УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О., аспірант
Обруч Т.П., студент

Про швидкість збіжності стаціонарних розподілів систем з повторними викликами, керованих пороговими стратегіями

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

I.Ya. Usar, Ph.D.
Iu.O. Protopop, graduate student
T.P. Obruch, student

On the convergense rate of stationary distribution of retrial systems to control the threshold strategies

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Стаття присвячена перспективному напрямку теорії стохастичних систем, пов'язаному з вивченням систем з повторними викликами. Розглядаються марковські моделі систем з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на ємність орбіти, керованих пороговими стратегіями. Спочатку для таких моделей з'ясовані умови існування стаціонарного режиму. Подальший аналіз базується на апроксимації вихідних систем системами з обмеженою орбітою, для яких знайдено явні векторно-матричні формули для стаціонарних імовірностей. Отримано швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченних систем з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченних систем.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

The paper is devoted to perspective direction of queuing theory connected with investigation of queuing systems and networks with controlled parameters. The service network which involve "r" nodes of the same type is considered. From the outside common flow arrives at the input of the network. For service of the call each node has unbounded number of servers. The main purpose of the proposed work is a choice of the control of input flow which maximize an average income.Work of the multichannel stochastic network described above is modeled by the branching process. The characteristics of accumulative process of income are studied. Asymptotical analysis of systems of integral equations for the stochastic network is realized. Conditions in which the network operates in heavy traffic are formulated. To calculate of the goal functions of optimization problems for the multichannel stochastic network in heavy traffic the method of Gaussian approximation is developed. It is shown that the main conditions for approximation of accumulative process of income Gaussian process is justice of the functional central limit theorem for the input flow and openness of the network. Evident and approximate formulas for the goal functions of optimization problems via model parameters are constructed on the basis of the performed research.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Одним із важливих розділів теорії масового обслуговування є теорія систем з повторними викликами. Такі системи детально розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці [4].

В даній статті розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $M/M/1/N$ та $M/M/1/\infty$, в яких інтенсивність вхідного потоку λ_j залежить від j - числа джерел повторних викликів. Час обслуговування приладів має показниковий розподіл з параметром μ. Якщо всі прилади зайняті, то вимога переходить на орбіту і знову повторює спробу отримати обслуговування через випадковий час, розподілений за показниковим законом з параметром ν. Процес керування роботою систем визначається на основі порогових стратегій, які реалізують наступний алгоритм управління процесом обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0,1,...,H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H+1,...$. H представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0,1,...,m\} \times \{0,1,...\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог.

При цьому для $M_Q/M/1/N$ стаціонарний розподіл завжди існує

$$\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t\to\infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j).$$

При виконанні умови $\lambda/\mu < 1$, де $\lambda = \lim_{j\to\infty}\sup \lambda_j < \infty$ і $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають ймовірності π_{ij} для системи $M_Q/M/1/\infty$. Результати роботи [3] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку.

Відмітимо (див. [1]), що завжди є справедливою нерівність

$$\pi_{ij} \le \pi_{ij}^{(N)}.$$

В роботі ми оцінюємо швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $M_Q/M/1/N$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $M_Q/M/1/\infty$ з повторними викликами.

Формули для стаціонарних розподілів для m обслуговуючих приладів та умови їх існування були знайдені в роботі [5]. З них для $M_Q/M/1/N$ - системи маємо

$$\pi_{0j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N)}{j!\nu^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k(\lambda_k + k\nu), \tag{1}$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N)}{\lambda_j j!\nu^j} \prod_{k=0}^{j} \lambda_k(\lambda_k + k\nu), \tag{2}$$

$$j = 0,...,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}(N\nu + \lambda_N)}{\mu},$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left(1 + N!B(N)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_j + j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k + k\nu)}{j!\nu^j} + N\nu + \lambda_N\right)^{-1}$$

$$B(N) = \prod_{k=0}^{N-1}\frac{\nu}{\lambda_k(\lambda_k + k\nu)},$$

а для $M_Q/M/1/\infty$ - системи відповідно маємо

$$\pi_{0j} = \frac{R}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k + k\nu), \quad j = 0,..., \tag{3}$$

$$\pi_{1j} = \frac{R}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k(\lambda_k + k\nu), \quad j = 0,..., \tag{4}$$

де

$$R = \lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1+\lambda_j + j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k + k\nu)}{j!\nu^j}\right)^{-1}.$$

Позначимо

$$R(N) = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(1+\lambda_j + j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k + k\nu)}{j!\nu^j}\right)^{-1},$$

$$Q(N) = \left(\sum_{j=0}^{N}\frac{(1+\lambda_j + j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k + k\nu)}{j!\nu^j}\right)^{-1}.$$

Тоді для кожного фіксованого j з формул (1), (2) та (3), (4) маємо

$$\left|\pi_{0j}^{(N)}-\pi_{0j}\right|=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),$$
$$\left|\pi_{1j}^{(N)}-\pi_{1j}\right|=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),$$
$$j=0,\dots,N.$$

З цих рівностей видно, що нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)$ до R. Скористаємось наступною лемою

Лема 1. Нехай $\mu=1$, $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j<1$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}R(N)\left(\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R\right)=R^2. \qquad (5)$$

Нехай $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j=q_0<1$. Тоді для всіх $1<\gamma<1/q_0$ справедлива нерівність

$$0\le\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R\le$$
$$\le\frac{2\left(q_0\gamma\right)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)} \qquad (6)$$

для всіх $N\ge\dfrac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1$.

Доведення. Враховуючи, що

$$\left(B(N)\right)^{-1}=\nu^{-N}\prod_{k=0}^{N-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),$$

маємо

$$\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R=$$
$$=\frac{\left(R(N)\right)^{-1}}{\sum_{j=0}^{N}\frac{\left(1+\lambda_j+j\nu\right)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)}{j!\nu^j}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(1+\lambda_j+j\nu\right)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)}{j!\nu^j}}$$

звідки, очевидно, випливає наша формула.

Доведемо нерівність (6). Позначимо

$$a_j=\frac{\left(1+\lambda_j+j\nu\right)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)}{j!\nu^j}$$

та виберемо $\gamma\in(1,1/q_0)$ так, щоб виконувалась нерівність $q_0\gamma<1$. Маємо

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{\left(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu\right)\lambda_j\left(\lambda_j+j\nu\right)}{\left(1+\lambda_j+j\nu\right)(j+1)\nu}\le$$
$$\le\frac{1+q_0+(j+1)\nu}{(j+1)\nu}q_0. \qquad (7)$$

Виберемо j так, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{1+q_0+(j+1)\nu}{(j+1)\nu}\le\gamma\,.$$

Маємо

$$j\ge\frac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1,$$

а, отже, з (7) знаходимо

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}\le q_0\gamma \quad \text{для} \quad j\ge\frac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1.$$

Звідки

$$a_j\le(q_0\gamma)^j a_0\le 2(q_0\gamma)^j \quad \text{для} \quad j\ge\frac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1.$$

Тепер для $N\ge\dfrac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1$ маємо

$$\left(R(N)\right)^{-1}=\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{\left(1+\lambda_j+j\nu\right)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)}{j!\nu^j}\le$$
$$\le 2\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(q_0\gamma\right)^j=\frac{2\left(q_0\gamma\right)^{N+1}}{1-q_0\gamma}$$

і тоді отримаємо

$$\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R\le\frac{2\left(q_0\gamma\right)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)}$$

для $N\ge\dfrac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1$ ($[a]$ позначає цілу частину числа для a). Лему 1 доведено.

Теорема 1. Нехай у системі з повторними викликами типу $M_Q/M/1/\infty$ $\mu=1$ і $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j<1$. Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N\to\infty}R(N)\left|\pi_{0j}^{(N)}-\pi_{0j}\right|=\frac{R^2}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j+1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),\ j=0,\dots,$$
$$\lim_{N\to\infty}R(N)\left|\pi_{1j}^{(N)}-\pi_{1j}\right|=\frac{R^2}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j+1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),\ j=0,\dots.$$

Нехай $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j=q_0<1$. Тоді для всіх $1<\gamma<1/q_0$, $j\le N$ справедливі нерівності

$$0\le\left|\pi_{0j}^{(N)}-\pi_{0j}\right|\le$$

$$\le \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)$$

$$0\le\left|\pi_{1j}^{(N)}-\pi_{1j}\right|\le$$

$$\le \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)$$

для $N\ge\dfrac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu}-1$.

Доведення. Враховуючи (5), маємо

$$\lim_{N\to\infty}R(N)\left|\pi_{0j}^{(N)}-\pi_{0j}\right|=$$

$$=R(N)\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)=$$

$$=\frac{R^2}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j+1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),\ \ j=0,\dots,$$

$$\lim_{N\to\infty}R(N)\left|\pi_{1j}^{(N)}-\pi_{1j}\right|=$$

$$=R(N)\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)-R}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)=$$

$$=\frac{R^2}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j+1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),\ \ j=0,\dots.$$

Враховуючи (6) отримаємо

$$0\le\left|\pi_{0j}^{(N)}-\pi_{0j}\right|\le$$

$$\le \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right),$$

$$0\le\left|\pi_{1j}^{(N)}-\pi_{1j}\right|\le$$

$$\le \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right).$$

Теорему 1 доведено.

У статті отримано нові результати для класу систем з повторними викликами і керованою інтенсивністю вхідного потоку, які суттєво розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами і у сукупності розв'язують важливе наукове завдання дослідження і розрахунку характеристик ефективності функціонування систем. Ці результати можуть знайти застосування для розв'язку практичних задач при проектуванні комп'ютерних мереж, створенням мобільних систем зв'язку.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008.
3. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами / С.Н. Степанов. – М.: Наука, 1983. – 232 с.
4. *Anisimov V.V.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
5. *Лебєдєв Є.О.* Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком / Є.О. Лебєдєв, І.Я. Усар // Доповіді Національної академії наук України. – 2009. - №5. – С. 52-59.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall, 331 p.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. STEPANOV, S.N. (1983) N*umerical methods for calculating systems with repeated calls.* Moskow: Science, 232 p.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals.* Queuing Systems. Vol.39, pp. 157-182.
5. LEBEDEV, E.O., USAR, I.YA., (2009) *About of retrial systems and controlled of input flow.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 8, pp. 541-569.

Надійшла до редколегії 23.01.15