УДК 519.876:51-7:612.017

Колянова Т.В.[1], к.ф.-м. н.

Уточнення параметрів в математичній моделі, що описує вплив харчування та навантаження на вміст білків системи комплемента

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: tania.kolianova@gmail.com

T.V. Kolianova[1], PhD assistant

Refinement of the parameters in a mathematical model that describes the impact of supply and the load on the content of proteins of the complement system

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tania.kolianova@gmail.com

В будь-якому трудовому колективі від працівника бажано отримати максимальну продуктивність праці. Та зрозуміло, що максимальне навантаження, нервові стреси або фізичне виснаження можуть призвести до виснаження або порушення функціонального стану організму людини. Тому постає природне запитання: «Яким є оптимальний обсяг навантаження (фізичного та психологічного) на організм людини?» Щоб відповісти на це запитання, потрібно вивчити, яким чином навантаження (фізичне і/або психологічне) впливає на імунітет людини. Оскільки від стану імунної системи залежить здоров'я людини і можливість її ефективної праці.

Розглядається математична модель, що описує вплив харчування та навантаження на імунітет людини. Враховуючи особливості біологічної системи імунітету, автор пропонує рівняння математичної моделі представити у вигляді логістичної кривої, що описує процес нарощування з ефектом насичення. Аналізуються параметри даної моделі, за допомогою методу найменших квадратів відшукуються невідомі числові параметри, та записуються відповідні функціональні залежності, які більш точно відображають біологічні процеси, що відбуваються в організмі.

Ключові слова: логістичне рівняння, імунітет, антиген, рівень насичення.

In any workplace employee desirable to get maximum productivity. And it is clear that the maximum load, nervous stress or physical exhaustion can lead to exhaustion or violation of the functional state of the human body. A natural question appears therefore: «What is an optimum volume of loading (physical and psychological) on the organism of man?» To answer this question, it is needed to learn, how loading (physical and/or psychological) influences on immunity of man. As on the state of the immune system the health of man and possibility of it depends effective work.

The article discusses a mathematical model that describes the effect of supply and the load on the human immune system. The equation of a mathematical model is presented in the form of a logistic curve that describes the process of building a saturation effect. Analyzed parameters of the model, using the method of least squares are found unknown number of parameters and recorded relevant functional dependence, which more accurately reflect biological processes in the body.

Key words: logistic equation, the immunity system, load, saturation level.

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

Враховуючи особливості біологічної системи імунітету, автор висуває гіпотезу про розвиток процесу у вигляді логістичної кривої, що описує процес нарощування з ефектом насичення [1]. Враховуючи відмічений якісний характер поведінки функцій $y_1(x_1)$ (логістична крива), де x_1 – рівень харчування , x_2 – рівень фізичного або психологічного навантаження, відповідну залежність можна розглядати як розв'язок такого диференціального рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1} = r\left(1 - \frac{y_1}{q}\right)y_1, \quad y_1\left(x_1^0\right) = y_1^0, \tag{1}$$

де r, q, y_1^0 – невідомі числові параметри.

Розв'язком задачі (1) при $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$ відповідно будуть

$$y_1(x_1) = \frac{q}{1 + \left(\dfrac{q}{y_1^0} - 1\right)e^{-rx_1}}, \tag{2}$$

Специфіка логістичної кривої в загальному вигляді [4,5] полягає в тому, що для неї характерні: асимптотичний лівий кінець кривої $y_1(-\infty) = 0$, асимптотичний правий кінець кривої $y_1(+\infty) = 1$, значення в середній точці $y_1(0)$ та крутизна, що вимірюється показником r.

При переході від інтервалу $(-\infty; +\infty)$ до інтервалу $(0; 1)$ потрібно врахувати, що значення y_1^0 близьке до нуля і воно не впливає на логістичний характер поведінки кривої. Тому інтервал (0; 1) можна звести до відрізку $[0+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, де $\varepsilon -$мала додатня величина, тоді маємо:

$$x_i \to +0 \Rightarrow y \to +0,\ i = 1, 2;$$
$$x_i \to 1-0 \Rightarrow y \to 1-0,\ i = 1, 2;$$
$$y(0) \to y(0.5) = y_1^0.$$

Значення $y_1(1) = 1$ дає підставу стверджувати, що рівень насичення $q = 1$. Тоді (4.7) набуває вигляду

$$y_1(x_1) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{y_1^0} - 1\right)e^{-r(x_1 - 0.5)}}. \tag{3}$$

Залишається один параметр r, що характеризує параметр росту логістичної кривої [2,3] та залежить від рівня навантаження x_2.

Для визначення невідомого числового параметру r скористаємось методом найменших квадратів і мінімізуємо сумарне середньоквадратичне відхилення.

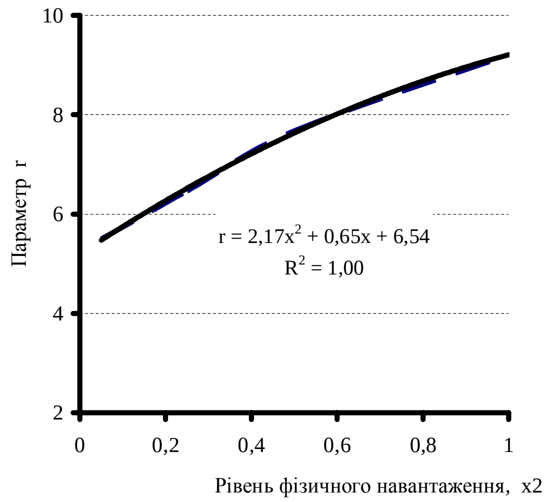

Рис.1а. Залежність числового параметру r^{C_3} від фізичного навантаження та одержана апроксимація з вказаним коефіцієнтом детермінації R (*розрахунок автора).*

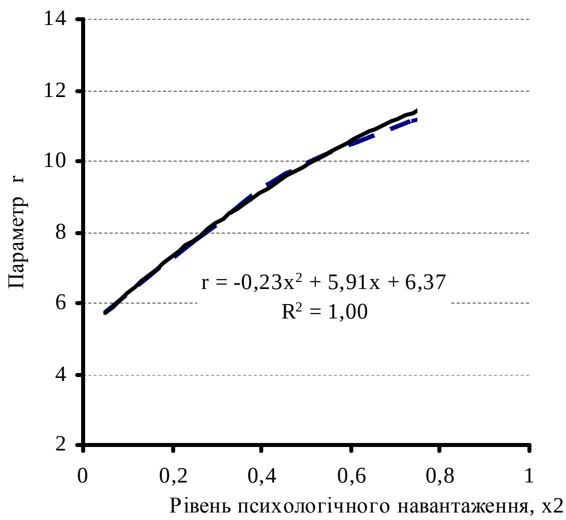

Рис.2б. Залежність числового параметру r^{C_9} від психологічного навантаження та одержана апроксимація з вказаним коефіцієнтом детермінації R (*розрахунок автора).*

В результаті отримаємо аналітичну залежність параметру $r\left(x_2\right)$ у такому вигляді:

для фізичного навантаження

$$r^{C_3}(x_2) = 2{,}17x_2^2 + 0{,}65x_2 + 6{,}54$$

та

психологічного навантаження відповідно

$$r^{C_9}(x_2) = -0{,}23x_2^2 + 5{,}91x_2 + 6{,}37 .$$

На основі логістичної кривої (3) отримано функціональні залежності концентрації білка C_3 та C_9 від рівня харчування для фізичного та психологічного навантаження відповідно у наступному вигляді:

$$y\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_1^0} - 1\right) e^{-\left(2.17x_2^2 + 0.65x_2 + 6.54\right)\left(x_1 - 0.5\right)}}$$

та

$$y\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_1^0} - 1\right) e^{-\left(-0.23x_2^2 + 5.91x_2 + 6.37\right)\left(x_1 - 0.5\right)}} .$$

Як загальний висновок зазначимо, що наш підхід характеризується такою позитивною властивістю, що при побудові математичної моделі враховується специфіка моделі біологічної системи, в результаті чого підвищується точність апроксимаційної моделі

Список використаних джерел

1. *Kolianova T.V.* Modeling of influence of nutrition, physical and psychical loading on albumen content in the system of complement. Mathematical treatment of experiment results. / T.V. Kolianova // Journal of Automation and Information Sciences. – 2011. – 43. – № 4. – P. 53 – 60.
2. *Бернет Ф.* Клеточная иммунология / Ф. Бернет. – Москва: Мир. – 1971. – 542с.
3. *Hege J. S.* A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells / J.S. Hege, G. Cole // J. Immunol. 1966. V. 97. P. 34-40.
4. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / *Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер Г.* – Москва: Мир. – 1990. – 685 с.
5. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. – Москва: Наука. – 1974. – 332 с.

References

1. *KOLIANOVA T.V.* (2011) Modeling of influence of nutrition, physical and psychical loading on albumen content in the system of complement. Mathematical treatment of experiment results. Journal of Automation and Information Sciences, Volume 43, Issue 4, p. 53 – 60.
2. *BERNET F.M.* (1959) *The clonal selection theory of acquired immunity.* Nashville: Vanderbilt University Press.
3. *HEGE J. S.* (1966) A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells. J. Immunol, V. 97, p. 34-40.
4. *E. HAIRER, S.P. NERSETT, G. WANNER* (1987) Solving Ordinary Differencetial Equation I. Nonstiff Problems. – Hardcover.
5. *PONTRYAGIN L.S.* (1974) Obyknovennye differencialnye uravneniya. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 16.03.15