УДК 532.595

І. Ю. Семенова[1], к. ф.-м. н.

# Динаміка гіперболічного резервуара з рідиною при наявності пружинного погашувача коливань.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Semenova I.Yu.[1], phD.

# Dynamics of partially filled hyperbolic tank with a spring vibration isolator.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

*Розглянуто задачу про нелінійні коливання рідини в рухомому резервуарі гіперболічної форми при наявності пружного закріплення. Визначено власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружинного погашувача коливань. Показано, що наявність пружинного погашувача суттєво впливає на характеристики механічної системи.*
*Ключові слова: рідина, гіперболічний резервуар, пружинне закріплення.*

*We consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of hyperbolic shape with the presence of elastic fixing. A mathematical model is constructed for a combined motion of a rigid hyperbolic reservoir filled by liquid with a free surface and fixed by spring to immovable point. Investigation is conducted on the basis of analytical methods with applying variational formulation of the problem. Nonlinear discrete model for this system is constructed on the basis of the Kantorovich method applied to kinematic restrictions of the problem and to variation formulation of the problem on the basis of the Hamilton-Ostrogradskiy variational principle with preliminary satisfying of kinematical boundary conditions and solvability conditions of the problem. The natural frequencies of mechanical system "hyperbolic reservoir and liquid with a free surface " with a spring vibration isolator were determined. It is shown that the presence of spring vibration isolator significantly affects the mechanical system characteristics.*
*Key Words: liquid, hyperbolic reservoir, elastic fixation.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

## Вступ

Вимушені коливання рухомих конструкцій з рідиною стають особливо відчутними в зоні резонансів, коли частоти збурюючих сил збігаються з частотами власних коливань системи. Вірогідність негативного впливу коливних процесів на поведінку систем, у складі яких є частково заповнені рідиною контейнери, значно зростає. Саме тому у механічній системі повинна бути передбачена можливість значного зменшення дії коливальних процесів. Коливальний рух бака з рідиною можна змінити приєднавши додатковий пристрій. В роботі розглядається задача динаміки рідини з вільною поверхнею в гіперболічному резервуарі при обмеженні руху пружинним закріпленням. Резервуар вважається абсолютно твердим тілом, який може рухатись поступально у горизонтальній площині. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух – безвихровим. Рух системи з початкового стану спокою збуджується гармонічною силою.

## Математична модель механічної системи при наявності пружинного погашувача коливань

В розглянутій задачі досліджуються динамічні особливості сумісного руху механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею". Метод дослідження задачі базується на сукупному використанні аналітичних методів нелінійної механіки, варіаційних методів математичної фізики до механічної задачі у варіаційному формулюванні. Математична постановка є сукупністю кінематичних та динамічної умов.

До кінематичних умов відносяться:
умова нерозривності:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \tau \tag{1}$$

умова неперетікання на межі рідина - тверда стінка резервуару та на вільній поверхні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \text{на}\ \Sigma; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial t}}{\left\|\vec{\nabla}\eta\right\|} \ \text{на} \quad S. \tag{2}$$

Динамічна гранична умова на вільній поверхні випливає з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природна.

Рівняння (1)-(2) по відношенню до варіаційного принципу

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \text{де}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_{res}(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \\ -\frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - (M_{res} + M_{liq})\varepsilon_z g \tag{3}$$

($\rho$ – густина рідини, $M_{res}$ – маса резервуара, $M_{liq}$ – маса рідини, $g$ – прискорення вільного падіння) є сукупністю кінематичних в'язей, які необхідно виключити до розв'язку варіаційної задачі. Для повного формулювання задачі слід додати динамічну граничну умову на вільній поверхні, яка випливає з варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + U = 0 \qquad \text{на} \quad S. \tag{4}$$

**Побудова скінченновимірної моделі механічної системи**

Для розв'язку варіаційної задачі використовується прямий метод математичної фізики, зокрема, метод Канторовича. При цьому збурення вільної поверхні розкладається в ряд по функціях, отриманих з розв'язку відповідної лінійної задачі, яке задовольняє умові повноти на $S_0$, а розв'язок для потенціалу швидкостей будується з такими додатковими вимогами, щоб ці функції задовольняли умові неперетікання на $\Delta\Sigma$. Для побудови скінченновимірної моделі необхідно від континуальної системи перейти до дискретної (для невільної системи), виключаючи кінематичні граничні умови на вільній поверхні, отримуємо функцію Лагранжа, що відповідає вільній системі, і кількість параметрів системи дорівнює кількості ступенів вільності системи.

$$L(\xi,\varphi) \to L(a_i, b_i) \to L(a_i, \dot{a}_i). \tag{5}$$

За допомогою існуючих залежностей параметрів розкладу потенціалу швидкостей $b_i$ від $a_i$ та $\dot{a}_i$ отримуємо дискретну функцію Лагранжа вільної механічної системи з незалежними параметрами амплітудами форм коливань та координатами резервуару $\vec{\varepsilon}$.

Таким чином, на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [1], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини, отримано дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів $a_i$ – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини $\xi$ за формами коливань вільної поверхні $\psi_i$ та $\varepsilon_i$ – компонент вектора переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини:

$$\sum_i \ddot{a}_i\left\{V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3\right\} + \\ + \ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{U}_r^1 + \sum_i a_i \vec{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}_{rijk}^4\right\} = \\ = \sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_j a_k V_{ijkr}^{3*} + \\ + \dot{\vec{\varepsilon}}\left\{\sum_i \dot{a}_i \vec{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j}\dot{a}_i a_j \vec{U}_{irj}^{3*} + \sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k \vec{U}_{ijkr}^{4*}\right\} - \\ - g\left\{\sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2}\sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2\sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijkr}^4\right\} \tag{6}$$

$$\frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})}\left\{\sum_i \ddot{a}_i\left[\vec{U}_i^{\,1} + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^{\,2} + \sum_j a_j a_k \vec{U}_{ijk}^{\,3}\right]\right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\ \frac{F}{(M_{res} + M_{liq})} - g\vec{z}_0 - \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})}\sum_j \dot{a}_j\dot{a}_j\left\{\vec{U}_{ij}^{\,2} + 2\sum_k a_k \vec{U}_{ijk}^{\,3}\right\}$$

($\rho$ – густина рідини, $g$ – прискорення гравітаційних сил, $M_{res}$ та $M_{liq}$ – маси рідини та резервуару відповідно), $c$ – коефіцієнт жорсткості пружинного погашувача.

Система (6) містить $N+3$ рівнянь ($N$ – кількість форм коливань рідини, що описують динаміку амплітуд коливань вільної поверхні рідини та динаміку резервуара, який рухається поступально. Сумісний рух резервуара з рідиною повністю характеризується незалежними узагальненими координатами $a_i$ та $\vec{\varepsilon}$.

**Визначення власних частот механічної системи при наявності пружинного погашувача коливань**

Визначимо власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружного закріплення. Для визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [*2*] запишемо рівняння (6) тільки для амплітуди $a_1$ першої антисиметричної форми $\psi_1$ з можливістю горизонтального руху резервуару по координаті $\varepsilon_y$ у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 V_{11}^1 + U_1^1 \ddot{\varepsilon}_y + g a_1 W_{11}^2 = 0 \\ \dfrac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} U_1^1 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \dfrac{c}{M_{res} + M_{liq}} \varepsilon_y = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Щоб спростити ці рівняння введемо позначення:

$$\lambda_1 = \frac{U_1^1}{V_{11}^1},\ \lambda_2 = \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} U_1^1 \tag{8}$$

Тоді рівняння (7) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0 \\ \lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_2^2 \varepsilon_y = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Простим лінійним перетворенням отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + \dfrac{\omega_1^2}{1-\lambda_1\lambda_2} a_1 - \dfrac{\omega_2^2 \lambda_1}{1-\lambda_1\lambda_2} \varepsilon_y = 0 \\ \ddot{\varepsilon}_y - \dfrac{\omega_1^2}{1-\lambda_1\lambda_2} \lambda_2 a_1 + \dfrac{\omega_2^2}{1-\lambda_1\lambda_2} \varepsilon_y = 0 \end{cases} \tag{10}$$

де $n_1 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}}$ та $n_2 = \dfrac{\omega_2}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}}$ – парціальні частоти системи резервуар з рідиною та резервуар з пружинним погашувачем відповідно.

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + n_1^2 a_1 - \lambda_1 n_2^2 \varepsilon_y = 0 \\ \ddot{\varepsilon}_y - n_1^2 \lambda_2 a_1 + n_2^2 \varepsilon_y = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Складемо частотне рівняння:

$$Det\left[\begin{bmatrix} n_1^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - \omega^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник,

$$(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - \lambda_1 \lambda_2 n_1^2 n_2^2 = 0,$$

після елементарних перетворень, запишемо:

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2 n_2^2 (1 - \lambda_1\lambda_2) = 0.$$

В результаті маємо дві власні частоти механічної системи при наявності погашувача:

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2 \lambda_1 \lambda_2}\right).$$

Вийшло "роздвоєння" власної частоти системи без погашувача.

Зміна величин власних частот для гіперболічного резервуару приведена на рисунку 1. Розглянемо резервуар, що має форму гіперболоїда обертання $r = \dfrac{a}{c}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$ з параметрами *a=1, c=2.4, H=1* із вертикальною віссю OZ. Крок чисельного інтегрування вибирався Δt=0,01 с. При розв'язку задачі на власні значення приймався розклад по *N=22* гармонічним поліномам. Співвідношення мас резервуару та рідини $\dfrac{M_{res}}{M_{liq}} = 0.1$. Для такого співвідношення мас резонансна частота механічної системи без погашувача дорівнює $\omega^* = 1.58\omega_1$.

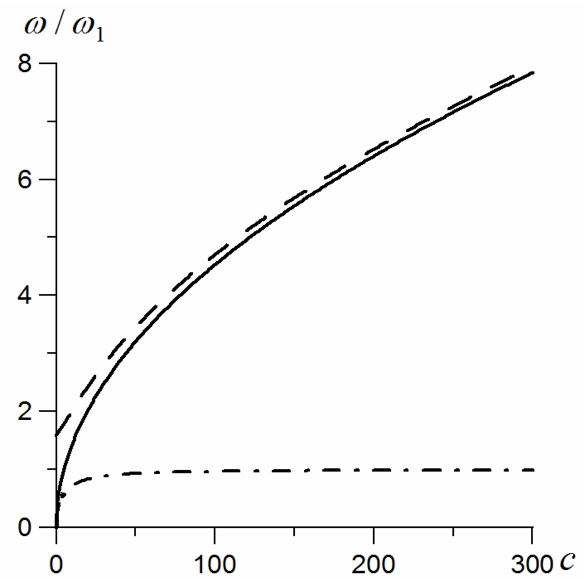


Рис. 1. Залежність власних частот (пунктирна та штрих-пунктирна) механічної системи та парціальної частоти резервуару з пружинним погашувачем (суцільна) від жорсткості пружини.

Графічні залежності власних та парціальних частот для різних значень жорсткості пружини у відношенні до першої частоти коливань рідини $\omega_1 = 3.50$ Гц приведені на рисунку 1. Для системи з такими характеристиками парціальна частота сумісного руху резервуара з рідиною $n_1 = 1.58\omega_1$ завжди є постійною величиною, а парціальна частота пружинного погашувача зростає при збільшенні жорсткості пружини (Рис. 1, суцільна крива) та має нульове значення при відсутності погашувача. При збільшенні жорсткості пружини друга власна частота системи (Рис. 1, пунктирна крива) наближається до значень парціальної частоти пружинного погашувача.

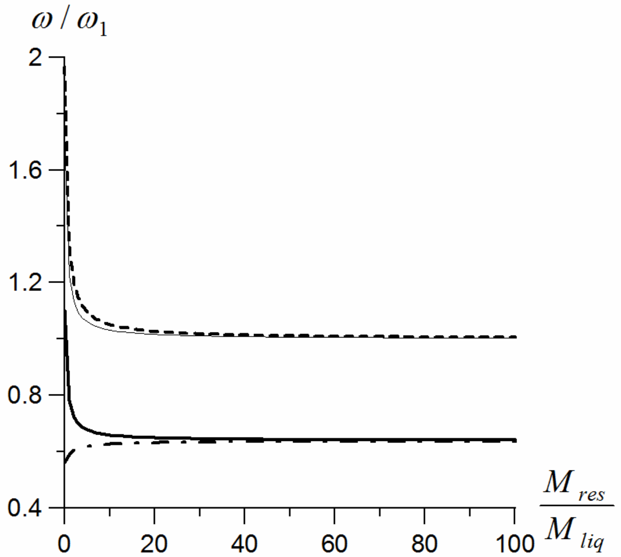


Рис. 2. Залежність власних частот (пунктирна та штрих-пунктирна) механічної системи та парціальної частоти резервуару з рідиною (суцільна) від співвідношення мас резервуару та рідини.

Як видно з графіку, перша власна частота асимптотично прямує до першої власної частоти коливань вільної поверхні $\omega_1$ (Рис. 1, штрих - пунктирна крива), а друга власна частота нескінченно зростає. Із зростанням жорсткості пружини, що відповідає збільшенню механічних в'язей, збільшується розбіжність між власними частотами системи "гіперболічний резервуар з рідиною - пружинне закріплення".

Графічні залежності власних та парціальних частот для коефіцієнту жорсткості пружини $c = 5$ при збільшенні маси резервуара у відношенні до першої частоти коливань рідини $\omega_1 = 3.50$ Гц приведені на рисунку 2. Для такої системи парціальна частота пружинного погашувача (Рис. 2, суцільна жирна крива) при збільшенні маси резервуара наближається до постійного значенняі залежить від жорсткості пружини, а парціальна частота резервуару з рідиною (суцільна тонка крива) зменшується при збільшенні маси резервуара та співпадає з власною частотою при відсутності погашувача. Як видно з графіка, друга власна частота (Рис. 2, пунктирна крива) асимптотично прямує до парціальної частоти резервуара з рідиною (Рис. 2, суцільна тонка крива) і при збільшенні маси бака буде наближатися до першої власної частоти коливань вільної поверхні $\omega_1$, а перша власна частота (Рис. 2, штрих - пунктирна крива) наближається до графіку парціальної частоти пружинного погашувача. Із зростанням маси резервуара розбіжність між власними частотами системи "гіперболічний резервуар з рідиною - пружинне закріплення" стає постійною.

## Висновки

Побудовано математичну модель сумісного руху гіперболічного резервуара з рідиною при наявності пружинного погашувача коливань. Визначено власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружного закріплення. Показано залежність власних частот системи від жорсткості пружини та співвідношення мас резервуара та рідини.

## Список використаних джерел

1. *Лимарченко О.С.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью /*Лимарченко О.С., Ясинский В.В* – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338с.
2. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем / *Болотин В.В.* – Москва, 1956. – 600 *с*.

## References

1. LIMARCHENKO, O., YASINSKI, V. (1997) *Nonlinear dynamics of structures with liquid.* - Kiev: Nat.Techn. Univ. Ukraine "KPI".
2. *BOLOTIN, V. (*1956*) Dynamic stability of elastic systems.* – M:GITTL

Надійшла до редколегії 26.11.14