

УДК 539.3

Острик В. І.¹, д. ф.-м. н., проф.

Гладкий контакт штампа поліноміального профілю з пружною півплощиною

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е, e-mail: ostrik_v@rambler.ru

V. I. Ostryk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Smooth contact of stamp of polynomial profile with elastic half-plane

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e, e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Розв'язано задачу гладкого контакту штампа поліноміального профілю з пружною півплощиною. В доповнення до відомого результату І. Я. Штаєрмана, який розглядав цю задачу для парного показника профілю штампа, визначено розподіл контактної тиску у випадку непарного показника. Знайдено напруження та переміщення у кожній точці півплощини.

Ключові слова: гладкий контакт, пружна півплощина, штамп, контактний тиск, напруження.

The problem of smooth contact between a stamp with polynomial profile and an elastic half-plane is solved. This problem was considered earlier for pair profile indicator of a stamp and the contact pressure distribution was determined by I. Shtayerman. The contact pressure distribution was also obtained in case of the odd profile indicator in addition to the Shtayerman's result. Herewith the singular integral which appears during the solving of integral equation of the problem is calculated by using the recurrent ratio. The stresses and displacements are found at each point of the half-plane using the Kolosov – Muskhelishvili complex potential. The corresponding Cauchy type integral is expressed through elementary functions by means of using the recurrent formula and applying the technique of contour integration. For varied profile indicators of a stamp the coordinates are calculated for the point of the half-plane in which the maximum shear stresses obtain the largest value. The level lines of maximum shear stress in an elastic half-plane are plotted in case of a stamp with polynomial profile of the fourth power.

Key Words: smooth contact, elastic half-plane, stamp, contact pressure, stress.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Задачу про контактну взаємодію пружної півплощини зі штампом поліноміального профілю, показник якого є парним числом, розглянуто І. Я. Штаєрманом [1]. Без урахування сил тертя, які виникають в області контакту, в роботі [1] в результаті точного розв'язання інтегрального рівняння задачі визначено розподіл контактної тиску та встановлено зв'язок між розміром області контакту і силою, прикладеною до штампа.

Більш повний розв'язок задачі з визначенням напружень у кожній точці півплощини отримано Н. М. Беляєвим [2] у випадку параболічного штампа, коли показник його профілю дорівнює 2.

У даній статті для довільного цілого додатного показника профілю штампа знаходиться функція контактної тиску та визначаються переміщення й напруження всередині півплощини.

Постановка задачі. Контактний тиск

Розглянемо гладкий контакт (без урахування сил тертя в області контакту) абсолютно жорст-

кого штампа, контур якого задається рівнянням $y = -B|x|^n$ ($n = 1, 2, \dots$; $B > 0$, $B = \text{const}$), з пружною півплощиною $y \geq 0$. Під дією нормальної сили P штамп вдавлюється в пружну півплощину. В результаті деформування межі півплощини утворюється область контакту $-a \leq x \leq a$, $y = 0$ між поверхнями контактуючих тіл, розмір $2a$ якої заздалегідь невідомий. Крайові умови задачі такі:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=0} &= -B|x|^n \quad (|x| \leq a), \quad \sigma_y|_{y=0} = 0 \quad (|x| > a), \\ \tau_{xy}|_{y=0} &= 0 \quad (|x| < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

За другої та третьої умов (1) справедливе сингулярне інтегральне співвідношення [3]:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y=0} = 2(1-\nu) \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-x} ds, \quad (2)$$

де $p(x) = -\frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=0}$ – функція контактної тиску, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

На підставі (2) із першої крайової умови (1) отримуємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-x} ds = -\frac{nB \operatorname{sign} x}{2(1-\nu)} |x|^{n-1} \quad (-a < x < a). \quad (3)$$

Обмежений на кінцях інтервалу $-a < x < a$ розв'язок рівняння (3) знаходимо у вигляді [4]

$$p(x) = \frac{nB}{2(1-\nu)\pi} \sqrt{a^2 - x^2} I_n(x),$$

$$I_n(x) = \int_{-a}^a \frac{|s|^{n-1} \operatorname{sign} s}{\sqrt{a^2 - s^2} (s-x)} ds. \quad (4)$$

Для інтеграла із (4) справедливе рекурентне співвідношення

$$I_n(x) = x^2 I_{n-2}(x) + 2J_{n-2} \quad (n = 3, 4, \dots), \quad (5)$$

$$J_n = \int_0^a \frac{s^n}{\sqrt{a^2 - s^2}} ds = \frac{n-1}{n} a^2 J_{n-2} = a^n J'_n,$$

$$J'_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J'_{2m-1} = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

з початковими значеннями

$$I_1(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|}, \quad I_2(x) = \pi.$$

Застосовуючи рекурентну формулу (5) декілька разів, знаходимо

$$I_{2m}(x) = 2(J_{2m-2} + J_{2m-4}x^2 + \dots + J_2x^{n-4}) + I_2(x)x^{2(m-1)},$$

$$I_{2m-1}(x) = 2(J_{2m-3} + J_{2m-5}x^2 + \dots + J_1x^{2m-4}) + I_1(x)x^{2(m-1)}.$$

Отже, на підставі (4) отримуємо розподіл контактної тиску

$$p(x) = \frac{P}{2\pi a^2 G} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{x^{n-1}}{a^{n-2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{[n/2]_k}{[(n-1)/2]_k} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k-2} \right) \quad (-a \leq x \leq a), \quad (6)$$

де $[n/2]$ – ціла частина $n/2$, $[n]_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$. При цьому залежність півдовжини a області контакту від сили P :

$$a = \sqrt[n]{\frac{(1-\nu)P}{2nJ'_n B G}} \quad (7)$$

знайдено із умови рівноваги штамп

$$\int_{-a}^a p(x) dx = \frac{P}{2G}. \quad (8)$$

Формули (6), (7) у випадку парного n отримано І. Я. Штаєрманом [1].

При необмеженому зростанні n знаходимо граничний розподіл контактної тиску із (6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x) = \frac{P}{2\pi G} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a) \quad (9)$$

для штамп з прямолінійною основою [3].

На рис. 1 показано розподіли безрозмірного контактної тиску $\bar{p}(x) = (2Ga/P)p(x)$ на половині області контакту ($0 \leq x \leq a$) для різних значень показника n профілю штамп. Видно, що зі збільшенням показника n контактний тиск спадає всередині області контакту і зростає на краю цієї області. При цьому тиск $\bar{p}(x)$ наближається до свого розподілу для штамп з прямолінійною основою ($n = \infty$, пунктирна лінія), коли він стає необмеженим на краю ділянки контакту ($x/a = 1$).

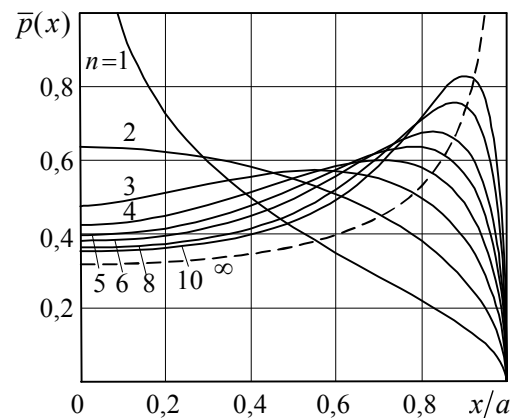


Рис. 1. Розподіли контактної тиску

Напруження та переміщення всередині пружної півплощини

Напруження в кожній точці (x, y) пружної півплощини знайдемо за формулами Колосова [5]:

$$\frac{1}{2G} (\sigma_x + \sigma_y) = -4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2 [\bar{\Phi}(z) + \Phi(z) + (z - \bar{z})\Phi'(z)], \quad (10)$$

де $\Phi(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$ є потенціалом Колосова – Мусхелішвілі й подається інтегралом типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-z} ds. \quad (11)$$

1. Випадок парного n . Залучаючи формулу (6), маємо

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{4\pi^2 a^2 G} \left(\frac{n}{n-1} U_0(z) + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)} \frac{U_1(z)}{a^2} + \dots + \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{U_{n/2-1}(z)}{a^{n-2}} \right),$$

$$U_k(z) = \int_{-a}^a \frac{s^{2k} \sqrt{a^2 - s^2}}{s - z} ds \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

Для інтеграла $U_k(z)$ із (12) справедлива рекурентна формула

$$U_k(z) = z^2 U_{k-1}(z) + 2zV_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$V_k = \int_0^a s^{2k} \sqrt{a^2 - s^2} ds = \frac{J_{2k+2}}{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Інтеграл $U_0(z)$ із (12), який є початковим значенням до формули (13), знаходимо методом контурного інтегрування [5]. В результаті отримуємо

$$U_0(z) = \pi \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right). \quad (14)$$

Послідовно застосовуючи рекурентну формулу (13), з урахуванням (14) знаходимо

$$U_k(z) = \pi z \left[\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a^{2k} + \frac{(2k-5)!!}{(2k-2)!!} a^{2k-2} z^2 + \dots + \frac{(-1)!!}{2!!} a^2 z^{2k-2} + z^{2k-1} \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (15)$$

Підставивши $U_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$) із (15) у першу із формул (12), після перетворень дістанемо

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{4\pi a^2 G} \sum_{k=1}^{n/2} \left(a_{nk} \sqrt{z^2 - a^2} + c_{nk} z \right) \left(\frac{z}{a} \right)^{2k-2},$$

$$a_{nk} = \frac{[n/2]_k}{[(n-1)/2]_k}, \quad c_{nk} = \sum_{m=k}^{n/2} \frac{(2m-2k-3)!!}{(2m-2k)!!} a_{nm}, \quad (16)$$

якщо вважати, що $(-3)!! = -1$, а також

$$\Phi'(z) = \frac{iP}{4\pi a^2 G} \sum_{k=1}^{n/2} \left(b_{nk} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - (2k-1)c_{nk} \right) \left(\frac{z}{a} \right)^{2k-2}$$

$$b_{nk} = \frac{[n/2]_k}{[(n-3)/2]_k} \quad (n=2, 4, \dots; k=1, 2, \dots, n/2). \quad (17)$$

На підставі (16), (17) за формулами (10) маємо:

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{2P}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{n/2} \left[a_{nk} \sqrt{r_1 r_2} \sin \left(2(k-1)\vartheta + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) + c_{nk} \rho \sin(2k-1)\vartheta \right] \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -\frac{2Py}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{n/2} \left[b_{nk} \frac{\rho}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i((2k-1)\vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2})} - (2k-1)c_{nk} e^{2i(k-1)\vartheta} \right] \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2},$$

$$z - a = r_1 e^{i\vartheta_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\vartheta_2}, \quad z = x + iy = \rho e^{i\vartheta}. \quad (18)$$

2. Випадок непарного n . Аналогічно випадку парного n отримаємо

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{2P}{\pi a} \left\{ \frac{n!!}{(n-1)!!} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J''_{n-k-1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{k-1}}{n-k} \sin(k-1)\vartheta + \left(\frac{\rho}{a} \right)^{n-1} \left(\ln \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \cos(n-1)\vartheta - \left(\arccos \frac{\xi}{\rho_0} - \vartheta \right) \sin(n-1)\vartheta \right) \right] + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2} \left[a_{nk} \sqrt{r_1 r_2} \sin \left(2(k-1)\vartheta + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) + \rho c'_{nk} \sin(2k-1)\vartheta \right] \right\},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi a} \left\{ \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{1}{\pi} \sin \vartheta \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n-k} J''_{n-k-1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{k-1} e^{i(k-2)\vartheta} - \frac{1}{2a} \sqrt{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) e^{-i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} b_{nk} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-1} e^{i(2k-1)\vartheta} + \frac{n!!}{(n-3)!!} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{n-2} e^{i(n-2)\vartheta} \left[\left(i \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \vartheta - \arccos \frac{\xi}{\rho_0} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{\rho}{a} \sin \vartheta + \frac{1}{2a} \sqrt{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) e^{-i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \right] + \left. \sin \vartheta \cdot \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (2k-1)c'_{nk} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-1} e^{2i(k-1)\vartheta} \right\},$$

$$c'_{nk} = \sum_{m=k}^{(n-1)/2} \frac{(2m-2k-3)!!}{(2m-2k)!!} a_{nm},$$

$$J''_{2k} = 2J'_{2k}, \quad J''_{2k-1} = 0, \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\xi = \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \eta = a + \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}. \quad (19)$$

Далі знаходимо головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ і головні дотичні напруження τ_1, τ_2, τ_3 [6]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \tau_1, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}|, \quad \tau_{2,3} = \frac{1}{2} |\sigma_{2,1} - \sigma_3| \quad (20)$$

та визначаємо максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (21)$$

Значення $\tau_* = \frac{\pi a}{2P} \max \tau_{\max} = \frac{\pi a}{2P} \max \tau_1$, розраховані при $\nu = 0,3$, та відносні координати $\pm \bar{x}_0 = \pm x_0/a$, $\bar{y}_0 = y_0/a$ точок, у яких досягаються ці значення, подано у табл. 1.

Таблиця 1

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| τ_* | 0,300 | 0,268 | 0,277 | 0,294 | 0,311 | 0,347 | 0,380 |
| \bar{x}_0 | 0 | 0,762 | 0,894 | 0,928 | 0,945 | 0,962 | 0,970 |
| \bar{y}_0 | 0,786 | 0,513 | 0,284 | 0,201 | 0,156 | 0,110 | 0,085 |

У випадку $n = 4$ отримуємо такі найбільші значення максимальних дотичних напружень залежно від коефіцієнта Пуассона:

$$\max \tau_{\max} = \begin{cases} \max \tau_2, & 0 \leq \nu < 0,2464, \\ \max \tau_1 = 0,2770 \frac{2P}{\pi a}, & 0,2464 \leq \nu \leq 0,5. \end{cases}$$

Коли $\nu = 0$, величина τ_{\max} досягає найбільшого значення $\max \tau_{\max} = \max \tau_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{2P}{\pi a} = 0,4714 \frac{2P}{\pi a}$ при $y = 0$ ($\sigma_x = \sigma_y = 2Gp(x)$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = Gp(x)$) у точках $x = \pm a/\sqrt{2}$. Найбільші значення τ_* = $\max \bar{\tau}_2$ величини $\bar{\tau}_2 = \frac{\pi a}{2P} \tau_2$ при $0 \leq \nu \leq 0,2464$ і відносні координати $\pm \bar{x}'_0 = \pm x'_0/a$, $\bar{y}'_0 = y'_0/a$ точок, у яких $\bar{\tau}_2$ досягає цих найбільших значень, подано у табл. 2. При $0,2464 \leq \nu \leq 0,5$ найбільше значення величини $\tau_{\max} = \tau_1$ досягається у точках $\pm x_0 = \pm 0,894a$, $y_0 = 0,284a$.

Таблиця 2

| ν | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,246 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| τ_* | 0,471 | 0,426 | 0,384 | 0,345 | 0,308 | 0,277 |
| \bar{x}'_0 | 0,707 | 0,710 | 0,718 | 0,730 | 0,747 | 0,765 |
| \bar{y}'_0 | 0 | 0,035 | 0,071 | 0,105 | 0,138 | 0,166 |

Лінії рівня максимальних дотичних напружень $\tau_{\max} = \tau_1$ (ізохори) для $n = 4$, $\nu = 0,3$ зображено на рис. 2.

У випадку $n = 4$ для визначення переміщень у кожній точці пружної півплощини використаємо ще одну формулу Колосова [5]:

Список використаних джерел

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – Москва: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
2. Беляев Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел / Н. М. Беляев // Инженерные сооружения и строительная механика. – Ленинград: Путь, апрель 1924. – С. 27-108.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва: Физматгиз, 1963. – 640 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.

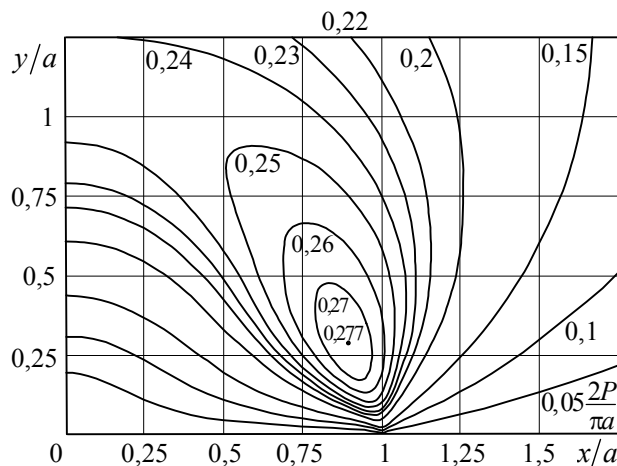


Рис. 2. Ізохори ($n = 4$, $\nu = 0,3$)

$$u_x - iu_y = -(z - \bar{z})\Phi(z) - \bar{\varphi}(z) - (3 - 4\nu)\overline{\varphi(z)} + C, \\ \varphi'(z) = \Phi(z), \quad C = \text{const}. \quad (22)$$

Зінтегрувавши функцію $\Phi(z)$ із (16) при $n = 4$ за умови $\bar{\varphi}(0) = 0$ (при $C = 0$) відсутності переміщень у вершині штампа знаходимо функцію

$$\varphi(z) = -\frac{iP}{12\pi G} \left[\frac{z}{a^2} \left(1 + 2\frac{z^2}{a^2} \right) \sqrt{z^2 - a^2} - 3 \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{-ia} - 2\frac{z^4}{a^4} \right], \quad (23)$$

яка згідно з формулою (22) повністю визначає компоненти u_x , u_y вектора переміщень у пружній півплощині.

References

1. SHTAJERMAN, I. (1949) *Kontaktная zadacha teorii uprugosti*. Moskva: Gostehizdat.
2. BELJAJEV, N. (1924) Mestnyje naprjazeniya pri szatii uprugih tel. *Inzenernyje sooruzeniya i stroitel'naja mehanika*. Leningrad: Put'. P. 27-108.
3. DZHONSON, K. (1989) *Mehanika kontaktnogo vzaimodeistvija*. Moskva: Mir.
4. GAHOV, F. (1963) *Krajevyje zadachi*. Moskva: Fizmatlit.
5. MUSHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryje osnovnyje zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
6. TIMOSHENKO, S. and Gud'jer, D. (1979) *Teorija uprugosti*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 07.04.15