

УДК 539.3

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.
Карнаухова Т.В.³, к. ф.-м. н., доц.

I.F. Kirichok¹, Dr.Sci.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.
T.V. Karnaukhova³, Ph.D., Assoc. Prof.

Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву

Damping of the resonant axisymmetric vibration of infinitely long viscoelastic cylindrical shell containing piezoelectric sensor and actuator accounting for vibroheating

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,

¹S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str., Kyiv 03057

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: y.zhuk@i.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680

³ Київський національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37

³National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 37, Peremohy ave., Kyiv 03056

Розглянуто задачу про вимушені резонансні осесиметричні коливання та вібророзігрів циліндричної оболонки нескінченної довжини з п'єзоелектричними сенсором і актуатором. Досліджено вплив температурної залежності комплексних характеристик пасивного матеріалу на амплітуду коливань і температуру вібророзігріву та можливість активного демпфування коливань оболонки.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, в'язкопружна циліндрична оболонка, сенсор, актуатор, обернений зв'язок.

The problem of forced axisymmetric resonant vibration and dissipative heating of infinite cylindrical shell containing piezoelectric sensor and actuator is investigated. It is assumed that the core layer of the three-layer shell is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of harmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value moduli is applied to formulate the relations between main field characteristics. The set of amplitudes of the main field variables is investigated. Influence of temperature dependence of complex characteristics of the electrically passive material on both amplitude of the vibration and temperature of the dissipative heating is studied. Possibility of active damping of the shell vibration is examined. It is shown that this damping can be realized through the linear feedback control law. It is organized as the linear dependence between the actuator rate and the variation rate of the electric potentials of the sensor. The heat transfer coefficient influence onto critical values of the amplitudes of mechanical loading causing the overheating of the shell to the critical temperatures leading to thermal breaking of the shell is studied in details.

Key Words: resonant vibrations, dissipative heating, viscoelastic cylindrical shell, sensor, actuator, feedback.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Для зниження рівня коливань тонкостінних оболонкових елементів із пружних і в'язкопружних матеріалів в сучасних конструкціях широко

застосовуються методи активного демпфування з використанням п'єзоактивних включень, які виконують роль сенсорів та актуаторів [1-3]. Побудова електротермомеханічних моделей динаміч-

ної поведінки шаруватих тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних (без п'єзо ефекту) і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням температурної залежності властивостей матеріалів, геометричної та фізичної нелінійностей, а також розв'язки конкретних задач отримані в працях [4-8] та ін. Зокрема, в статтях [6-8] подано аналітичні та чисельні результати для задачі про вимушені осесиметричні коливання і вібророзігрів циліндричних оболонок з п'єзоелектричними шарами, які виконують роль актуаторів або сенсорів.

В даній статті досліджуються вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки та її демпфування п'єзоактивними шарами, один з яких виконує роль сенсора, а другий – актуатора. Демпфування реалізується шляхом підключення механізму оберненого зв'язку, який впливає на дисипативні характеристики системи. Враховується температурна залежність властивостей пасивного матеріалу несучого шару оболонки.

2. Постановка задачі та її розв'язання.

Розглядається тришарова циліндрична оболонка нескінченної довжини, віднесена до ортогональної системи координат $O\alpha\theta z$ з координатою $z = 0$ на серединній поверхні в'язкопружного середнього шару радіуса R і товщини h_0 . Внутрішній ($z \leq -h_0/2$) і зовнішній ($z \geq h_0/2$) шари товщиною h_1 і h_2 , відповідно, виготовлені із поляризованої по товщині пружної п'єзокераміки. Між пасивним і п'єзоактивними шарами та на зовнішніх поверхнях п'єзошарів нанесено нескінченно тонкі електроди. На внутрішніх електродах задано електричний потенціал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Вважаємо, що шар товщиною h_1 виконує роль сенсора, а шар товщиною h_2 є актуатором.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском $q_z = q \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t із сталою амплітудою q і близькою до резонансної частотою ω . Крім того, до електродів актуатора з частотою механічного навантаження для компенсації його дії підводиться різниця електричних потенціалів амплітуди ${}^2\varphi(h_0/2 + h_2) - {}^2\varphi(h_0/2) = V_a$. При цьому на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів невідомої амплітуди ${}^1\varphi(-h_0/2 - h_1) - {}^1\varphi(-h_0/2) = V_s$ та на електродо-

ваних поверхнях S виконуються такі електричні граничні умови:

$$\iint_S {}^1D_z ds = 0. \quad (1)$$

Тут 1D_z – нормальна складова електричної індукції. На поверхнях оболонки реалізується конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура T_0 якого дорівнює початковій температурі оболонки.

При моделюванні електротермомеханічної поведінки досліджуваної оболонки вважаємо, що по всьому пакету шарів справедливі гіпотези Кірхгофа–Лява, і механічна поведінка описується безмоментною теорією оболонок. Відносно електричних змінних мають місце адекватні припущення [3], з яких витікає, що D_z є сталою по товщині п'єзошарів $D_z = \text{const}$. В'язкопружні властивості пасивного матеріалу при циклічному деформуванні описуються температурозалежними комплексними модулями [9]. Розглядаючи режим усталених коливань і вібророзігріву, вважаємо температуру постійною по товщині пакету.

На основі прийнятих гіпотез із тривимірних співвідношень для поляризованої вздовж вісі Oz п'єзокераміки отримуємо такі вирази для визначальних рівнянь в п'єзоактивних шарах:

$$\begin{aligned} {}^m\sigma_\theta &= {}^m c_{11} \varepsilon_\theta - {}^m b_{31} {}^m E_z; \\ {}^m D_z &= {}^m b_{31} \varepsilon_\theta - {}^m \hat{\varepsilon}_{33} {}^m E_z; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{w}{R}; \quad {}^m E_z = -\frac{d {}^m \varphi}{dz}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} {}^m c_{11} &= \frac{1}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)}; \quad {}^m \nu_E = -\frac{{}^m s_{12}^E}{{}^m s_{11}^E}; \\ {}^m b_{31} &= \frac{{}^m d_{31}}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)}; \quad {}^m \hat{\varepsilon}_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T - 2 {}^m b_{31} {}^m d_{31}; \end{aligned}$$

і ${}^m s_{11}^E$, ${}^m s_{12}^E$, ${}^m d_{31}$, ${}^m \varepsilon_{33}^T$ – податливості, п'єзомодуль і діелектрична проникність матеріалу п'єзомодуль електричних шарів; $w = w' + iw''$ – комплексна амплітуда прогину, $m = 1, 2$.

Для в'язкопружного матеріалу пасивного шару справедливі перша і третя залежності із (2), в яких необхідно покласти ${}^m c_{11} = {}^0 c_{11} = E(T)/(1 - \nu^2)$, ${}^m b_{31} = 0$, де $E = E' + iE''$ – комплексний модуль в'язкопружності, який залежить від температури; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона.

Інтегруючи залежності (2) по пакету шарів оболонки, отримуємо вирази для зусилля N_θ

$$N_\theta = D_N \frac{w}{R} - {}^1b_{31}V_s + {}^2b_{31}V_a; \quad (3)$$

$$D_N = {}^1c_{11}h_1 + {}^2c_{11}h_2 + {}^0c_{11}h_0.$$

Електрична індукція в п'єзоелектричному сенсорі визначається за формулою

$${}^1D_z = {}^1b_{31} \frac{w}{R} + {}^1\hat{\varepsilon}_{33} \frac{V_s}{h_1}. \quad (4)$$

Задовольняючи граничній умові (1), з (4) отримуємо вираз для амплітуди електричного потенціалу на електродах сенсора

$$V_s = -\frac{{}^1b_{31}h_1}{{}^1\hat{\varepsilon}_{33}R} w. \quad (5)$$

В рамках безмоментної теорії рівняння гармонічних коливань досліджуваної оболонки в термінах амплітуд змінних має вигляд (множник $e^{i\omega t}$ опущений)

$$N_\theta - \hat{\rho} R \omega^2 w = \hat{q}, \quad (6)$$

де

$$\hat{\rho} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_0 h_0; \quad \hat{q} = R(h_0 + h_1 + h_2),$$

а ρ_1 , ρ_2 і ρ_0 – питома густина п'єзокераміки сенсора, актуатора і пасивного матеріалу відповідно.

Для демпфування механічних коливань оболонки шляхом підведення до актуатора різниці електричних потенціалів V_a використовуємо механізм оберненого зв'язку у формі лінійної залежності показника V_a і похідної за часом показника сенсора V_s , тобто

$$V_a = -i\omega G_{as} V_s. \quad (7)$$

Тут G_{as} – параметр керування, який впливає на дисипативні властивості системи. Знак «-» означає протифазне до механічного навантаження підведення потенціалу V_a до актуатора.

В силу прийнятих припущень і умов теплообміну стаціонарне значення температури дисипативного розігріву оболонки визначається співвідношенням

$$-2\alpha_s \theta + \frac{\omega}{2(1-\nu^2)R^2} E''(\theta) |w|^2 = 0, \quad (8)$$

в якому $|w| = (w'^2 + w''^2)^{1/2}$, $\theta = T - T_0$; α_s – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем.

Підставляючи вираз (3) в рівняння (6) з врахуванням (5), (7), після нескладних перетворень знаходимо

$$|w| = \left| q / (\Delta^2 + \Delta'^2)^{1/2} \right|, \quad (9)$$

де

$$\Delta' = D_N^0 + \gamma_2 - R\hat{\rho}\omega^2 + m_1 E'(\theta), \quad \Delta'' = \gamma_1 + m_1 E''(\theta),$$

$$D_N^0 = ({}^1c_{11}h_1 + {}^2c_{11}h_2), \quad m_1 = h_0 / [(1-\nu^2)R],$$

$$\gamma_2 = {}^1b_{31}^2 h_1 / ({}^1\hat{\varepsilon}_{33} R), \quad \gamma_1 = \omega G_{as}^2 b_{31} \gamma_2.$$

Комбінація співвідношень (8), (9) приводить до трансцендентного рівняння відносно невідомої температури θ при заданих функціях $E'(\theta)$, $E''(\theta)$.

Вважаємо, що складові комплексного модуля характеризуються лінійною залежністю від температури:

$$E'(\theta) = E'_0 + E'_1 \theta; \quad E''(\theta) = E''_0 + E''_1 \theta. \quad (10)$$

З врахуванням залежностей (10) із рівнянь (8), (9) для обчислення температури вібророзігріву оболонки отримуємо таке кубічне рівняння:

$$a_3 \theta^3 + a_2 \theta^2 + a_1 \theta - m_{30} q^2 = 0. \quad (11)$$

Співвідношення (9) для визначення амплітуди прогину зводиться до формули

$$|w| = q / (a_0 + a_2 \theta + a_3 \theta^2)^{1/2}. \quad (12)$$

В рівняннях (11), (12) використані наступні позначення:

$$a_0 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \quad a_1 = a_0 - m_{31} q^2,$$

$$a_2 = 2(d_1 \Delta_1 + d_2 \Delta_2), \quad a_3 = d_1^2 + d_2^2;$$

$$\Delta_1 = D_N^0 + \gamma_2 + m_1 E'_0 - R\rho_* \omega^2, \quad \Delta_2 = \gamma_1 + m_1 E''_0;$$

$$d_1 = m_1 E'_1, \quad d_2 = m_1 E''_1;$$

$$m_{30} = m_0 E''_0, \quad m_{31} = m_0 E''_1, \quad m_0 = \omega / [4\alpha_s (1-\nu^2) R^2].$$

При незалежних від температури складових комплексного модуля амплітуда прогину і температура вібророзігріву розраховуються на основі залежностей (9) і (8), в яких необхідно покласти $E'(\theta) = E'_0$, $E''(\theta) = E''_0$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз.

Числові розрахунки проведено для оболонки з розмірами $R = 0,1$ м, $h_0 = 0,004$ м, $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м. Пасивний шар виготовлений із полімера [10] з параметрами температурної апроксимації матеріалу

$$E'_0 = 0,216594 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E''_0 = 0,236994 \cdot 10^8 \text{ Па/}^\circ\text{С},$$

$$\delta_E = 0,092, \quad E''_{0,1} = \delta_E E'_{0,1}, \quad \rho_0 = 929 \text{ кг/м}^3,$$

$$\nu = 0,3636, \quad T_0 = 20^\circ\text{С}.$$

П'єзоелектричні актуатор і сенсор виготовлені з однакової п'єзокераміки типу ЦТСтБС-2 [11] з параметрами

$$s_{11}^E = 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad s_{12}^E = -4,62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н},$$

$$d_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}, \quad \varepsilon_{33}^T = 21 \cdot 10^2 \varepsilon_0 \text{ м}^2/\text{Н},$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 7520 \text{ кг/м}^3.$$

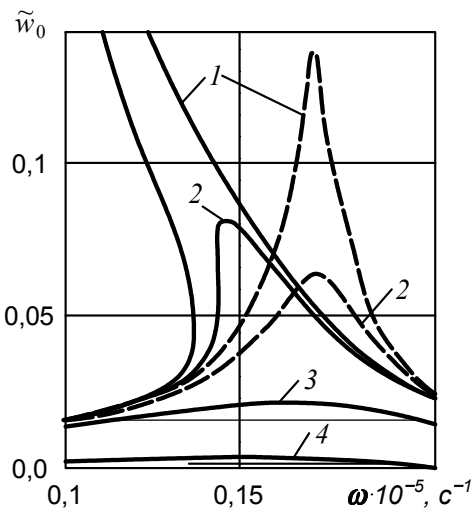


Рис. 1. Частотні залежності амплітуд прогинів оболонки при механічному навантаженні.

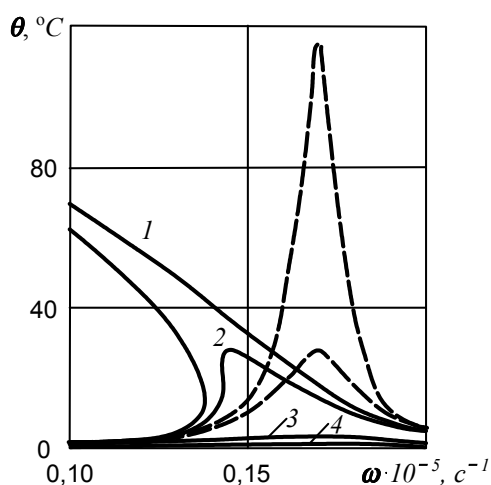


Рис. 2. Температурно-частотні характеристики коливань оболонки при механічному навантаженні.

На рис. 1 кривими 1–4 показано частотні залежності безрозмірних амплітуд прогинів $\tilde{w} = |w| \cdot 10^2 / h_0$ оболонки при механічному навантаженні з амплітудою $\hat{q} = 0,5 \cdot 10^2 \text{ Н}$, які розраховані для параметрів керування $G_{as} = 0; 0,002; 0,01$ і $0,1$ відповідно. Аналогічні температурно-частотні характеристики при $\alpha_s = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ представлено на рис. 2. Тут штрихові криві відповідають ізотермічному модулю пасивного матеріалу, а суцільні – при врахуванні його залежності від температури. З рис. 1, 2 видно, що вра-

хування температурної залежності властивостей матеріалу приводить до відомого явища трансформації ізотермічних характеристик в нелінійні характеристики м'якого типу при зменшенні власної частоти.

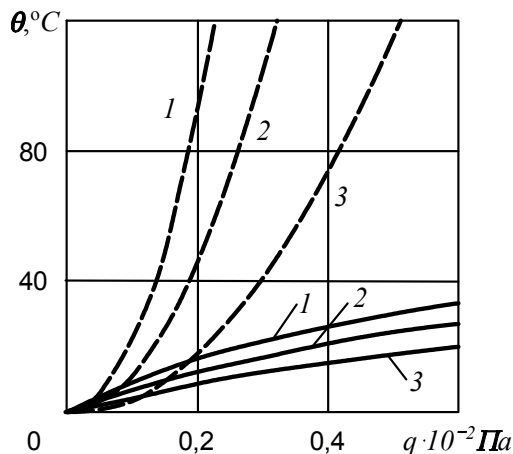


Рис. 3. Залежності температури вібророзігріву від амплітуди механічного навантаження q .

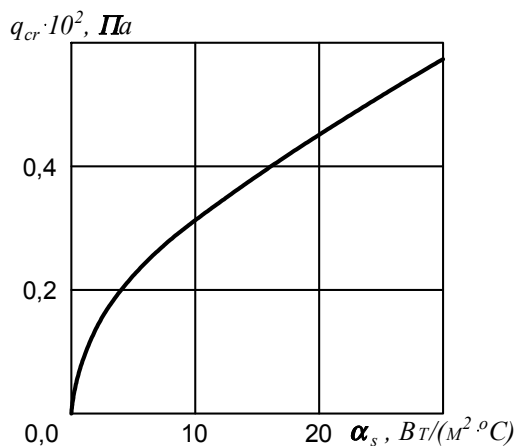


Рис. 4. Залежність критичного значення амплітуди механічного навантаження від параметра теплообміну α_s .

Включення механізму оберненого зв'язку з використанням швидкості зміни електричного показника сенсора дозволяє ефективно керувати коливаннями і вібророзігрівом системи. При цьому, збільшення параметра керування G_{as} супроводжується зменшенням амплітуди механічних коливань аж до їх повного гасіння.

Температура вібророзігріву в'язкопружних елементів, виготовлених з пасивних і п'єзоактивних складових, при відповідних рівнях механічного навантаження і умов теплообміну може досягати критичного значення T_{cr} , при якій настає теплове руйнування системи через розм'якшення пасивного матеріалу, або деполя-

ризацію п'єзокераміки (при досягненні температурою точки Кюрі). На рис. 3 приведені криві 1–3 залежності температури вібророзігріву $\theta = T - T_0$ недемпфованої оболонки ($G_{as} = 0$) від амплітуди механічного навантаження q , розраховані для частоти $\omega = 1700 \text{ с}^{-1}$ при ізотермічному (штрихові лінії) і залежному від температури (суцільні лінії) значеннях комплексного модуля Юнга з коефіцієнтом теплообміну $\alpha_s = 5; 10$ і $25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, відповідно. Аналіз кривих на рис. 3 показує, що критичні значення амплітуди навантаження q_{cr} , при яких вібророзігрів досягає температури розм'якшення розглядуваного пасивного матеріалу $\theta_{cr} \approx 120^\circ\text{C}$, суттєво залежить від параметра теплообміну α_s . У випадку ізотермічного модуля пружності таку залежність характеризує крива на рис. 4. Видно, що q_{cr} прямує до нуля при $\alpha_s \rightarrow 0$ і монотонно збільшується при $\alpha_s \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. *Gabbert U.* Smart structures and structronic systems / U. Gabbert, H.S. Tzou – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 384p.
2. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400p.
3. *Карнаухов В.Г.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. - Житомир: ЖСТУ, 2005. – 428с.
4. *Zhuk Y.A.* Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account / Y.A. Zhuk, I.A. Guz // International Applied Mechanics. – 2009. – **45**, №1. – P. 94-108
5. *Kirichok I.F.* Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators / I.F. Kirichok // International Applied Mechanics. – 2011. – **46**, № 8. – P. 890-901.
6. *Kirichok I.F.* Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators / I.F. Kirichok, T.V. Karnaukhova // International Applied Mechanics. – 2011. – **46**, № 10. – P. 1132-1138.

4. Висновки.

Дано постановку задачі про вимушені осесиметричні резонансні коливання й вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки нескінченної довжини з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні температурної залежності властивостей пасивного матеріалу. Показано можливість активного демпфування коливань оболонки за допомогою механізму оберненого зв'язку, який реалізується лінійною залежністю показника п'єзоактуатора від швидкості зміни різниці електричних потенціалів на електродах сенсора. Враховується залежність в'язкопружного модуля від температури. Досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на критичні значення амплітуди механічного навантаження, при яких температура вібророзігріву досягає критичної і відбувається теплове руйнування оболонки.

References

1. *GABBERT U.* (2001) Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
2. *TZOU H.S.* (1993) Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. *KARNAUKHOV V.G., MIKHAILENKO V.V.* (2005) Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugih tel pri monogarmonicheskom nagruzhennii. - Zhytomir: ZSTU.
4. *ZHUK Y.A., GUZ I.A.* (2009) Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account // International Applied Mechanics. – **45**, №1. – P. 94-108
5. *KIRICHOK I.F.* (2011) Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // International Applied Mechanics. – **46**, № 8. – P. 890-901.
6. *KIRICHOK I.F., KARNAUKHOVA T.V.* (2011) Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // International Applied Mechanics. – **46**, № 10. – P. 1132-1138.

7. Киричок І.Ф. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами / И.Ф. Киричок, Я.О. Жук // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – № 7(53). – С. 149-156.
8. Киричок І.Ф. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів / І.Ф. Киричок, Т.В. Карнаухова // Вісник Київського університету. – Сер.: Фізико-математичні науки. – 2013. – №3. – С. 150-153.
9. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. - Киев: Наук. думка, 1986. – 222р.
10. Нестеренко Н.П. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов / Нестеренко Н.П., Червинко О.П., Сенченков И.К. // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – № 9. – С. 3-8.
11. Bolkisev A.M. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics / A.M. Bolkisev, V.L. Karlash, N.A. Shul'ga // International Applied Mechanics. - 1984. – 20, № 7. – P. 650-653.
7. KIRICHOK I.F., ZHUK Y.A. (2013) Vliyaniye granichnykh uslovij i temperatury vibrorazogreva na rezonansnyye osesimmetrichnyye kolebaniya vyazkoupругih cilindricheskih oboloček, so-dierzhashchih piezoactuatory i sensory // Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. – № 7(53). – P. 149-156.
8. KIRICHOK I.F., KARNAUKHOVA T.V. (2013) Osesimmetrychni rezonansni kolyvannya i vibrorozigriv vyazkopruzhoji cylindrychnoji obolonky z piezoelectrychnymy sensoramy pry vrakhuvanni temperaturnoji zalezhnosti vlastyvostej materialiv // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics and Mathematics. – № 3. – P. 150-153.
9. KARNAUKHOV V. G., KIRICHOK I.F. (1986) Svyazannyye zadachi teorii vyazkoupругih plastin i oboloček. – Kiev: Naukova Dumka.
10. NESTERENKO N.P., CHERVINKO O.P., SENCHENKOV I.K. (2002) Modelirovaniye ul'trazvukovogo razogreva strukturykh elementov polimernykh voloknistykh compozitov // Bulletin of National Technical University "KhPI". – № 9. – P. 3-8.
11. BOLKISEV A.M., KARLASH V.L., SHUL'GA N.A. (1984) Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // International Applied Mechanics. – 20, № 7. – P. 650-653.

Надійшла до редколегії 12.01.15