УДК 519.8

Мащенко С.О. [1], д. ф.-м. н., доц.,
Аль-Саммарраи Мохаммед Саад И.[2], аспирант

Транспортная задача с нечетким множеством целей

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 83000, м. Киев, пр-т. Глушкова 4д,
[1]e-mail: msomail@yandex.ua
[2]e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

S.O. Mashchenko[1], D.Sci(Phys-Math.), Ass. Prof.,
Mohammed Saad I. Al-Sammarraie [2], Grad. Stud.

The transportation problem with the fuzzy set of goals

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[1]e-mail: msomail@yandex.ua
[2]e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

Рассматривается транспортная задача, в которой цель лица, принимающего решение, задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Рассмотрено конструктивное представление функции принадлежности нечеткого целевого множества типа 2. Предлагается двух-критериальная задача поиска рационального решения.
Ключевые слова: нечеткая цель, функция принадлежности, нечеткое множество типа 2, принятие решений.

In known formulations of fuzzy transportation problems the fuzziness is manifested in the description of both the set of alternatives and the objective function, not concerning the set of goals. The transportation problem, in which the goal of decision-maker is defined by the fuzzy set of fuzzy targets, is considered in this paper. In this case the decision-maker's goal may be defined by the intersection of fuzzy set of fuzzy sets. Then for each fixed alternative value of membership functions also create fuzzy set and can be define as so-called fuzzy set of type-2 (fuzzy set with membership function that has fuzzy set of values). It was considered a constructive representation of the membership function of goal set. The two-criterion problem of rational decision search is considered. There is defined general solution notion of the transportation problem with fuzzy set of goals in this paper. More simple method of receipt of rational decision with reliability of membership to goal set, equal one, and reliability of it abstention of the no less set number is offered.
Keywords: fuzzy goal, membership function, fuzzy set of type 2, decision making.

Статью представил д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Одной из важных проблем, которые возникают в логистике является проблема принятия многоцелевых решений в условиях нечеткой информации. Для формирования целей в транспортных задачах в первую очередь используются простые количественные характеристики транспортного процесса: объемно-массовые характеристики планируемой доставки груза, количество используемых транспортных средств, пробег автомобилей, длительность работы и др. Постановка транспортных задач с несколькими целями — это следствие возникновения рынка транспортных услуг и природное стремление автотранспортных предприятий удовлетворить интересы всех участников транспортного бизнеса, а не только грузополучателей или грузоотправителей.

В этой работе рассматривается задача рационального выбора плана перевозок в условиях, когда цель лица, принимающего решение (ЛПР), задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Такие модели обобщают известные транспортные задачи, в которых цель ЛПР задается одной целевой функцией или в более сложном случае характеризуются четким множеством нечетких множеств (подход Беллмана – Лотфи-Заде [1]). С одной стороны, такое обобщение позволяет анализировать ситуации в случае, если невозможно четко указать, какие множества характеризуют цель ЛПР, а с другой – помогает глубже и более точно понять процесс принятия решений, пути поиска и выбора рациональных альтернатив в условиях нечеткой информации.

Пусть $I = \{1,,...,n\}$ – множество пунктов производства, $J = \{1,...,m\}$ – множество пунктов потребления, n и m – соответственно их количества. Обозначим a_i – максимальный объем производства продукта пунктом $i \in I$; b_j – объём продукта, который необходимо доставить j- му пункту потребления. Тогда множество допустимых планов перевозок $x = (x_{ij})_{i\in I, j\in J}$, которое обозначим D, будет задаваться следующими условиями:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \le a_i, \;\; i \in I;$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij} \ge b_j, \;\; j \in J;$$
$$x \in X = \{x = (x_{ij})_{i\in I, j\in J} \mid \; x_{ij} \ge 0, \;\; i \in I, j \in J\}.$$

Множество X будем называть универсальным множеством планов перевозок.

Предположим, что цели ЛПР заданы нечеткими множествами F_k, $k \in K$, универсального множества планов перевозок X, где $K = \{1,...,k\}$ – множество их индексов, а k – их количество. Обозначим $\varphi_k(x)$, $k \in K$, – соответственно их функции принадлежности. Тогда согласно [1] нечеткое множество $F = \bigcap_{k\in K} F_k$ с функцией принадлежности $\varphi(x) = \min_{k\in K} \varphi_k(x)$ называется нечетким целевым множеством ЛПР, а нечеткое множество $X^* = F \bigcap D$ называется нечетким множеством решений. Если ЛПР интересует какой-либо конкретный план перевозок, то рациональным решением считается так называемый максимизирующий план перевозок [1], который удовлетворяет условию $x^* = \arg\max_{x\in D} \varphi(x)$.

Иногда ЛПР не может четко указать, какие нечеткие множества F_k, $k \in K$, характеризуют его цель, но может задать некоторое нечеткое подмножество $\tilde{K} \subseteq K$ этих множеств. Далее множество K будем называть универсальным множеством индексов целей.

Обозначим $\kappa : K \to [0,1]$ функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств G_k, $k \in K$, которые характеризуют цели ЛПР. Тогда в целом его цель может быть задана пересечением $\tilde{F} = \bigcap_{k\in \tilde{K}} F_k$ нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k, $k \in K$. Определим это понятие в соответствии с подходом, который был предложен в [2].

Для произвольного плана перевозок $x \in X$ введем отношение доминирования на универсальном множеством индексов целей K.

Будем говорить, что цель с индексом $k \in K$ доминирует цель с индексом $j \in K$ для плана перевозок $x \in X$ и обозначать это $k \overset{x}{\succ} j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_k(x) \le \varphi_j(x)$, $\kappa(k) \ge \kappa(j)$, и хотя бы одно из них строгое.

Обозначим

$$\eta(x,k) = \begin{cases} \kappa(k), & k \in PO(x), \\ 0, & k \notin PO(x), \end{cases}$$

где $PO(x) = \{k \in K \mid j \overset{x}{\not\succ} k, \; \forall j \in K\}$.

Пересечением нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k, $k \in K$, будем называть $\tilde{F} = \bigcap_{k\in \tilde{K}} F_k$ – нечеткое множество типа 2, задаваемое тройками $(x, \varphi(x,y))$, где

$\varphi : X \times Y \to [0,1]$ – функция принадлежности нечеткого отображения $\tilde{\Phi}$, выполняющего роль нечеткой функции принадлежности, и определенная таким образом:

$$\varphi(x,y) = \max_{k\in K} \{\eta(x,k) \mid \varphi_k(x) = y\}, \qquad (1)$$

если $\exists k \in K$: $\varphi_k(x) = y$;

$$\varphi(x,y) = 0, \qquad (2)$$

если $\varphi_k(x) \ne y, \;\; \forall k \in K$;

x – элемент универсального множества планов перевозок X;

y – степень принадлежности x нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2, $y \in Y = [0,1]$.

При фиксированном $x^* \in X$ функция принадлежности $\varphi(x^*, y)$, $y \in Y = [0,1]$, нечеткого отображения $\tilde{\Phi}$ имеет смысл функции принадлежности, описывающей нечеткое множество типа 1 значений степеней принадлежности $y \in Y = [0,1]$.

Поскольку функция принадлежности $\varphi(x,y)$ однозначно определяет нечеткое отображение $\tilde{\Phi}$, которое, в свою очередь, однозначно определяет нечеткое множество $\tilde{F}$ типа 2, то в дальнейшем будем называть $\varphi(x,y)$ функцией принадлежности нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2, а ее значение – достоверностью степени принадлежности $y \in Y = [0,1]$ элемента $x \in X$ нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2.

Вычисление функции принадлежности $\varphi(x,y)$ по формулам (1), (2) можно несколько упростить, если использовать следующую теорему [2].

Теорема 1. Пусть F_k, $k \in K$, – некоторые нечеткие множества универсального множества X, которые задаются соответствующими функциями принадлежности $\varphi_k(x)$, $k \in K$; $\tilde{K}$ – нечеткое множество универсального множества индексов K с функцией принадлежности $\kappa(k)$, $k \in K$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{F} = \bigcap_{k \in \tilde{K}} F_k$ типа 2 задается такой формулой:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{k \in K^{PO}(x,y)} \kappa(k), & K^{PO}(x,y) \neq \varnothing, \\ 0, & K^{PO}(x,y) \neq \varnothing. \end{cases}$$

где

$$K^{PO}(x,y) = \{k \in K \mid \varphi_k(x) = y,$$
$$y = \min_{j \in K}\{\varphi_j(x) \big| k(j) \geq k(k)\},$$
$$\kappa(k) = \max_{j \in K}\{\kappa(j) \big| \varphi_j(x) \leq y\}\},\ x \in X,\ y \in [0,1].$$

Рассмотрим вопрос выбора рациональных решений. Из приведенных выше рассуждений следует, что целевое множество $\tilde{F}$ представляет собой нечеткое множество типа 2, которое задается функцией принадлежности $\varphi(x,y)$, $x \in X$, $y \in [0,1]$.

Логично предположить, что ЛПР будет стараться максимизировать на множестве допустимых планов перевозок D кроме степени $y \in [0,1]$ принадлежности $x \in X$ целевому множеству $\tilde{F}$, также и ее достоверность $\varphi(x,y)$.

Таким образом, перед ЛПР возникает следующая двухкритериальная задача:

$$y \to \max,\ \varphi(x,y) \to \max,\ x \in D,\ y \in [0,1]. \quad (3)$$

Обозначим G – множество ее оптимальных по Парето решений (x,y), $x \in X$, $y \in Y$.

Из приведенных выше предположений следует, что рациональное решение исходной задачи определяется множеством G. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим решением транспортной задачи с нечетким множеством целей будем называть нечеткое множество $G*$ типа 2 с функцией принадлежности

$$\varphi_{G*}(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y), & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G, \end{cases}$$

где $x \in X$, $y \in Y = [0,1]$.

Обозначим $G_D = \{x \in D \big| \ \exists y \in [0,1]\ (x,y) \in G\}$ – подмножество векторов $x \in D$, образующих оптимальные по Парето решения задачи (3). В случае, когда ЛПР интересует конкретное решение исходной задачи, то его можно выбрать из G_D с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив (3).

Поскольку функция $\varphi(x,y)$ достаточно сложна, то есть смысл попробовать несколько упростить задачу (3). Для этого предложим ЛПР максимизировать не произвольную степень $y \in [0,1]$ принадлежности $x \in X$ множеству допустимых решений $\tilde{F}$, а лишь ее гарантированное значение $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$. В этом случае (3) примет следующий вид:

$$\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x) \to \max_{x \in D},\ \varphi(x, \hat{y}(x)) \to \max_{x \in D}. \quad (4)$$

Оказывается задача (4) значительно проще, чем (3).

Утверждение 1. Если $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$, то $\varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in D$ индекс

$$k^*(x) = \arg\max_{k \in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \quad (5)$$

Это означает, что

$$\kappa(k^*(x)) \geq \kappa(k)\ \ \forall k \in K, \quad (6)$$
$$\varphi_{k^*(x)}(x) \leq \varphi_k(x)\ \ \forall k \in K. \quad (7)$$

Покажем, что $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Предположим противное, что $k^*(x) \notin K^{PO}(x)$. Тогда $\exists \hat{k} \in K$ такой, что $\hat{k} \succ k^*(x)$. Это означает, что либо

$\kappa(\hat{k}) > \kappa(k^*(x))$ и $\varphi_{\hat{k}}(x) \ge \varphi_{k^*(x)}(x)$, либо $\kappa(\hat{k}) \ge \kappa(k^*(x))$ и $\varphi_{\hat{k}}(x) > \varphi_{k^*(x)}(x)$. В первом случае мы получим противоречие с (6), во втором – с (7). Таким образом, $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Тогда из (5) и (6) выплывает:

$$\begin{aligned} &\max_{k\in K}\{\eta(x,k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} = \eta(x,k^*(x)) = \\ &= \kappa(k^*(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Теперь определим значение $\varphi(x,\hat{y}(x))$. Поскольку по условию $\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x)$, то $\exists k \in K$: $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому из (1), (2) следует $\varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\eta(x,k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$. Тогда из (8) следует $\varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Утверждение доказано.

Обозначим достоверность гарантированной степени принадлежности $x \in D$ целевому множеству $\tilde{F}$ через

$$\phi(x) = \varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}.$$

Тогда задача (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x) \to \max, \\ &\phi(x) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \to \max,\ x \in D. \end{aligned} \tag{9}$$

Кроме того, что в силу конструктивного представления функции $\varphi(x,y)$ эта задача стала проще, чем (4), теперь все ее критерии являются функциями лишь от x. Решая эту задачу, ЛПР хочет максимизировать кроме гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 и ее достоверность. Поэтому целесообразно ввести такое понятие.

Рациональным решением исходной транспортной задачи с гарантированной степенью принадлежности множеству ее допустимых решений будем называть оптимальное по Парето решение двухкритериальной задачи (9).

Поскольку ЛПР часто интересует конкретное решение, то его можно выбрать с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации.

Попробуем, далее упростить процесс получения рационального решения задачи (3). Значительный интерес для ЛПР может представлять однокритериальная задача

$$\hat{y}(x) \to \max,\ \phi(x) \ge \alpha,\ x \in D, \tag{10}$$

максимизации гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 при заданном уровне $\alpha \in [0,1]$ – ее достоверности.

Следует отметить, что из теории многокритериальной оптимизации [3] следует, что решение задачи (10) будет слабо эффективным решением (9), что в ряде случаев приемлемо для ЛПР.

Обозначим $K^\alpha = \{k \in K \mid \kappa(k) \ge \alpha\}$ множество индексов целей, которые имеют достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее $\alpha \in [0,1]$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача (10) эквивалентна следующей:

$$z \to \max_{x\in D},\ \forall k \in K\ \exists j \in K^\alpha\ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z\ . \tag{11}$$

Доказательство. Сначала покажем, что (10) эквивалентна задаче:

$$\begin{aligned} &z \to \max_{x\in D}, \\ &\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x) \ge z, \\ &\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Для этого достаточно показать равенство множеств: $A = \{x \in D \mid \min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$ и $B = \{x \in D \mid \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha\}$. Пусть $x \in B$. Тогда $\max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha$. Отсюда $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \ge \alpha$. Тогда очевидно

$$\exists k \in K^\alpha\quad \varphi_k(x) = \hat{y}(x). \tag{13}$$

Предположим противное, что $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) \ne \hat{y}(x)$. Поскольку $\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x)$, а $K^\alpha \subseteq K$, то $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Поэтому для $\forall k \in K^\alpha$ $\varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Получили противоречие с (13). Таким образом, $x \in A$ и $A \supseteq B$.

Покажем $B \supseteq A$. Пусть $x \in A$. Тогда $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Отсюда $\exists k \in K^\alpha$ $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \ge \alpha$. Тогда $\max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha$ и

$x \in B$. Таким образом, $B \supseteq A$ и отсюда следует $B = A$. Таким образом, задачи (10) и (12) – эквивалентны.

В силу эквивалентности соотношений: $z \to \max_{x \in D}, \ \varphi_k(x) \ge y \ge z \ \ \forall k \in K; \ \min_{j \in K^\alpha} \varphi_j(x) = y \Leftrightarrow$

$z \to \max_{x \in D}, \quad \varphi_k(x) \ge \min_{j \in K^\alpha} \varphi_j(x) \ge z, \quad \forall k \in K \quad \Leftrightarrow$

$z \to \max, \ \forall k \in K \ \exists j \in K^\alpha \ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z, x \in D,$

очевидно следует эквивалентность (10) и (11).

Утверждение доказано.

Если множество K^α индексов целей, имеющих достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее заданного ЛПР числа $\alpha \in [0,1]$, состоит всего из одного элемента j^*, то мы получим задачу математического программирования: $z \to \max, \ x \in D, \ \varphi_k(x) \ge \varphi_{j^*}(x) \ge z \ \ \forall k \in K$.

В противном случае задача (11) может быть многоэкстремальной. Поэтому рассмотрим подход к ее конструктивному решению.

Утверждение 3. Задача (11) – эквивалентна задаче:

$$\max_{j \in K^\alpha} \max_{x \in D} \{ z \mid \ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z \ \ \forall k \in K \}. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть x^* – решение задачи (11). Тогда имеем $z^* \ge z \quad \forall x \in D$ и $\forall k \in K \ \ \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z$. Обозначим через $D^{kj}(z) = \{ x \in D \mid \ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z \}$. Отсюда $z^* \ge z \quad \forall x \in D^*$, где $D^*(z) = \bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z)$. Поскольку $\bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup_{j \in K^\alpha} \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$, то $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \ge z \quad \forall x \in \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$. Таким образом, выполняется (14).

С другой стороны. Пусть имеет место (14). Тогда $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \ge z \quad \forall x \in \bigcap_{k \in K} D^{kj}$. Поскольку $\bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup_{j \in K^\alpha} \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$, то $z^* \ge z$ $\forall x \in \bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z)$. Тогда $z^* \ge z \quad \forall x \in X$ и $\forall k \in K \ \ \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z$. Поэтому x^* – решение задачи (11).

Утверждение доказано.

Таким образом, если множество K^α содержит более одного индекса, то для каждого $j \in K^\alpha$ надо получить решение задачи вида:

$$z(x^{(j)}) = \max\{ z \mid \ x \in D, \ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z, \ k \in K \}.$$

Тогда решение x^* задачи (10) будет выбираться из условия

$$x^* = \arg\max_{j \in K^\alpha} z(x^{(j)}).$$

В заключение следует отметить, что предложенный метод расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечетким множеством целей ЛПР и может дать новый поход к решению других постановок нечетких задач оптимизации.

Список використаних джерел

1. *Bellman R.* Decision making in a fuzzy environment / R. Bellman // Management science. – 1970. – **17**. – 4. – pp. 141 – 162.
2. *Мащенко С.О.* Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
3. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981.

References

1. BELLMAN, R. (1970) Decision making in a fuzzy environment. *Management science*. 17(4). pp. 141 – 162.
2. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics and systems analysis*. 49(1). pp. 62 – 68.
3. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 11.11.2014.