

УДК 539.3

Григоренко О.Я., д.ф.-м.н., професор,  
Авраменко О. А., к.ф.-м.н., Романішин М.В.,  
аспірант.

### **Вільні коливання замкнених конічних оболонок зі змінною товщиною.**

Інститут механіки НАН України ім. С. П.  
Тимошенка, м. Київ вул. Нестерова 3,

E-mail: [Mikhail.romanishyn@yandex.ru](mailto:Mikhail.romanishyn@yandex.ru)

Grigorenko A.Ya., Doctor of science (Phys.-  
Math.), Prof., Avramenko O.A., PhD (Phys.-  
Math.), Romanishyn M.V. graduate student.

### **Natural vibrations of closed conical shells with variable thickness**

SP Timoshenko Institute of Mechanics, Nesterov  
str, 3, 252680 Kiev, Ukraine

E-mail: [Mikhail.romanishyn@yandex.ru](mailto:Mikhail.romanishyn@yandex.ru)

*Досліджуються вільні коливання замкнених конічних оболонок зі змінною товщиною при різних граничних умовах на краях на основі теорії Тимошенка – Мідліна. Для розрахунку частот застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації разом з методом покрового пошуку.*

*Ключові слова: замкнена конічна оболонка, вільні коливання, теорія Тимошенка – Мідліна, сплайн – апроксимація.*

*The problem on natural vibrations of closed conical shells with variable thickness under various boundary conditions on the basis of Timoshenko – Midlin theory is considered. The numerically-analytical method, based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods, is developed. Using the spline collocation method, the two-dimensional boundary value problem, which describes the natural vibrations of shell, was reduced to one-dimensional and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. Analysis of different formulations and influence of radius size on periodicity of natural vibrations was obtained. The natural vibrations of conical shell in dependency on boundary conditions were studied. Are found to form of natural vibrations for a given shell, which correspond to the first three periodicity. Analysis of the results shows at a sufficiently high precision of calculations, even with a small number point of collocation.*

*Key Words: closed conical shells, natural vibration, Timoshenko – Midlin theory, spline-approximation.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

## **1. Вступ**

Конічні оболонки в якості конструктивних елементів знаходять широке застосування в сучасній техніці. У випадку змінної товщини оболонки, використання композитних матеріалів або складного навантаження використання класичної моделі в багатьох випадках пов'язано зі значними труднощами, тому при дослідженні динамічних характеристик оболонок змінної товщини використовується уточнена теорія оболонок. В науковій літературі є ряд робіт,

присвячених дослідженню коливань однорідних і неоднорідних конічних оболонок постійної та змінної товщини на основі різних теорій [1-5].

В даному повідомленні для дослідження вільних коливань нетонких конічних оболонок, зі змінною в окружному напрямку товщиною, в рамках уточненої теорії оболонок Тимошенка – Мідліна, застосовується ефективна чисельна методика, яка базується на використанні сплайн – апроксимації, а також методу дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покрового пошуку [2,4,5]. Одновимірні

крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо задачу про вільні коливання замкнених конічних оболонок в уточненій постановці, яка базується на гіпотезі прямої лінії. В відповідності до неї в системі координат  $\gamma, \theta, s$  ( $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ,  $0 \leq s \leq L$ ) переміщення можна записати у вигляді,

$$\begin{aligned} u_s(\gamma, \theta, s) &= u(\theta, s) + \gamma \psi_s(\theta, s), \\ u_\theta(\gamma, \theta, s) &= v(\theta, s) + \gamma \psi_\theta(\theta, s), \quad (1) \\ u_\gamma(\gamma, \theta, s) &= w(\theta, s), \end{aligned}$$

де  $u(\theta, s), v(\theta, s), w(\theta, s)$  – переміщення точок координатної поверхні,  $\psi_\theta(\theta, s), \psi_s(\theta, s)$  – функції, які характеризують повний поворот прямолінійного елемента.

Представимо зв'язок між деформаціями і переміщеннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \\ \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v; \quad \kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}; \quad (2) \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_s \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \right\}; \\ 2\kappa_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\psi_\theta}{r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right); \\ \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s; \quad \gamma_\theta = \psi_\theta - \vartheta_\theta; \\ \vartheta_s &= -\frac{\partial w}{\partial s}; \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v \sin \varphi}{r}. \end{aligned}$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_s, \varepsilon_{s\theta}$  – тангенціальні,  $\kappa_\theta, \kappa_s, \kappa_{s\theta}$  – згинні деформації координатної поверхні,  $\vartheta_s, \vartheta_\theta$  – кути повороту нормалі, без урахування поперечних зсувів.;  $\gamma_s, \gamma_\theta$  – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння руху мають вигляд

$$\cos \varphi N_s + r \frac{\partial N_s}{\partial s} - N_\theta \cos \varphi + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} = r \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi N_{s\theta} + r \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \cos \varphi N_{\theta s} + \sin \varphi Q_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \cos \varphi Q_s + r \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi N_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3) \\ r \frac{\partial M_s}{\partial s} + \cos \varphi M_s - \cos \varphi M_\theta + \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - r Q_s &= \frac{r \rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi (M_{s\theta} + M_{\theta s}) + r \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} - r Q_\theta &= \frac{r \rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

де  $N_s, N_\theta, N_{\theta s}, N_{s\theta}$  – тангенціальні,  $Q_\theta, Q_s$  – перерізуючі зусилля;  $M_\theta, M_s, M_{\theta s}, M_{s\theta}$  – згинні та зкручуючі моменти;  $\rho(\theta, s)$  – густина матеріалу оболонки,  $h$  – товщина оболонки.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно серединної поверхні запишемо у вигляді

$$N_s = C_{11} \varepsilon_s + C_{12} \varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_s + C_{22} \varepsilon_\theta;$$

$$N_{s\theta} = C_{66} \varepsilon_{s\theta} + \frac{2 \sin \varphi}{r} D_{66} \kappa_{s\theta}; \quad (4)$$

$$M_s = D_{11} \kappa_s + D_{12} \kappa_\theta; \quad M_\theta = D_{12} \kappa_s + D_{22} \kappa_\theta;$$

$$M_{s\theta} = M_{\theta s} = 2D_{66} \kappa_{s\theta};$$

$$Q_s = K_1 \gamma_s; \quad Q_\theta = K_2 \gamma_\theta, \text{ де}$$

$$C_{11} = \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; \quad C_{12} = \nu_\theta C_{11};$$

$$C_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; \quad C_{66} = G_{s\theta} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; \quad D_{12} = \nu_\theta D_{11};$$

$$D_{22} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; \quad D_{66} = \frac{G_{s\theta} h^3}{12};$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{s\gamma}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma}$$

де  $G_{s\gamma}(\theta, s), G_{\theta\gamma}(\theta, s), G_{s\theta}(\theta, s)$  – модулі поперечних зсувів,  $E_s(\theta, s), E_\theta(\theta, s)$  – модулі Юнга,  $\nu_s(\theta, s), \nu_\theta(\theta, s)$  – коефіцієнти Пуассона..

З системи рівнянь (2)-(4), за допомогою тотожних перетворень, отримаємо п'ять еквівалентних диференціальних рівнянь відносно п'яти змінних  $u, v, w, \psi_s, \psi_\theta$  - точок серединної поверхні оболонки.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11}u + b_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{13} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{15}v + b_{16} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &+ b_{17} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{18} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{19}w + b_{1,10} \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21}u + b_{22} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{23} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{25}v + \\ &+ b_{26} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{27} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{28} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{29}w + b_{2,11} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{2,11} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{2,13} \psi_\theta + b_{2,14} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{2,15} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= b_{31}u + b_{32} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{33}v + b_{34} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{35}w + b_{36} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{37} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{39} \psi_s + b_{3,10} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{3,11} \psi_\theta + b_{3,12} \frac{\psi_\theta}{\partial \theta}; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} &= b_{41}u + b_{42} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{43} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{45}v + b_{46} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &+ b_{47} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{48} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{49}w + b_{4,10} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{4,11} \psi_s + \\ &+ b_{4,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{4,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + b_{4,15} \psi_\theta + \\ &+ b_{4,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{4,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{4,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s \partial \theta}; \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= b_{51}u + b_{52} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{53} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{54} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{55}v + \\ &+ b_{56} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{57} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{58} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{59}w + b_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{5,11} \psi_s + b_{5,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{5,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{5,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + \\ &+ b_{5,15} \psi_\theta + b_{5,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{5,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{5,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2}; \end{aligned}$$

$(0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .

На криволінійних контурах  $s = 0$  і  $s = L$  розглянемо такі граничні умови:

1) жорстке закріплення

$$u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_s = 0$$

2) шарнірне обпирання (контур вільний в напрямку твірної)

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial \Psi_s}{\partial s} = \Psi_\theta = 0$$

При  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  можна задати один з видів таких граничних умов:

1) контур жорстко закріплений

$$u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_s = 0;$$

2) контур шарнірно опертий

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \Psi_s = \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} = 0;$$

3) умови симетрії ( для замкнених оболонок при  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$  та симетрично неоднорідних відносно  $\theta = \theta_i$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0.$$

### 3. Метод розв'язання

Задачу (5) з відповідними граничними умовами можна розв'язати з використанням методу сплайн - колокації [2,4,5].

Розв'язувальні функції  $u(s, \theta), v(s, \theta), w(s, \theta), \psi_s(s, \theta), \psi_\theta(s, \theta)$  представимо у вигляді

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \phi_{1i}(s), \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \phi_{2i}(s), \\ w &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \phi_{3i}(s), \quad \psi_s = \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \phi_{4i}(s), \quad (6) \\ \psi_\theta &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \phi_{5i}(s). \end{aligned}$$

де  $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{si}, \psi_{\theta i}$  ( $i = 0, \dots, N$ ) - шукані функції змінної  $\theta$ ;  $\phi_{ji}(s)$  ( $j = 1..5$ ), - лінійні комбінації В - сплайнів на рівномірній сітці  $\Delta, 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L$  з врахуванням граничних умов при  $s = 0$  та  $s = L$ . В розв'язувальну систему (5) входять похідні по координаті  $s$  не вище другого порядку, отже можна обмежитися апроксимацією сплайн -

функціями третього степеня. Підставляючи вирази (6) в рівняння (5), вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно виконувались в  $N + 1$  точці колокації  $\xi_k \in [0, L]$ ,  $k = \overline{0, N}$  [2,5,6]. В результаті отримаємо одновимірну крайову задачу

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega)\bar{Y}, \quad (7)$$

$$B_1\bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_1, \quad (8)$$

$$B_2\bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_2,$$

де  $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_s', \bar{\psi}_\theta, \bar{\psi}_\theta'\}$ ,  $\bar{u} = \{u_0, \dots, u_N\}$ ,  $\bar{v} = \{v_0, \dots, v_N\}$ ,  $\bar{w} = \{w_0, \dots, w_N\}$ ,  $\bar{\psi}_s = \{\psi_{s0}, \dots, \psi_{sN}\}$ ,  $\bar{\psi}_\theta = \{\psi_{\theta 0}, \dots, \psi_{\theta N}\}$ ,  $A$  – квадратна матриця порядку  $10(N+1) \times 10(N+1)$ ,  $B_1$  та  $B_2$  – прямокутні матриці граничних умов порядку  $5(N+1) \times 10(N+1)$ .

Задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь (7) з відповідними граничними умовами (8) розв'язувались стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації разом з застосуванням метода покровоного пошуку [1].

Після підстановки  $\bar{Y}$  в (6) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

#### 4. Результати розрахунків

Розглядалась замкнена конічна, з поперечним відтинком, оболонка змінної в окружному напрямі товщини з довжиною  $L = 30$ , радіусом при  $R_0 = 15$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , виготовлена з волокнистого склопластику з ортогонально укладеними слоями з наступними характеристиками пружності:

$$v_{\theta s} = 0,149, v_{s\theta} = 0,0648,$$

$$E_s = 4,76 \cdot 10^4 \text{ МПа}, E_\theta = 2,07 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{s\theta} = 0,531 \cdot 10^4 \text{ МПа}, G_{s\gamma} = 0,501 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{\theta\gamma} = 0,434 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Задача дослідження – проаналізувати вплив параметра  $\alpha$ , який визначає зміну товщини оболонки в окружному напрямку, на спектр частот вільних коливань ортотропної оболонки

при різній кількості точок колокації. Виконується умова шарнірного опирання на торці.

В таблиці 1 представлені результати розрахунку перших трьох значень частотного  $\Omega_m = \omega_m H_0 \sqrt{\rho / E_0}$ ,  $E_0 = 10^4$  МПа, коливання оболонки зі змінною в окружному напрямку товщиною, змінюються за законом

$$H(\theta) = H_0 \left( 1 + \alpha \left( 6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right),$$

$$H_0 = 3 \text{ при } \alpha = -0,2; -0,1; 0; 0,1; 0,2;$$

Розрахунки проводились для  $N = 14$  (число точок колокації).

Таблиця 1

Частоти вільних коливань замкнутої ортотропної конічної оболонки перемінної товщини в залежності від параметра  $\alpha$

N	$\Omega_m$	$\alpha$				
		-0,2	-0,1	0	0,1	0,2
N=10	$\Omega_1$	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197
	$\Omega_2$	0,0236	0,0238	0,0239	0,0241	0,0242
	$\Omega_3$	0,0272	0,0272	0,0272	0,0272	0,0273
N=14	$\Omega_1$	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197
	$\Omega_2$	0,0236	0,0238	0,0239	0,0241	0,0242
	$\Omega_3$	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272	0,0272
N=18	$\Omega_1$	0,0196	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197
	$\Omega_2$	0,0235	0,0237	0,0239	0,0241	0,0242
	$\Omega_3$	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272	0,0272
N=22	$\Omega_1$	0,0195	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197
	$\Omega_2$	0,0233	0,0237	0,0238	0,0240	0,0242
	$\Omega_3$	0,0271	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272

На основі даних в табл. 1 можна прослідкувати характер зміни значень власних частот конічних оболонок зі змінною товщиною відносно оболонок з постійною товщиною при шарнірному опиранні на торці. Аналіз результатів показує на достатньо високу точність розрахунків навіть при малому числі точок колокації. Збільшення числа точок колокації N в умовах даної задачі збільшує точність розрахунків не більше ніж на 0,3 %.

Для даної оболонки знайдені форми вільних

коливань (мал. 1-3), які відповідають першим трьом частотам при шарнірному опиранні торців. Розглядається значення параметра  $\alpha = 0,2$ . При даному законі зміни товщини оболонки вплив параметра зміни товщини  $\alpha$  на форми вільних коливань ортотропної оболонки несуттєві.

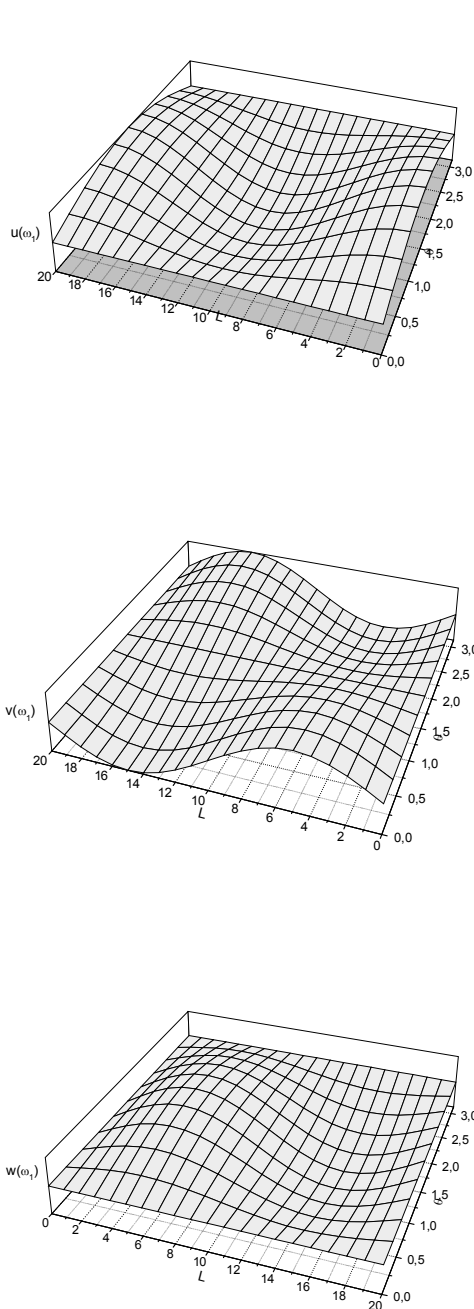


Рис. 1 Перша форма коливань замкненої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців.

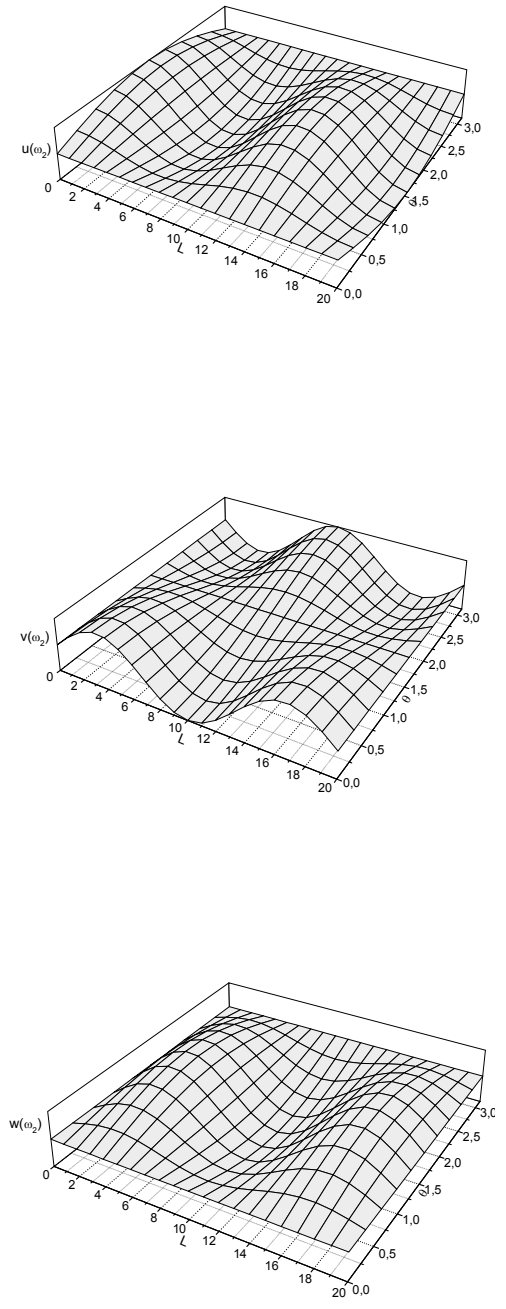


Рис. 2 Друга форма коливань замкненої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців

Список використаних джерел

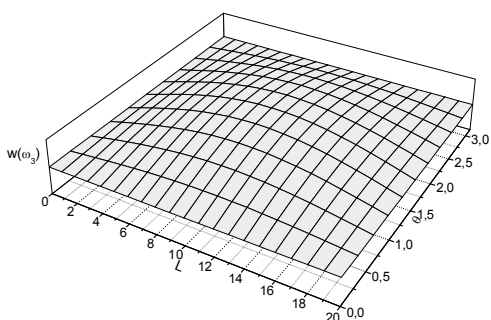
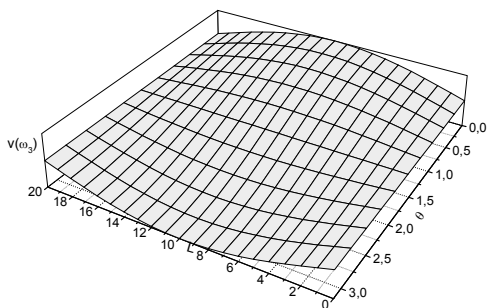
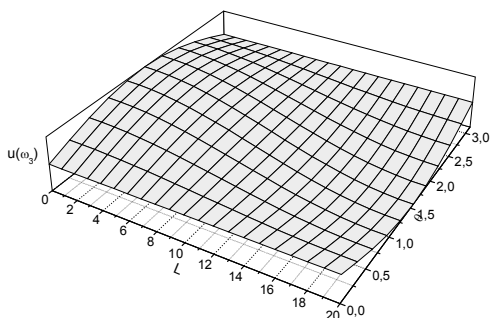


Рис. 3 Третя форма коливань замкненої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців

1. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. - К.: Наук. думка, 1986. -- 171 с.
2. Leissa A.W. Vibration of Shells / Leissa A.W. -- NASA SP-288: country-regionUS Government Printing Office, StateplaceWashington, 1973. - Reprinted by the Acoust. Soc. Of Am., 1993. - 428p.
3. Qatu M.S. Recent research advance in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, / M.S. Qatu // Appl. Mech. Rev. - 2002. №4- P. 415-434.
4. Григоренко А.Я. Вільні коливання квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів /Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Власова І.В. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – серія – Фізико-математичні науки. – 2012. – вип. №2. – с.55 – 59.
5. Григоренко А. Я. О свободных колебаниях нетонких цилиндрических оболочек переменной толщины на основе метода сплайн-коллокации / Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколов Л. В. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010., №4. – с. 169-179.

References

1. GRIGORENKO YA.M., BESPALOVA E.I., KYTAIGORODSKYI A.B., SHYNKAR A.I.(1986) *Svobodnie kolebaniya elementov obolochek konstrukcii*. Kiev:Naukova dumka.
2. LEISSA A.W.(1973) *Vibration of Shells*. NASA SP-288: country-regionUS Government Printing Office
3. QATU M.S(2002). *Recent research advance in the dynamic behavior of shells*. Appl. Mech. Rev.V. 2.pp.415-434.
4. GRIGORENKO A.YA., EFIMOVA T.L., VLASOVA I.V. (2012) *Natural vibrations of square anisotropic plats with variable thickness of layers*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics V.2 pp. 55-59.
5. GRIGORENKO A.YA., EFIMOVA T.L., SOKOLOVA L.V.(2010). *O svobodnih kolebaniyah netonkih cilindricheskikh obolochek peremennoi tolschiny na osnove metoda splain-kollokacii*. Lviv: Mat. metody ta fiz.-meh. polia.V.4. pp. 169-179.

Надійшла до редколегії 16.02.15