УДК 517.9

Асроров Ф. А.[1], к.ф.-м.н., н.с.

Інтегральні множини розривних динамічних систем

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: farhod@univ.kiev.ua

F. A. Asrorov[1], C.Sci (Phys-Math.).

Integral sets of discontinuous dynamical systems

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: farhod@univ.kiev.ua

Тематика роботи тісно пов'язана із застосуванням теорії багаточастотних коливань в системах звичайних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями. Вивчається питання існування і властивостей інтегральних множин для класів лінійних та слабо нелінійних автономних імпульсно збурених систем. Крім того, досліджується якісна поведінка розв'язків в околі отриманої інтегральної множини. Для цього використовується ітераційний процес, який полягає в тому, що множина відшукується, як границя послідовності множин, кожна з яких є інтегральною множиною спеціально побудованих системи рівнянь. Однією з найважливіших достатніх умов для існування інтегральної множини є функція Гріна-Самойленка. Раніше це питання було вивчено для систем з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу. Новизна даної роботи полягає в тому, що тут розглядається розривна динамічна система, тобто коли фазова траєкторія зазнає імпульсного впливу при проходженні через фіксовану гіперповерхню фазового простору.

Ключові слова: функція Гріна-Самойленка, інтегральна множина, імпульсна дія.

Subject of the work is closely connected with applying the theory of multifrequency oscillations to the systems of ordinary differential equations with impulsive perturbations. We study the problem of existence and properties of integral sets for classes of linear and weakly non-linear autonomous systems with impulsive perturbations. Also we investigate the qualitative behavior of solution in a neighbouhood of obtained integral set. For this porpose we use iteration process that is we obtain integral set as a limit of sequence of integral sets for specially constructed systems of differential equations. One of the most important sufficient conditions for existence of integral set is Green-Samoilenko function. Previously, the issue has been studied for systems with impulsive perturbations at fixed moments of time. The novelty of this work lies in the fact that here we consider discontinuous dynamical system, that is a situation where the phase trajectory has impulsive perturbation when it passes through a fixed subset of the phase space.

Keywords: Green-Samoilenko function, integral set, impulsive action.

Статтю представив д.ф.-м.н., академік НАН України Перестюк М.О.

Досліджуємо питання існування інтегральних множин одного класу лінійних і слабко нелінійних систем диференціальних рівнянь, що піддаються імпульсному впливу в момент попадання зображаючої точки в задані множини фазового простору.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x), \ \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + I(\varphi, x), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ - вектор з додатніми компонентами. Щодо множини Γ припускаємо, що вона є підмножиною тора $\Im_m$ і являє собою многовиди розмірності $m-1$, які можна визначити рівнянням $<k,\varphi>=0\,(mod\,2\pi)$, при цьому $k=(k_1,\ldots,k_m)-$ цілочисельний вектор, $<k,\omega>\neq 0$. Остання умова забезпечує приналежність кутової фазової змінної $\varphi(t)$ множині Γ в момент дії імпульсу як при $t-0$, так і при $t+0$. $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ - неперервні, 2π-періодичні по кожній компоненті $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}1$ квадратні матриці, функції $f(\varphi,x)$ та $I(\varphi,x)$ визначено для всіх $\varphi\in\Im_m,\ x\in R^n$, неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду по φ), 2π-періодичні по φ і задовольняють умові Ліпщиця по x рівномірно відносно $\varphi\in\Im_m$:

$$\left\|f(\varphi,x')-f(\varphi,x'')\right\|+\left\|I(\varphi,x')-I(\varphi,x'')\right\|\le \le N\left\|x'-x''\right\| \quad (2)$$

для всіх $x',x''\in R^n$.

Допоміжна лема.

Лемма. Для будь-якого розв'язку $t=t_i(\varphi)$ рівняння (3) справедлива рівність

$$t_i(\varphi-\omega t)-t_i(\varphi)=t \quad (3)$$

для всіх $\varphi\in\Im_m, t\in R^n$.

Будь яка неперервна траєкторія $\varphi=\omega t+\varphi_0$ перетинає многовид Γ через однакові часові інтервали

$$\frac{2\pi}{<k,\omega>}.$$

Позначимо через $t_i(\varphi)$- моменти попадання точки, що рухається по $\varphi+\omega t$ на Γ. Тоді для будь-якого $i\in Z$ справедлива рівність

$$t_{i+1}(\varphi)-t_i(\varphi)=\frac{2\pi}{<k,\omega>}.$$

Перш ніж сформулювати основний результат, що відноситься до системи (1), розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\frac{dx}{dt}=P(\varphi)x+f(\varphi),\ \varphi\notin\Im,$$
$$\Delta x\big|_{\varphi\in\Gamma}=B(\varphi)x+I(\varphi), \quad (4)$$

в якій $P(\varphi),B(\varphi),\omega,\Gamma-$ ті ж, що і в систем (1); $f(\varphi)$ і $I(\varphi)-$ неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду по φ), 2π-періодичні по φ функції.

Нехай $G(t,\tau,\varphi), G(\tau,\tau,\varphi)=E-$ фундаментальна матриця системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=P(\varphi_t(\varphi))x,\quad t\neq t_i(\varphi),$$
$$\Delta x\big|_{t=t_i(\varphi)}=B(\varphi_{t_i}(\varphi)). \quad (5)$$

Безпосередньо переконуємося, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє рівностям

$$G(t,\tau,\varphi+2\pi)=G(t,\tau,\varphi),$$
$$G(t,t+\tau,\varphi-\omega t)=G(0,\tau,\varphi), \quad (6)$$

для всіх $t,\tau\in R$ і $\varphi\in\Im_m$.

Нехай матриця $G(t,\tau,\varphi)$ і функції $t_i(\varphi)$ такі, що функції

$$x_t(\varphi)=\int_{-\infty}^{t}G(t,\tau,\varphi)f(\varphi+\omega t)d\tau+ +\sum_{t_i(\varphi)<t}G(t,t_i(\varphi),\varphi)\,I(\varphi+\omega t_i(\varphi)) \quad (7)$$

являють собою сім'ю обмежених на всій осі розв'язків рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=P(\varphi+\omega\tau)x+f(\varphi+\omega\tau),\quad t\neq t_i(\varphi),$$
$$\Delta x\big|_{t=t_i(\varphi)}=B(\varphi+\omega t_i(\varphi))+I(\varphi+\omega t_i(\varphi)).$$

Покладемо $x_t(\varphi)=u(\varphi+\omega t)$ і замінимо в (7) φ на $\varphi-\omega t$, отримаємо

$$u(\varphi)=\int_{-\infty}^{t}G(t,\tau,\varphi-\omega t)f(\varphi+\omega(\tau-t))d\tau+ +\sum_{t_i(\varphi-\omega t)<t}G(t,t_i(\varphi-\omega t),\varphi-\omega t)\times \times I(\varphi+\omega t_i(\varphi-\omega t)-t))$$

Звідси, враховуючи, що

$$t_i(\varphi-\omega t)-t_i(\varphi)=t,\qquad \varphi_{t+s}(\varphi)=\varphi_t(\varphi_s(\varphi)),$$
$$G(t,\tau,\varphi+2\pi)=G(t,\tau,\varphi),\quad G(t,\tau,\varphi-\omega t)=G(0,\tau,\varphi),$$

маємо

$$u(\varphi)=\int_{-\infty}^{0}G(0,\tau,\varphi)f(\varphi+\omega\tau)d\tau+ +\sum_{t_i(\varphi)<0}G(0,t_i(\varphi),\varphi)\,I(\varphi+\omega t_i(\varphi)). \quad (8)$$

У припущенні, що інтеграл і сума в (7) рівномірно збіжні, одержуємо, що функція $u(\varphi)$ визначає інтегральну множину системи рівнянь (4).

Відзначимо, що для збіжності інтеграла і суми з (8) достатньо, щоб функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняла нерівність

$$\left\|G(t,\tau,\varphi)\right\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)},\quad t\ge\tau \quad (10)$$

для всіх $t, \tau \in R,\ \varphi \in \Im_m$ при деяких додатніх K і γ, а розв'язки рівняння (3) $t_i(\varphi)$ були такими, що

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta > 0 \qquad (11)$$

для всіх $i \in Z, \varphi \in \Im_m$ і деякого $\theta > 0$.

При зазначених умовах з (8) маємо

$$\|x_i(\varphi)\| \leq \frac{K}{\gamma} \max_{\varphi \in \Im_m} \|f(\varphi)\| + \frac{K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \max_{\varphi \in \Im_m} \|I(\varphi)\| \qquad (12)$$

для всіх $t \in R$ і $\varphi \in \Im_m$.

Асимптотичну стійкість цієї інтегральної множини $u(\varphi)$ забезпечує нерівність (10).

Таким чином, доведено наступна теорема.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (5) функції $f(\varphi)$ і $I(\varphi)$ $2\pi-$періодичні, неперервні на $\Im_m$ (кусково-неперервні з розривами першого роду при $\varphi \in \Gamma$); $P(\varphi)$ і $B(\varphi)-$ неперервні на $\Im_m$ $2\pi-$періодичні матриці.

Якщо матриця $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінці (10), а функції $t_i(\varphi)$- нерівності (11), то система рівнянь (5) має асимптотично стійку інтегральну множину

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

де $u(\varphi)$- кусково-неперервна з розривами першого роду на множині Γ функція. При цьому можна вказати таку постійну C, незалежну від функцій $f(\varphi)$ і $I(\varphi)$, що

$$\|u(\varphi)\| \leq C \max\left\{ \max_{\varphi \in \Im_m} \|f(\varphi)\|, \max_{\varphi \in \Im_m} \|I(\varphi)\| \right\}.$$

Відзначимо деякі окремі випадки систем (6), для яких нормована фундаментальна матриця $G(t,\tau,\varphi)$ допускає оцінку (10). Так, наприклад, якщо $B(\varphi) \equiv 0$, а траєкторії $\varphi + \omega\tau$ всюди щільно лежать на торі $\Im_m$, то нерівність (10) виконується, якщо

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Lambda(\varphi) d\varphi_1 .. d\varphi_m < 0,$$

$\Lambda(\varphi)-$найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$P^*(\varphi) = \frac{1}{2}\big(P(\varphi) + P'(\varphi)\big),$$

де $P'(\varphi)$ -транспонована по відношенню до $P(\varphi)$ матриця.

Нерівність (10) виконується також у разі, якщо P і $B-$ постійні матриці, комутуючі між собою, причому $E + B$ невироджені і дійсні частини всіх власних чисел матриці

$$\Lambda = P + p\,ln(E + B)$$

від'ємні.

Інтегральна множина $x = u(\varphi)$ системи рівнянь (1), будемо шукати як границю послідовності інтегральної множини $u_m(\varphi)$:

$$u(\varphi) = \lim_{m \to \infty} u_m(\varphi), \qquad (13)$$

кожне з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, u_{m-1}(\varphi)),\ \varphi \notin \Im, \qquad (14)$$

$$\Delta x\big|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + I(\varphi, u_{m-1}(\varphi)),$$

Згідно з теоремою 1, при кожному $m = 1,2,\dots$ функція

$$\begin{aligned} u_m(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} & G(0,\tau,\varphi) \times \\ & \times f\big(\varphi + \omega\,\tau, u_{m-1}(\varphi + \omega\,\tau)\big) d\tau + \\ & + \sum_{t_i(\varphi)<0} G(0, t_i(\varphi), \varphi) \times \\ & \times I\big(\varphi + \omega\, t_i(\varphi), u_{m-1}(\varphi + \omega\, t_i(\varphi))\big) \end{aligned} \qquad (15)$$

визначає інтегральну множину системи (14). Рівномірну щодо $\varphi \in \Im_m$ збіжність послідовності $u_m(\varphi)$ до граничної функції $u(\varphi)$ забезпечує нерівність (2) за умови малості константи Ліпшиця N.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Нехай система рівнянь (1) така, що виконуються нерівності (2) і (10). Тоді при досить малій постійній Ліпшиця N система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

де $u(\varphi)-$ кусково-неперервна з розривами першого роду на множині Γ функція така, що

$$\Delta u\big|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)u(\varphi) + I(\varphi, u(\varphi)).$$

Список використаних джерел

1. *Асроров Ф.А.* Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією / Асроров Ф.А., Фекета П.В. // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2010. – Вип.20. С. 4-12.
2. *Асроров Ф.А.* Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем / Асроров Ф.А., Перестюк Н.А. // Укр. мат. журн. 1994. т. 46, №8. С. 1067-1071.
3. *Митропольский Ю.А.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. // – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
4. *Perestyuk N.A.* Differential equations with impulsive effects: multivalued right-hand sides with discontinuous / *Perestyuk N.A.,* Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. // De Gruyter 2011. – 307 p.
5. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / Самойленко А.М. // – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
6. *Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
7. *Фекета П.В.* Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями / Фекета П.В., Асроров Ф.А. // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип. 23. С. 125-132.
8. *Samoilenko A.M.* Impulsive differential equations / Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. // Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific 1995. – 462 p.

References

1. ASROROV F.A., FEKETA P.V. (2010) *Bounded solutions of linear inhomogeneous systems with impulsive action // Bull. Uzhhorod University. Math. and Informatics Series, 2010. – vol.20. p. 4-12.*
2. ASROROV F.A., PERESTYUK N.A. (1994) *Green-Samoilenko function and existence of integral sets of linear extensions of non-autonomous systems* // Ukr. Mat. Zhurn. 1994. vol. 46, No. 8. p. 1067-1071.
3. MITROPOLSKY YU.A., SAMOILENKO A.M., KULYK V.L. (1990) *Investigation of dichotomy of linear systems of differential equations via Lyapunov functions*. – Kyiv: Nauk. Dumka.
4. PERESTYUK N.A., PLOTNIKOV N.A., SAMOILENKO A.M., SKRIPNIK N.V. (2011) *Differential equations with impulsive effects: multivalued right-hand sides with discontinuous. De Gruyter.*
5. SAMOILENKO A.M. (1987) *Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant tori. – M: Nauka..*
6. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1987) *Differential equations with impulsive actions. – K.: Vyshcha shkola.*
7. FEKETA P.V., ASROROV F.A. (2012) *Integral sets of extensions of non-autonomous systems on torus with impulsive perturbations// Bull. Uzhhorod University. Math. and Informatics Series, 2012. – vol.23. p. 125-132.*
8. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1995) Impulsive differential equations. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific.

Надійшла до редколегії 11.06.2015