x)|^2 dx)^{1/2},$$ і функція $u(x)$ невідома, вектор B будемо вибирати з умови мінімізації операторної нев'язки $\varphi(B) = \int_D |Bg(x) - \pi(x)|^2 dx = BKB^* - \Pi g^* B^* - B(\Pi g^*)^* + \Pi\pi^*$, $K = \int_D g(x)g^*(x)dx$, яка визначає міру близькості синтезованої характеристики $Bg(x)$ до заданої $\pi(x)$. У припущенні некорельованості величин $\gamma(x)$, $\omega(x)$ і ν оцінимо рівень шумового фону:

$$h(B) = M\Delta\Delta^* = B(R + \int_D\int_D \gamma(x)\Omega(x,\xi)\gamma^*(\xi)dxd\xi + \int_D\int_D g(x)\Omega(x,\xi)g^*(\xi)dxd\xi + \int_D\int_D \Gamma(x,\xi)u(x)u^*(\xi)dxd\xi)\, B^*.$$

Якщо ввести позначення $\Omega\Gamma = \int_D\int_D \gamma(x)\Omega(x,\xi)\gamma^*(\xi)dxd\xi$, $\Omega K = \int_D\int_D g(x)\Omega(x,\xi)g^*(\xi)dxd\xi$, а матрицю $\int_D\int_D \Gamma(x,\xi)u(x)u^*(\xi)dxd\xi$ оцінити величиною Q, то $h(B) = B(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q)B^*$.

Для побудови парето-оптимальної оцінки $\hat{\Pi} u = By$ розглянемо наступну задачу двокритеріальної мінімізації за Парето

$$\begin{cases}\varphi(B)=BKB^*-\Pi g^*B^*-B(\Pi g^*)^*+\Pi\pi^*\to\min\limits_B\\ h(B)=B(R+\Omega\Gamma+\Omega K+Q)B^*\to\min\limits_B\end{cases}\quad(5)$$

розв'язок якої з урахуванням опуклості критеріїв задачі (5) і застосуванням підходу, запропонованого в [2], можна отримати у вигляді $B=\Pi g^*(K+\alpha(R+\Omega\Gamma+\Omega K+Q))^{-1}$, $0<\alpha<\infty.$

Відповідно, парето-оптимальні оцінки $\widehat{\Pi u}$ мають вигляд

$$\widehat{\Pi u}=\Pi g^*(K+\alpha(R+\Omega\Gamma+\Omega K+Q))^{-1}y,\quad 0<\alpha<\infty \qquad (6)$$

Можливий і інший варіант визначення критеріїв парето-оптимізації, який лишається єдиним, коли матриця Q невідома. Якщо з (4) визначити артефакт як $\psi(u)=\int\limits_D(Bg(x)-\pi(x)+$ $+B\gamma(x))u(x)dx$, шумову компоненту, відповідно, як $\Delta=\int\limits_D Bg(x)\omega(x)dx+\int\limits_D B\gamma(x)\omega(x)dx+B\nu$, то операторна нев'язка визначається як

$\varphi(B)=M\int\limits_D\left|B(g(x)+\gamma(x))-\pi(x)\right|^2dx=B(K+\Gamma)B^*-$ $-\Pi g^*B^*-B(\Pi g^*)^*+\Pi\pi^*,\quad \Gamma=\int\limits_D\gamma(x)\gamma^*(x)dx=$ $=\int\limits_D\Gamma(x,x)dx,$ а рівень шумового фону $h(B)=$ $=M\Delta\Delta^*=B(\Omega K+\Omega\Gamma+R)B^*$. Двокритеріальна задача мінімізації за Парето, яка визначає оптимальний ваговий вектор B, має вигляд

$$\begin{cases}\varphi(B)=B(K+\Gamma)B^*-\Pi g^*B^*-B(\Pi g^*)^*+\\ \qquad +\Pi\pi^*\to\min\limits_B\\ h(B)=B(R+\Omega\Gamma+\Omega K)B^*\to\min\limits_B\end{cases}.$$

Її розв'язок, по аналогії з розв'язком задачі (5), нескладно отримати у вигляді

$B=\Pi g^*(K+\Gamma+\alpha(R+\Omega\Gamma+\Omega K))^{-1}$, $0<\alpha<\infty$,

і тоді

$$\widehat{\Pi u}=\Pi g^*(K+\Gamma+\alpha(R+\Omega\Gamma+\Omega K))^{-1}y,\quad 0<\alpha<\infty. \qquad (7)$$

Зауваження 1. Оцінки (6) і (7) супроводжуються одночасно незменшуваними рівнем шумового фону і величиною операторної нев'язки, які мають протилежні тенденції: рівень шумового фону $h(\alpha)$ монотонно спадає до нуля із зростанням α від 0 до ∞, а величина операторної нев'язки $\varphi(\alpha)$ монотонно зростає від $\varphi(+0)$ до $\Pi\pi^*$.

Зауваження 2. Отримані континуальні множини парето-оптимальних оцінок (6) і (7) залежать від параметра парето-оптимізації α, $0<\alpha<\infty$, для визначення конкретного значення якого досліджується множина Парето – параметрична залежність $\varphi(h)$, $0<\alpha<\infty$. Вибір конкретного значення α може здійснюватись особою, що приймає рішення, і реалізує компроміс між зростанням величини операторної нев'язки і спаданням рівня шумової компоненти і навпаки.

Деякі часткові випадки

Розглянемо тепер деякі часткові випадки задачі(2).

1. Характеристики $q(x)$ стабільні, поле $w(x)$ не детерміноване, тобто $q(x)=g(x)$, $\gamma(x)=0$. Тоді $\Gamma=0$, $\Omega\Gamma=0$ і з (7) маємо $\widehat{\Pi u}=\Pi g^*(K+\alpha(R+\Omega K))^{-1}y,\ 0<\alpha<\infty.$

2. Характеристики $q(x)$ нестабільні, поле $w(x)$ детерміноване, тобто $\omega(x)=0$, $w(x)=u(x)$. Тоді $\Omega=0,\ \Omega K=0,\ \Omega\Gamma=0$ і (7) перетворюється на $\widehat{\Pi u}=\Pi g^*(K+\Gamma+\alpha R)^{-1}y,\ 0<\alpha<\infty.$

3. Характеристики $q(x)$ стабільні, поле $w(x)$ детерміноване, тобто $\gamma(x)=0$, $\omega(x)=0$, $q(x)=g(x)$, $w(x)=u(x)$. Тоді $\Gamma=0,\ \Omega\Gamma=0$, $\Omega=0$, $\Omega K=0$, і з (7) отримуємо $\widehat{\Pi u}=\Pi g^*(K+\alpha R)^{-1}y,\ 0<\alpha<\infty.$

Відновлення поля $u(x)$

Парето-оптимальні оцінки (6) і (7) функціонала (3) можуть бути використані для побудови парето-оптимальних оцінок функції $u(x)$ за даними (2), якщо ввести систему функціоналів $\Pi_{\lambda z}u=\int\limits_D\pi(x,z,\lambda)u(x)dx$, $\lambda>0$, визначивши для будь-якої точки $z\in\operatorname{int}D$ дійсну невід'ємну функцію

$$\pi(x,z,\lambda)=\begin{cases}\tau(x),\|x-z\|<\lambda,\{\|x-z\|<\lambda\}\subset D\\ 0 \qquad \textit{в інших точках } x\in D\end{cases},$$

неперервну по x в D, при цьому $\int\limits_D\pi(x,z,\lambda)dx=\int\limits_{\|x-z\|<\lambda}\tau(x)dx=1$. Тоді, якщо функція $u(z)$ неперервна в околі точки $z\in\operatorname{int}D$, то на основі другої теореми про середнє маємо

$\Pi_{\lambda z}u=\int\limits_D\pi(x,z,\lambda)u(x)dx=\int\limits_{\|x-z\|<\lambda}\tau(x)u(x)dx=$

$$= \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x)\,\mathrm{Re}\,u(x)dx + i \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x)\,\mathrm{Im}\,u(x)dx =$$
$$= \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x)dx(\mathrm{Re}\,u(z_1) + i\,\mathrm{Im}\,u(z_2)) = \mathrm{Re}\,u(z_1) +$$

$+i\,\mathrm{Im}\,u(z_2)$, $z_1,\ z_2 \in \|x-z\| < \lambda$. Переходячи до границі при $\lambda \to 0$, отримуємо $\Pi_{\lambda z}u \to \mathrm{Re}\,u(z) + \mathrm{Im}\,u(z) = u(z)$. Отже, для будь-якої точки $x \in \mathrm{int}\,D$, в околі якої $u(x)$ неперервна, можна побудувати систему функцій $\pi(x,z,\lambda)$ таким чином, що з парето-оптимальних оцінок функціоналу $\Pi_{\lambda z}u$ в (6) і (7) граничним переходом при $\lambda \to 0$ можна отримати парето-оптимальні оцінки функції $u(x)$ у вигляді

$$\hat{u}(x) = \Pi g^*(K + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q))^{-1} y \qquad (8)$$
$0 < \alpha < \infty$,

і

$$\hat{u}(x) = \Pi g^*(K + \Gamma + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K))^{-1} y \qquad (9)$$
$0 < \alpha < \infty$

відповідно (вважається, що функції $g_k(x)$, $k = 1,...,n$ також неперервні в околі точки x).

Висновки

Таким чином, для задач обробки і інтерпретації вимірювань, що задовольняють лінійній схемі вимірювань (1), запропоновано парето-оптимальний підхід до відновлення спостережуваного поля (або процесу) у випадку, коли це поле спостерігається на фоні випадкового поля рецепторами (датчиками) з нестабільними характеристиками, а результати спостережень (вимірювань) містять випадкові похибки. Отримані парето-оптимальні оцінки супроводжуються одночасно незменшуваними рівнем шумового фону і величиною операторної нев'язки. Надано рекомендації щодо вибору конкретної оцінки з континуальної множини парето-оптимальних оцінок. Розглянуто важливі для практичного застосування часткові випадки.

Список використаних джерел

1. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. / Ю.П.Пытьев – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400с.
2. *Бєлов Ю.А.* Математичні методи і алгоритми обробки в задачі інтерпретації непрямих вимірювань. / Ю.А.Бєлов, В.С.Касьянюк – К.: Науковий світ, 1999. – 79 с.
3. *Верлань А.Ф.* Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений./Верлань А.Ф., Мосенцова Л.В. и др. – К.: НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова, 2011. – 368 с.
4. *Kasyanyuk V.* Problem of restoring the function-signals by finite set of data with errors./ V.Kasyanyuk, I.Volchyna //Information Models and Analysys. – 2013. – v.2.- №4. – P.361 – 369.

References

1. PYT'EV, Y. (2004). Mathematical modeling methods of measuring and computing systems. – Moscow: Fizmatlit.
2. BELOV, Y., KASYANYUK, V. (1999). Mathematical methods and processing algorithms for the problem of interpretation of indirect measurements. – Kyiv: Naukovyi Svit.
3. VERLAN, A., MOSENTSOVA, L. (2011). Methods and algorithms recovery signals and pictires. – Kiev: NAN Ukrainy, Inst. Problem Modelirovaniya v Energetike im. G.E. Puhova.
4. KASYANYUK, V. (2013). Problem of restoring the function-signals by finite set of data with errors. – Kyiv: Naukovyi Svit. In *Information Models and Analysys Vol. 2.* №4. P. 361–369.

Надійшла до редколегії 03.03.2015р.