УДК 517.929

Сіренко А.С., аспірант

Про одну різницеву систему зі слабкою нелінійністю

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: sandrew@online.ua

A.S. Sirenko, graduate student

On a difference systems with weakly nonlinear

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: sandrew@online.ua

У роботі розглядаються різницеві системи в тривимірному просторі. Праві частини систем являють собою діагональну лінійну частину і нелінійні функції, що задовольняють умові Ліпшиця з «досить малою» сталою. Одержано умови, при виконанні яких з асимптотичної стійкості лінійної частини слідує асимптотична стійкість положення рівноваги вихідної системи.

Ключові слова: різницева система, асимптотична стійкість,умови Ліпшиця.

In this paper, we consider a system of three nonlinear differential equations "with a weak nonlinearity." By this term refers to a system with a dedicated part of the linear and nonlinear function satisfying the Lipschitz condition with a sufficiently small Lipschitz constant. If the non-linear function depends on a single argument, which is a linear combination of the phase coordinates, the asymptotic stability in the large of the zero equilibrium position is called absolute stability. Conditions for absolute stability of systems of various types are studied in detail and published in several papers. Recently difference systems of this type have been used for modeling the dynamics of the neural networks.

We consider the system of difference in three-dimensional space. The right side of the diagonal are the linear part and nonlinear functions satisfying Lipschitz with "very low" constant. The conditions under which asymptotic stability of linear part follows the asymptotic stability of the equilibrium position of the original system.

Key words: difference system, asymptotic stability, Lipschitz conditions.

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаїнов Денис Ях'євич

Вступ

У цій роботі розглядається система трьох нелінійних різницевих рівнянь «зі слабкою нелінійністю». За цим терміном розуміються системи з виділеною лінійною частиною і нелінійної функцією, що задовольняє умові Ліпшиця з досить малою постійною Ліпшиця. Якщо нелінійна функція залежить від одного аргументу, що є лінійною комбінацією фазових координат, то асимптотична стійкість в цілому нульового положення рівноваги називається абсолютною стійкістю. Умови абсолютної стійкості систем різного виду досить докладно досліджені і опубліковані в ряді робіт, наприклад, в роботах [1-4]. Останнім часом різницеві системи такого виду стали використовуватися при моделюванні динаміки нейронних мереж [5,6].

Модель в просторі. Система без запізнення.

Розглянемо різницеву систему, динаміка якої описується трьома нелінійними різницевими рівняннями.

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= a_{11}y_1(k) + f_{11}(y_1(k)) + f_{12}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{13}(y_3(k)) + b_1 \\ y_2(k+1) &= a_{22}y_2(k) + f_{21}(y_1(k)) + f_{22}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{23}(y_3(k)) + b_2 \\ y_3(k+1) &= a_{33}y_3(k) + f_{31}(y_1(k)) + f_{32}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{33}(y_3(k)) + b_3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тут a_{11}, a_{22}, a_{33} – сталі, $f_{ij}(k)$, $i, j = \overline{1,3}$ - нелінійні функції, залежні від одного аргументу і задовольняють умові Ліпшиця зі сталими L_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$ тобто

$$\left| f_{ij}(y_j + \Delta y_j) - f_{ij}(y_j) \right| \le L_{ij} \left| \Delta y_j \right|, \; i, j = \overline{1,3} \tag{1.2}$$

Припустимо, що система рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})y_1 - f_{11}(y_1) - f_{12}(y_2) - f_{13}(y_3) &= b_1, \\ (1 - a_{22})y_2 - f_{21}(y_1) - f_{22}(y_2) - f_{23}(y_3) &= b_2, \\ (1 - a_{33})y_3 - f_{31}(y_1) - f_{32}(y_2) - f_{33}(y_3) &= b_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Має єдиний розв'язок точку $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$, $y_3^0 > 0$.

Зробимо заміну

$$y_1(k) = x_1(k) + y_1^0,\ y_2(k) = x_2(k) + y_2^0,$$

$$y_3(k) = x_3(k) + y_3^0.$$

Після підстановки в систему (1.1) отримуємо наступне

$$x_1(k+1) + y_1^0 = a_{11}\left(x_1(k) + y_1^0\right) + f_{11}\left(x_1(k) + y_1^0\right) + $$
$$+ f_{12}\left(x_2(k) + y_2^0\right) + f_{13}\left(x_3(k) + y_3^0\right) + b_1$$
$$x_2(k+1) + y_2^0 = a_{22}\left(x_2(k) + y_2^0\right) + f_{21}\left(x_1(k) + y_1^o\right) + $$
$$+ f_{22}\left(x_2(k) + y_2^0\right) + f_{23}\left(x_3(k) + y_3^0\right) + b_2$$
$$x_3(k+1) + y_3^0 = a_{33}\left(x_3(k) + y_3^0\right) + f_{31}\left(x_1(k) + y_1^o\right) + $$
$$+ f_{32}\left(x_2(k) + y_2^0\right) + f_{33}\left(x_3(k) + y_3^0\right) + b_3 \quad (1.4)$$

Перепишемо отриману систему (1.4) у вигляді

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \left[f_{11}\left(x_1(k) + y_1^0\right) - f_{11}\left(y_1^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{12}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{13}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{13}\left(y_3^0\right)\right] - $$
$$- \left[(1 - a_{11})y_1^0 - f_{11}\left(y_1^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right) - f_{13}\left(y_3^0\right) - b_1\right],$$
$$x_2(k+1) = a_{22}x_2(k) + \left[f_{21}\left(x_1(k) + y_1^0\right) - f_{21}\left(y_1^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{22}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{23}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{23}\left(y_3^0\right)\right] - $$
$$- \left[(1 - a_{22})y_2^0 - f_{21}\left(y_1^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right) - f_{23}\left(y_3^0\right) - b_2\right],$$
$$x_3(k+1) = a_{33}x_3(k) + \left[f_{31}\left(x_1(k) + y_1^0\right) - f_{31}\left(y_1^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{32}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{32}\left(y_2^0\right)\right] + $$
$$+ \left[f_{33}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{33}\left(y_3^0\right)\right] - $$
$$- \left[(1 - a_{33})y_3^0 - f_{31}\left(y_1^0\right) - f_{32}\left(y_2^0\right) - f_{33}\left(y_3^0\right) - b_3\right].$$

зробивши заміну

$$F_{11}\left(x_1(k)\right) = f_{11}\left(x_1(k) + y_1^0\right) - f_{11}\left(y_1^0\right),$$
$$F_{12}\left(x_2(k)\right) = f_{12}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{12}\left(y_2^0\right),$$
$$F_{13}\left(x_3(k)\right) = f_{13}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{13}\left(y_3^0\right),$$
$$F_{21}\left(x_1(k)\right) = f_{21}\left(x_1(k) + y_1^0\right) - f_{21}\left(y_1^0\right),$$
$$F_{22}\left(x_2(k)\right) = f_{22}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{22}\left(y_2^0\right),$$
$$F_{23}\left(x_3(k)\right) = f_{23}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{23}\left(y_3^0\right),$$
$$F_{31}\left(x_1(k)\right) = f_{31}\left(x_1(k) + y_1^o\right) - f_{31}\left(y_1^0\right),$$
$$F_{32}\left(x_2(k)\right) = f_{32}\left(x_2(k) + y_2^0\right) - f_{32}\left(y_2^0\right),$$
$$F_{33}\left(x_3(k)\right) = f_{33}\left(x_3(k) + y_3^0\right) - f_{33}\left(y_3^0\right)$$

і використовуючи співвідношення (1.3), одержуємо, що система (1.4) прийме вигляд

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + F_{11}\left(x_1(k)\right) + F_{12}\left(x_2(k)\right) + $$
$$+ F_{13}\left(x_3(k)\right),$$
$$x_2(k+1) = a_{22}x_2(k) + F_{21}\left(x_1(k)\right) + F_{22}\left(x_2(k)\right) + $$
$$+ F_{23}\left(x_3(k)\right),$$
$$x_3(k+1) = a_{33}x_3(k) + F_{31}\left(x_1(k)\right) + F_{32}\left(x_2(k)\right) + $$
$$+ F_{33}\left(x_3(k)\right). \quad (1.5)$$

оскільки

$$F_{11}(0) = 0,\ F_{12}(0) = 0,\ F_{13}(0) = 0,$$
$$F_{21}(0) = 0,\ F_{22}(0) = 0,\ F_{23}(0) = 0,$$
$$F_{31}(0) = 0,\ F_{32}(0) = 0,\ F_{33}(0) = 0,$$

то після цієї заміни дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)$ системи (1.1) звелося до дослідження стійкості нульового положення рівноваги системи (1.5). Мають місце наступні умови асимптотичної стійкості.

Теорема 1.1. Нехай система рівнянь (1.3) має єдиний розв'язок $M_0\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$, $y_3^0 > 0$ і існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, $h_{33} > 0$ при яких виконуються нерівності

$$\Delta_1 = c_{11} > 0,\ \Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0,$$
$$\Delta_3 = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{13}c_{23} + c_{12}c_{13}c_{23} - $$
$$- c_{13}^2c_{22} - c_{12}^2c_{33} - c_{23}^2c_{11} > 0 \quad (1.6)$$

де

$$c_{11} = h_{11}\left(1 - a_{11}^2\right) - 2h_{11}|a_{11}|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2$$
$$c_{12} = -h_{11}L_{12}\left(|a_{11}| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}\left(|a_{22}| + L_{22}\right) - h_{33}L_{31}L_{32}$$
$$c_{13} = -h_{11}L_{13}\left(|a_{11}| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}\left(|a_{33}| + L_{33}\right)$$
$$c_{22} = h_{22}\left(1 - a_{22}^2\right) - 2h_{22}|a_{22}|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2$$
$$c_{23} = -h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{32}(|a_{33}| + L_{33})$$
$$c_{33} = h_{33}\left(1 - a_{33}^2\right) - 2h_{33}|a_{33}|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2 \quad (1.7)$$

Тоді положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)$ системи (1.1) є асимптотично стійкою.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)$ скористаємося функцією Ляпунова квадратичного виду:

$$V\left(x_1, x_2, x_3\right) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2 + h_{33}x_3^2$$

її перша різниця в силу системи (1.6) має вигляд:

$$\Delta V\left(x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right) = $$
$$= \left[h_{11}x_1^2(k+1) + h_{22}x_2^2(k+1) + h_{33}x_3^2(k+1)\right] - $$
$$- \left[h_{11}x_1^2(k) + h_{22}x_2^2(k) + h_{33}x_3^2(k)\right].$$

або

$$\Delta V\left(x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right) = $$
$$= h_{11}\left[a_{11}x_1(k) + F_{11}\left(x_1(k)\right) + \right.$$
$$\left. + F_{12}\left(x_2(k)\right) + F_{13}\left(x_3(k)\right)\right]^2 + $$

$$+h_{22}\left[a_{22}x_2(k)+F_{21}(x_1(k))+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]^2+$$
$$+h_{33}\left[a_{33}x_3(k)+F_{31}(x_1(k))+F_{32}(x_2(k))+F_{33}(x_3(k))\right]^2-$$
$$-\left[h_{11}x_1^2(k)+h_{22}x_2^2(k)+h_{33}x_3^2(k)\right].$$

Перетворимо отриманий вираз, виділивши квадратичні складові, наступним чином

$$\Delta V\left(x_1(k),x_2(k),x_3(k)\right)=-h_{11}\left(1-a_{11}^2\right)x_1^2(k)-$$
$$-h_{22}(1-a_{22})x_2^2(k)-h_{33}(1-a_{33})x_3^2(k)+$$
$$+h_{11}\left\{2a_{11}x_1(k)\left[F_{11}(x_1(k))+F_{12}(x_2(k))+F_{13}(x_3(k))\right]+\left[F_{11}(x_1(k))+F_{12}(x_2(k))+F_{13}(x_3(k))\right]^2\right\}+h_{22}\left\{2a_{22}x_2(k)\left[F_{21}(x_1(k))+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]+\left[F_{21}(x_1(k))+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]^2\right\}+$$
$$+h_{33}\left\{2a_{33}x_3(k)\left[F_{31}(x_1(k))+F_{32}(x_2(k))+F_{33}(x_3(k))\right]+\left[F_{31}(x_1(k))+F_{32}(x_2(k))+F_{33}(x_3(k))\right]^2\right\}.$$

Використовуючи умови Ліпшиця (1.2), накладені на функції $F_{ij}(.)$, перепишемо отриманий вираз наступним чином:

$$\Delta V\left(x_1(k),x_2(k),x_3(k)\right)\le-h_{11}\left(1-a_{11}^2\right)x_1^2(k)-$$
$$-h_{22}(1-a_{22})x_2^2(k)-h_{33}(1-a_{33})x_3^2(k)+$$
$$+2h_{11}|a_{11}||x_1(k)|\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+L_{13}|x_3(k)|\right]+$$
$$+h_{11}\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+L_{13}|x_3(k)|\right]^2+$$
$$+2h_{22}|a_{22}||x_2(k)|\left[L_{21}|x_1(k)|+L_{22}|x_2(k)|+L_{23}|x_3(k)|\right]+$$
$$+h_{22}\left[L_{21}|x_1(k)|+L_{22}|x_2(k)|+L_{23}|x_3(k)|\right]^2+$$
$$+2h_{33}|a_{33}||x_3(k)|\left[L_{31}|x_1(k)|+L_{32}|x_2(k)|+L_{33}|x_3(k)|\right]+$$
$$+h_{33}\left[L_{31}|x_1(k)|+L_{32}|x_2(k)|+L_{33}|x_3(k)|\right]^2.$$

Уявімо праву частину у вигляді квадратичної форми

$$\Delta V\left(x_1(k),x_2(k),x_3(k)\right)\le$$
$$\le-\left[h_{11}\left(1-a_{11}^2\right)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2\right]x_1^2(k)+$$
$$+2\left[h_{11}L_{12}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)+h_{22}L_{21}\left(|a_{22}|+L_{22}\right)+h_{33}L_{31}L_{32}\right]|x_1(k)||x_2(k)|-$$
$$-\left[h_{22}\left(1-a_{22}^2\right)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2\right]x_2^2(k)+$$
$$+2\left[h_{11}L_{13}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)+h_{22}L_{21}L_{23}+h_{33}L_{31}\left(|a_{33}|+L_{33}\right)\right]|x_1(k)||x_3(k)|-$$
$$-\left[h_{33}\left(1-a_{33}^2\right)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2\right]x_3^2(k)+$$
$$+2\left[h_{11}L_{12}L_{13}+h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})+h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33})\right]|x_2(k)||x_3(k)|$$

Запишемо отриману нерівність у вигляді:

$$\Delta V\left(x_1(k),x_2(k),x_3(k)\right)\le-z^T(k)Cz(k),$$

$$z(k)=\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{12}&c_{22}&c_{23}\\c_{13}&c_{23}&c_{33}\end{pmatrix},$$

$$c_{11}=h_{11}\left(1-a_{11}^2\right)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2,$$
$$c_{12}=-h_{11}L_{12}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}\left(|a_{22}|+L_{22}\right)-h_{33}L_{31}L_{32},$$
$$c_{13}=-h_{11}L_{13}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}\left(|a_{33}|+L_{33}\right),$$
$$c_{22}=h_{22}\left(1-a_{22}^2\right)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2,$$
$$c_{23}=-h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33}),$$
$$c_{33}=h_{33}\left(1-a_{33}^2\right)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2.$$

Як випливає з критерію Сильвестра, умова негативної визначеності функції Ляпунова, тобто умова асимптотичної стійкості положення рівноваги системи (1.5) має вигляд (1.6).

Якщо скористатися нерівністю:

$$2AB\le A^2+B^2 \tag{1.8}$$

то можна отримати більш «грубу», але легше перевіряєму умову.

Теорема 1.2. Нехай система рівнянь (1.3) має єдиний розв’язок $M_0\left(y_1^0,y_2^0,y_3^0\right)$, $y_1^0>0$, $y_2^0>0$, $y_3^0>0$ і існують сталі $h_{11}>0$, $h_{22}>0$, $h_{33}>0$ при яких виконуються нерівності:

$$c_{11}>0,\ c_{22}>0,\ c_{33}>0 \tag{1.9}$$

де

$$c_{11}=h_{11}\left(1-a_{11}^2\right)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2-$$
$$-h_{11}L_{12}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}\left(|a_{22}|+L_{22}\right)-h_{33}L_{31}L_{32}-$$
$$-h_{11}L_{13}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}\left(|a_{33}|+L_{33}\right),$$
$$c_{22}=h_{22}\left(1-a_{22}^2\right)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2-$$
$$-h_{11}L_{12}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}\left(|a_{22}|+L_{22}\right)-h_{33}L_{31}L_{32}-$$
$$-h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33})$$
$$c_{33}=h_{33}\left(1-a_{33}^2\right)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2-$$
$$-h_{11}L_{13}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}\left(|a_{33}|+L_{33}\right)-$$
$$-h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33}) \tag{1.10}$$

Тоді положення рівноваги $M_0\left(y_1^0,y_2^0,y_3^0\right)$ система (1.1) є асимптотично стійким.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right)$ знову скористаємося функцією Ляпунова квадратичного виду:

$$V\left(x_1, x_2, x_3\right) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2 + h_{33}x_3^2 .$$

Як було показано в попередній теоремі, її перша різниця в силу системи (1.6) має вигляд:

$$\Delta V\left(x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right) \le$$
$$\le -\left[h_{11}\left(1-a_{11}^2\right) - 2h_{11}\left|a_{11}\right|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2\right]x_1^2(k) +$$
$$+2\left[h_{11}L_{12}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) + h_{22}L_{21}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) + h_{33}L_{31}L_{32}\right]\left|x_1(k)\right|\left|x_2(k)\right| -$$
$$-\left[h_{22}\left(1-a_{22}^2\right) - 2h_{22}\left|a_{22}\right|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2\right]x_2^2(k) +$$
$$+2\left[h_{11}L_{13}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) + h_{22}L_{21}L_{23} + h_{33}L_{31}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right)\right]\left|x_1(k)\right|\left|x_3(k)\right| -$$
$$-\left[h_{33}\left(1-a_{33}^2\right) - 2h_{33}\left|a_{33}\right|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2\right]x_3^2(k) +$$
$$+2\left[h_{11}L_{12}L_{13} + h_{22}L_{23}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) + h_{33}L_{32}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right)\right]\left|x_2(k)\right|\left|x_3(k)\right|$$

Скориставшись нерівністю (1.8), запишемо отриману нерівність у вигляді

$$\Delta V\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right) \le -c_{11}x_1^2(k) - c_{22}x_2^2(k) - c_{33}x_3^2(k),$$

де

$$c_{11} = h_{11}\left(1-a_{11}^2\right) - 2h_{11}\left|a_{11}\right|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2 -$$
$$-h_{11}L_{12}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) - h_{33}L_{31}L_{32} -$$
$$-h_{11}L_{13}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right),$$
$$c_{22} = h_{22}\left(1-a_{22}^2\right) - 2h_{22}\left|a_{22}\right|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2 -$$
$$-h_{11}L_{12}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) - h_{33}L_{31}L_{32} -$$
$$-h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) - h_{33}L_{32}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right)$$
$$c_{33} = h_{33}\left(1-a_{33}^2\right) - 2h_{33}\left|a_{33}\right|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2 -$$
$$-h_{11}L_{13}\left(\left|a_{11}\right| + L_{11}\right) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right) -$$
$$-h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}\left(\left|a_{22}\right| + L_{22}\right) - h_{33}L_{32}\left(\left|a_{33}\right| + L_{33}\right)$$

Умова негативної визначеності функції Ляпунова, тобто умова асимптотичної стійкості положення рівноваги системи (1.5) має вигляд (1.9), (1.10).

З а у в а ж е н н я 1.1. З нерівностей (1.6), (1.10) видно, що необхідною умовою асимптотичної стійкості рішень до положення рівноваги є «малість» нелінійних членів, тобто постійних Ліпшиця.

Список використаних джерел

1. *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования / А.И. Лурье – Москва: Гостехиздат, 1951. – 432 с.
2. *Айзерман М.А.*, Абсолютная устойчивость регулируемых систем / М.А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер – Москва: Изд.-во АН СССР, 1963. – 556 с.
3. *Баркин А.И.* Оценки качества нелинейных систем регулирования / А.И. Баркин – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
4. *Гелиг А.Х.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
6. *Berezansky L.* New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network / L. Berezansky, E. Braverman and L. Idels // Applied Mathematics and Computation 243 (2014) pp. 899–910.
7. *Khusainov D.* Stability of nonlinear difference systems, which describes the dynamics of neutral networks / D. Khusainov, J. Diblik, J. Bastinec, A. Sirenko // Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences: post-conference proceedings of selected papers extended versions. – Brno, 2014. - pp. 65–77.

References

1. LURIE A. (1951) *Nekotoyie nelineynyie zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya.* Moskva: Gostehizdat.
2. AYZERMAN M., GANTMAHER F. (1963) *Absoliutnaia ustoichivost reguliruemyh sistem.* Moskva: AN SSSR.
3. BARKIN A. (1982), *Otsenki kachestva nelineinyh system regulirovaniia.* Moskva: Nauka.
4. GELIG A., LEONOV G., YAKUBOVICH V. (1978) *Ustoichivost nelineinyh system s needinstvennym sostoianiem ravnovesiia.* Moskva: Nauka.
5. HAYKIN S. (1999) *Neural networks,* Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
6. BEREZANSKY L., BRAVERMAN E. AND IDELS L. (2014) *New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network,* Applied Mathematics and Computation 243, pp. 899–910.
7. KHUSAINOV D., DIBLIK J., BASTINEC J., SIRENKO A. (2014) *Stability of nonlinear difference systems, which describes the dynamics of neutral networks //* Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences: post-conference proceedings of selected papers extended versions. Brno, 2014, pp. 65–77.

Надійшла до редколегії 15.01.2015