

УДК 532.5

О. Л. Голиченко¹, аспірант
В. С. Малюга², к. ф.-м. н., с. н. с.

Особливості перемішування рідини в скінченному циліндрі.

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушко-
ва 4е, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

² Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4,
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

O. L. Golichenko¹, graduate student,
V. S. Malyuga², PhD (Phys.-Math.), sen. res.

Mixing characteristics in a finite cylindrical container.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

² Institute of hydromechanics, 03057, Kyiv,
Zhelyabova str., 8/4,
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

Розглядаються особливості перемішування рідини в тривимірних періодичних течіях. Показано, що природа перемішування рідини у тривимірних течіях має значно складніший характер порівняно з перемішуванням у двовимірних течіях. Проведено класифікацію періодичних точок. Показано, що якісне перемішування рідини можливе лише в течіях, що мають виключно ізольовані періодичні точки. Перемішування в течіях, що мають періодичні лінії, завжди має двовимірний характер, а отже отримання якісної мікстури в таких течіях неможливе. Перемішування в течіях з періодичними лініями і ізольованими періодичними точками ілюструються на прикладі трьох періодичних течій Стокса в скінченному циліндрі. Наведено перетин Пуанкаре для цих течій. Для моделювання перемішування пасивної домішки використовувалась чисельна техніка, що базується на трекінгу матеріальних поверхонь.

Ключові слова: течії Стокса, ламінарне перемішування, хаотична адвекція, періодичні лінії

The paper addresses the kinematic features of three-dimensional mixing in periodic flows. It is shown that the fluid mixing in three-dimensional flows has considerably more difficult characteristics as compared to the mixing in two-dimensional flows. A classification of periodic points, providing important information about the mixing properties of a flow, is presented. It is shown that qualitative three-dimensional mixing takes place only in flows that contain only isolated periodic points. Flows with periodic lines possess only quasi-two-dimensional mechanisms of chaotic advection and therefore the high quality of mixture cannot be reached in such the flows. Three examples of Stokes flow in a finite cylindrical cavity with discontinuous periodic motion of its end walls are used to illustrate the apparent differences between the mixing in flows with periodic lines and in flows with only isolated periodic points. The dynamics of the Poincare map is analysed for all the identified types of periodic points. It is shown that the stable and unstable manifolds of points on the periodic lines create two surfaces in the flow which intersect infinitely often. The Poincare map is presented for the flows under consideration. A numerical technique based on tracking of a material surface is presented to study the mixing process.

Key Words: Stokes flow; finite cylinder; laminar mixing; periodic lines.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

На відміну від двовимірних течій нестисливої рідини, для яких рівняння руху індивідуальної пасивної частинки рідини може завжди бути записане у гамільтоновій формі, а отже при описанні такої системи можуть бути застосовані добре відомі методи гамільтонової механіки, дослідження перемішування рідини у

тривимірних течіях все ще представляє значні труднощі. Наприклад, важливою інформацією, що говорить про розташування областей регулярного руху рідини, які є бар'єрами для процесу хаотичного перемішування, є інформація про розташування і класифікацію періодичних точок. У двовимірних течіях періодичні точки розділяють на три класи: еліптичні, гіперболічні і параболічні. Відомо, що острови регулярного

руху виникають лише довкола еліптичних точок. У тривимірних течіях класифікація періодичних точок є значно складнішою. Більше того, у тривимірних течіях періодичні точки можуть бути не лише ізольованими, а й об'єднуватись у періодичні лінії. В даній роботі проведено повну класифікацію періодичних точок у тривимірних течіях, виділено дев'ять типів періодичних точок і показано поведінку відображення Пуанкаре поблизу кожного типу точок. Показано, що острови регулярного руху можуть виникати лише довкола періодичних точок, об'єднаних в періодичні лінії. В течіях, де є лише ізольовані періодичні точки, островів регулярного руху бути не може, а отже процес хаотичного перемішування відбувається по всій області.

В даній статті ми розглядаємо процес перемішування в'язкої нестисливої рідини в скінченному циліндричному контейнері, якщо рух рідини викликано періодичним рухом торцевих стінок циліндра. На цьому прикладі ми наглядно демонструємо особливості перемішування рідини у тривимірних течіях, що суттєво відрізняються від детально вивчених особливостей перемішування у двовимірних течіях. З цією метою ми розробили техніку визначення періодичних структур, провели детальну класифікацію періодичних точок і визначили їх многовиди, побудували перетин Пуанкаре. Розрахунки проводились для трьох типових протоколів руху торцевих стінок циліндра. Дві течії мали періодичні лінії, а третя мала лише ізольовані періодичні точки. Наведені результати дуже наглядно демонструють, що лише в третій течії перемішування буде ефективним.

Класифікація періодичних точок та структура многовидів

Згідно з теоремою Брауера про нерухому точку будь-яке неперервне нестисливе відображення замкнутої області в себе в скінченновимірному евклідовому просторі має нерухому точку. Очевидно, що така нерухома точка відображення буде періодичною точкою течії. Розташування і тип періодичних точок в течії визначають характер, інтенсивність і якість перемішування рідини в течії.

Нехай в початковий момент часу $t=0$ пасивна матеріальна точка мала ейлерові координати \mathbf{x}_0 . А в деякий момент часу t ця матеріальна точка вже має ейлерові координати \mathbf{x} . Такий процес перенесення пасивної

матеріальної точки можна представити оператором $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{x}_0)$. Тоді точка \mathbf{P} є періодичною точкою потоку з періодом T , якщо $\mathbf{P} = \Phi_T(\mathbf{P})$. В термінах відображення Пуанкаре періодична точка з періодом T визначається як нерухома точка. Дійсно, якщо відображення Пуанкаре визначено як $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$, де $f(\mathbf{x}) \equiv \Phi_T(\mathbf{x})$. То для періодичної точки з періодом T маємо $\mathbf{P} = f(\mathbf{P})$. Аналогічно, періодичні точки течії з періодом nT визначаються як нерухомі точки відображення Пуанкаре порядку n , тобто $\mathbf{P} = f^n(\mathbf{P})$. Класифікація періодичних точок подібна до класифікації особливих точок поля течії [1, 2]. У двовимірних течіях періодична точка може бути класифікована як еліптична, гіперболічна або параболічна в залежності від структури поля в околі періодичної точки [3]. У тривимірних течіях класифікація періодичних точок значно складніша. Опишемо класифікацію періодичних точок у тривимірних течіях більш детально. Нехай у початковий момент часу деяка матеріальна частинка близька до \mathbf{P} знаходилась у позиції $\mathbf{P} + d\mathbf{x}_0$. Через період ця матеріальна частинка переходить у позицію $\mathbf{P} + d\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{P} + d\mathbf{x}_0)$. Після лінеаризації отримуємо $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{x}_0$, де $\mathbf{F} = \partial f(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} |_{\mathbf{x}=\mathbf{P}}$ – матриця Якобі в точці \mathbf{P} . Властивості стійкості відображення f визначаються властивостями матриці \mathbf{F} , які в свою чергу визначаються значеннями власних чисел матриці. Власні числа матриці є коренями рівняння $|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}| = 0$, яке у тривимірному випадку приймає наступну форму:

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0, \quad (1)$$

де три інваріанти матриці визначені наступним чином $J_1 = \text{tr}(\mathbf{F})$, $2J_2 = \text{tr}^2(\mathbf{F}) - \text{tr}(\mathbf{F}^2)$, $J_3 = \det(\mathbf{F})$. Всі елементи матриці \mathbf{F} обраховувались чисельно. При цьому умова нестисливості рідини $J_3 = 1$ використовувалась для контролю точності чисельних розрахунків. Чисельна похибка $|J_3 - 1|$ не перевищувала 10^{-3} поблизу поверхні циліндра і набувала значно менших значень всередині розрахункової області.

Очевидно, що рівняння (1) завжди має один дійсний додатний корінь. Нехай це буде λ_1 . З урахуванням цього факту рівняння (1) може бути представлено у вигляді

$$(\lambda - \lambda_1) \left(\lambda^2 + (\lambda_1 - J_1)\lambda + \frac{1}{\lambda_1} \right) = 0. \quad (2)$$

Два інших власних числа набувають значень:

$$\lambda_{2,3} = \frac{(J_1 - \lambda_1)}{2} \pm \sqrt{D}, \quad (3)$$

де дискримінант

$$D = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{4} - \frac{1}{\lambda_1}. \quad (4)$$

Власні числа λ_2, λ_3 можуть набувати як дійсні так і комплексно-спряжені значення. Причому перехід відбувається при $D=0$, тобто при $\lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1/\sqrt{\lambda_1}$. Тепер очевидно, що у тривимірних течіях можна виділити дев'ять класів періодичних точок, залежно від значень λ_1 і D . Розглянемо класифікацію періодичних точок більш детально.

Якщо $\lambda_1 = 1$, то це означає, що в напрямку відповідного власного вектора \mathbf{n}_1 не відбувається розтягування або стискання. У канонічній системі координат $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)})$, осі якої визначаються власними векторами, умова $\lambda_1 = 1$ означає, що $\eta^{(1)} = f(\eta^{(1)})$. Тоді для двох інших власних значень виконується умова $\lambda_2 \lambda_3 = 1$, тобто в канонічній площині $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$ для відображення f виконується умова нестисливості. Таким чином, випадок $\lambda_1 = 1$ є по суті двовимірним. Такі періодичні точки можуть бути розбиті на три класи: еліптичні, гіперболічні та параболічні. Умова $\lambda_1 = 1$ виконується в точках періодичних ліній. Дійсно, на періодичній лінії в напрямку дотичної не відбувається розтягування або стискання, тобто напрямком дотичної до періодичної лінії відповідає напрямку власного вектора \mathbf{n}_1 . Таким чином, класифікація точок періодичної лінії еквівалентна класифікації періодичних точок у двовимірних течіях. Тобто, періодичні лінії можна розбити на еліптичні і гіперболічні відрізки, що з'єднуються в параболічних точках. З (4) випливає, що точка періодичної лінії є еліптичною, якщо $-1 < J_1 < 3$. У цьому випадку $D < 0$, а отже власні числа $\lambda_{2,3}$ є комплексно-спряжені. Якщо $J_1 < -1$ або $J_1 > 3$, то $D > 0$, а отже така точка періодичної лінії є гіперболічною. У двовимірних системах еліптичні точки оточені островами регулярного руху. Відображення Пуанкаре в таких островах

представляє собою обертання довкола еліптичної періодичної точки. Таким чином, рідина всередині еліптичної області не покидає цю область і виявляється ізольованою від решти рідини в області перемішування. У тривимірних областях еліптичні ділянки періодичних ліній також оточені островами, що мають форму труб. З гіперболічними точками у двовимірних системах пов'язані стійкий і нестійкий многовиди, що представляють собою лінії, вздовж яких відбувається стискання та розтягування рідини. У тривимірному випадку стійкий і нестійкий многовиди, пов'язані з гіперболічними ділянками періодичної лінії, об'єднуються у поверхні. Таким чином, відображення Пуанкаре довкола періодичної лінії має по суті двовимірну природу.

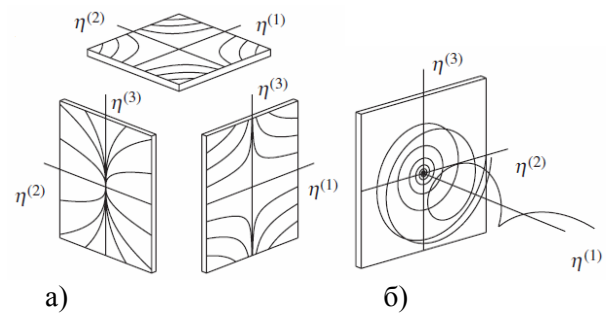


Рис. 1. Фазовий портрет періодичної точки: а) типу гіперболічний вузол ($D > 0$), б) типу гіперболічний фокус ($D < 0$).

Якщо $\lambda_1 \neq 1$, то така періодична точка є ізольованою. Природа відображення Пуанкаре в околі такої періодичної точки є суттєво тривимірною. Класифікація ізольованих точок буде значно складнішою, порівняно з класифікацією періодичних ліній. На рис. 1 а) показано фазовий портрет в канонічній системі координат $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)})$ при умові $D > 0$. У цьому випадку всі три власні числа λ_i набувають дійсні значення. Фазові портрети в координатних площинах представляють собою два сідла і вузол. На рис. 1 б) показано фазовий портрет відображення в околі періодичної точки при умові $D < 0$. У цьому випадку власні числа $\lambda_{2,3}$ набувають комплексно-спряжені значення, що відповідають за обертання у площині $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$. У виродженому випадку $D=0$ маємо два рівні власні числа $\lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1/\sqrt{\lambda_1}$. А отже у площині $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$ фазовий портрет представляє собою дикритичний або вироджений вузол. Таким чином, при $\lambda_1 \neq 1$ періодична точка є

ізолюваною і може бути класифікована як гіперболічний вузол або гіперболічний фокус.

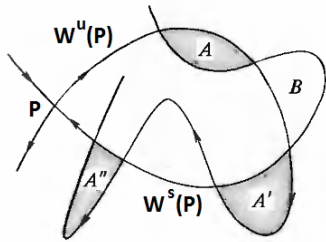


Рис. 2. Стійкий та нестійкий многовиди і гомоклінічні точки їх перетину (площі $A = A' = A'' = \dots$).

Очевидно, що фазовий портрет ізолюваних періодичних точок не має замкнутих ліній або поверхонь, а отже довкола таких точок не може утворюватись ізолюваних островів регулярного руху подібних до тих, що утворюються довкола еліптичних точок періодичних ліній. У течії, що має лише ізолювані періодичні точки і не має періодичних ліній, рідина повинна перемішуватись по всій області течії.

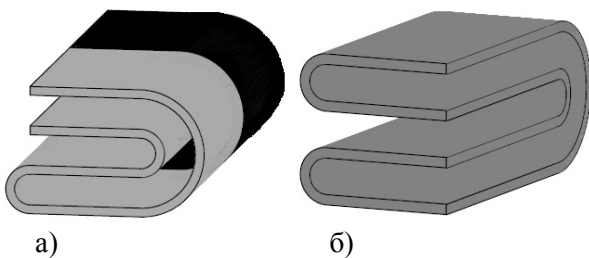


Рис. 3. Схематичне зображення відображення підкови: а) у квазі-двовимірній течії, що має періодичні лінії, б) у реально тривимірній течії.

Будь-яка ізолювана періодична гіперболічна точка пов'язана у просторі з поверхнею і лінією, що називаються многовидами. Стійкий многовид $W^s(\mathbf{P})$ – це множина точок, які в процесі відображення Пуанкаре прямують до періодичної точки \mathbf{P} . Тобто для будь-якої точки $\mathbf{x} \in W^s(\mathbf{P})$ маємо $f^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}$ при $n \rightarrow \infty$. Нестійкий многовид $W^u(\mathbf{P})$ – це множина точок, які прямують до \mathbf{P} при зворотньому процесі, тобто для довільної точки $\mathbf{x} \in W^u(\mathbf{P})$ маємо $f^{-n}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}$ при $n \rightarrow \infty$. У двовимірному випадку стійкий та нестійкий многовиди – це дві лінії, що перетинаються безліч разів (рис. 2). Точки перетину називаються гомоклінічними (при перетині стійкого і нестійкого многовидів однієї періодичної точки) або гетероклінічною (при перетині стійкого і нестійкого многовидів

двох різних періодичних точок). Оскільки точок перетину стійкого і нестійкого многовидів безліч, вони ущільнюються при наближенні до періодичної точки. Таким чином, многовиди формують складну шарову структуру. Завдяки цій властивості перемішування рідини представляє собою видовження рідкої плями вздовж нестійкого многовиду і багаторазове складання при переході через гомоклінічні точки. Таке видовження і складання рідкої плями називається відображенням підкови. Очевидно, що у тривимірних течіях, що мають періодичні лінії, механізм перемішування подібний до того, що має місце у двовимірних течіях. Відображення підкови такої течії схематично показано на рис. 3 а). У такому квазі-двовимірному відображенні темна рідина не змішується зі світлою. Видовження і складання рідини відбувається лише в одному напрямку. Хоча таке відображення підкови також приводить до складної шарової структури, однак наявність лише двовимірного механізму перемішування не дозволяє одержати якісну однорідну мікстуру в усій тривимірній області течії. На рис. 3 б) показано відображення підкови для реально тривимірної течії. Видовження і складання рідини по черзі в двох напрямках веде до ефективного перемішування в усій області течії.

Чисельні результати

Для розрахунків було використано розв'язок задачі Стокса, представлений в [4]. Наведені вище теоретичні міркування проілюструємо на прикладі трьох можливих періодичних течій, що генеруються у скінченному циліндрі. В усіх трьох випадках течії в циліндрі генеруються періодичним рухом торцевих поверхонь циліндра. Нехай циліндр займає область $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $-h < z < h$. Бічна поверхня циліндра $r=1$ нерухома, а торцеві сторони рухаються періодично. У загальному випадку рух торцевих сторін можна записати у наступній формі:

$$\mathbf{u} = u_-(t)\mathbf{e}_x + v_-(t)\mathbf{e}_y, \quad z = -h, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = u_+(t)\mathbf{e}_x + v_+(t)\mathbf{e}_y, \quad z = h. \quad (6)$$

Розглянемо три типові протоколи руху торцевих сторін:

- Задача 1. Рухається лише верхня торцева стінка. Нижня залишається нерухомою. Рух верхньої стінки є зигзагоподібним: $u_+ = V$, $v_+ = u_- = v_- = 0$ при $0 < t < T/2$ і $v_+ = V$,

$u_+ = u_- = v_- = 0$, при $T/2 < t < T$. Тобто, протягом першої половини періоду верхня торцева стінка рухається зі сталою швидкістю в напрямку осі x , протягом другої половини періоду – в напрямку осі y .

- Задача 2. Верхня і нижня стінки рухаються по черзі в протилежних напрямках паралельно осі x . Тобто, $u_+ = V$, $v_+ = u_- = v_- = 0$ при $0 < t < T/2$ і $u_- = -V$, $v_- = u_+ = v_+ = 0$ при $T/2 < t < T$.
- Задача 3. Протокол руху стінок в цій задачі складається з трьох кроків: $u_+ = V$, $v_+ = u_- = v_- = 0$ при $0 < t < T/3$, $u_- = -V$, $v_- = u_+ = v_+ = 0$ при $T/3 < t < 2T/3$, $v_+ = V$, $u_+ = u_- = v_- = 0$ при $2T/3 < t < T$.

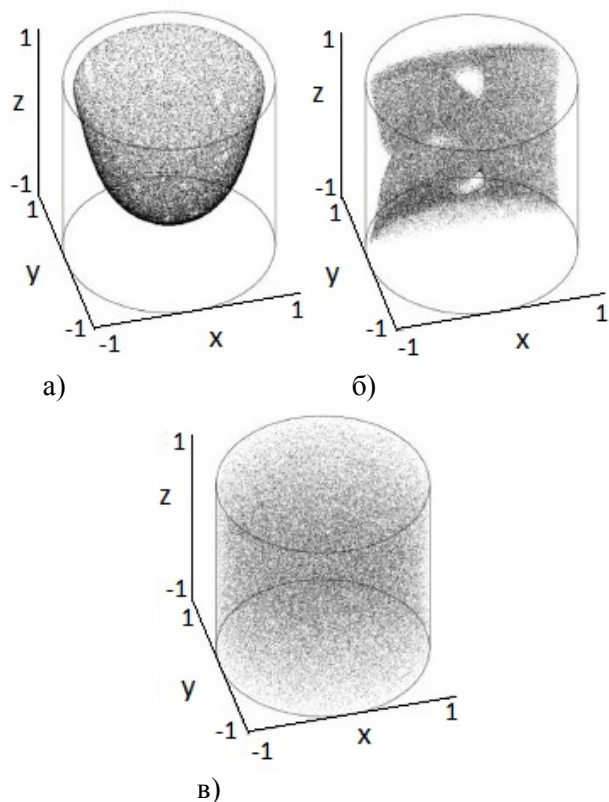


Рис. 4. Перетин Пуанкаре: а) задача 1, б) задача 2, в) задача 3.

Течії у перших двох задачах мають періодичні лінії, а течія задачі 3 має лише ізольовані періодичні точки (див. [2]). Отже, згідно викладеної у попередньому розділі теорії перемішування у таких течіях має двовимірний характер. Хоча режим перемішування рідини може бути хаотичним, в силу його двовимірної природи пляма пасивної домішки не буде перемішуватись по всій області. Крім того, в таких течіях можуть виникати і зони

регулярного перемішування, що утворюють острови довкола еліптичних ділянок періодичних ліній, що також заважають перемішуванню рідини. Течія задачі 3 має лише ізольовані періодичні точки, а отже довкола таких точок не можуть утворюватись острови регулярного руху. Пляма пасивної домішки повинна перемішуватись по всій області течії. Дійсно, наведені теоретичні висновки підтверджено на рис. 4, на якому наведено перетин Пуанкаре для всіх трьох задач. Очевидно, що лише в третій задачі матеріальна точка блукає по всій області течії. В перших двох задачах наявність періодичних ліній спричинює двовимірний характер перемішування.

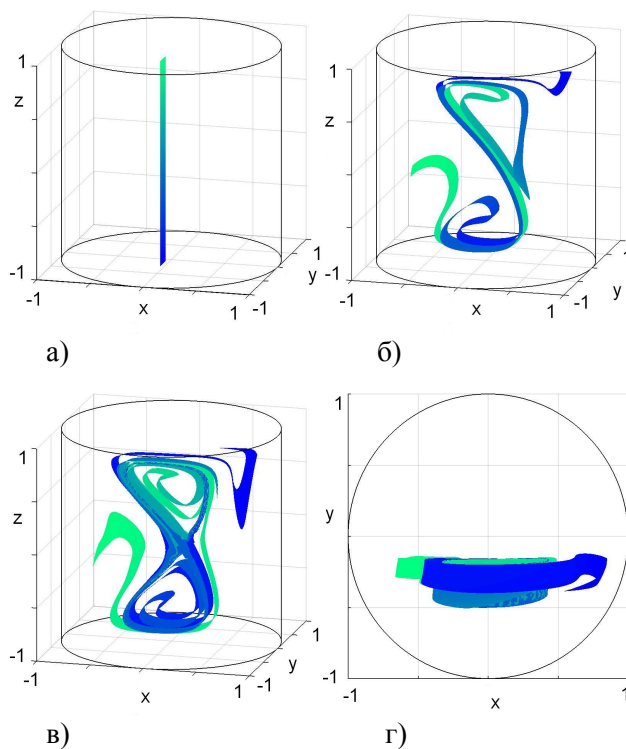


Рис. 5. Трекінг поверхні пасивної домішки (задача 2): а) початкова позиція $t = 0$, б) $t = 4T$, в) $t = 10T$, г) вигляд згори.

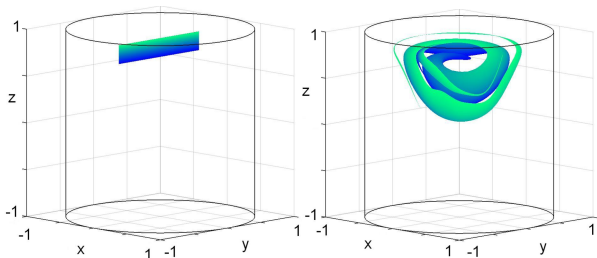
Для відстеження руху пасивної домішки було використано техніку, що базується на трекінгу матеріальних поверхонь. Рідка поверхня представлялась неструктурованою триангулярною сіткою. Результати трекінгу поверхні в Задачі 2 показано на рис. 5. Видно, що рідка поверхня після 10 періодів представляє собою складну видовжену складчасту структуру, як і повинно бути при хаотичному перемішуванні рідини. Однак, оскільки така течія має періодичну лінію, пасивна домішка не

розвивається по всій області течії, а залишається зосередженою в досить вузькій області паралельній осі X . На рис. 6 представлено результати трекінгу поверхні в Задачі 1. Видно, що пасивна домішка також не розвивається по всій області течії, а утворює складчасту структуру в деякій локальній області, обмеженій поверхнею обертання. На рис.7 представлено результати трекінгу поверхні в Задачі 3. Початкова поверхня

представляла собою сферу з центром в ізольованій періодичній точці. Лише у цьому випадку пасивна домішка досить швидко заповнює всю область течії.

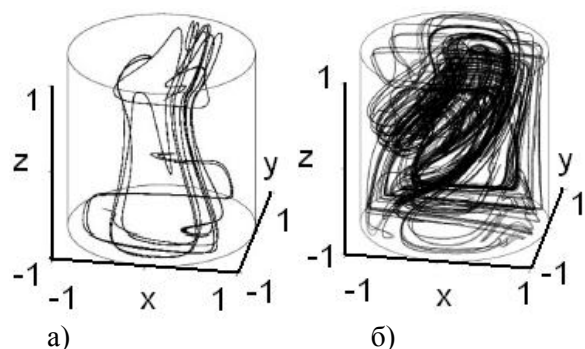
Висновки

У тривимірних течіях періодичні точки проявляють значно більшу різноманітність порівняно з двовимірними течіями. Більше того, у тривимірних течіях періодичні точки можуть об'єднуватись у періодичні лінії. В роботі наведено загальну класифікацію періодичних точок у тривимірних течіях, проаналізовано їх фазові портрети та вплив на процес перемішування рідини. Показано, що класифікація точок періодичних ліній подібна до класифікації періодичних точок у двовимірних течіях. Тому процес перемішування в таких течіях має таку ж саму природу, що і процес перемішування у двовимірних течіях. Будь-який матеріальний об'єм зазнає видовження, згинання і складення лише в одному напрямку. Утворена таким чином складчаста структура подібна до тих, що утворюються при перемішуванні у двовимірних течіях. Пляма пасивної домішки не розвивається по всій області течії, а отже отримати якісну мікстуру в таких течіях неможливо. Ефективний міксинг можливий лише у тривимірних течіях, що мають лише ізольовані періодичні точки. Лише у таких течіях пляма пасивної домішки розвивається по всій області течії.



а) б)

Рис. 6. Трекінг поверхні пасивної домішки (задача 1): а) $t = 0$, б) $t = 17T$.



а) б)

Рис. 7. Трекінг поверхні пасивної домішки (задача 3): а) $t = 6T$, б) $t = 10T$.

Список використаних джерел

1. Chong M.S. A general classification of three-dimensional flow fields / M.S. Chong, A.E. Perry, B.J. Cantwell // *Phys. Fluids A*. – 1990. – 2. – P. 765-776.
2. Malyuga V.S. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container / V.S. Malyuga, V.V. Meleshko, M.F.M. Speetjens, H.J.H. Clercx, G.J.F. van Heijst // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 2002. – 458. – P. 1867-1885.
3. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport / Cambridge University Press, 1989. – p. 364.
4. Meleshko V.V. Steady Stokes flow in a finite cylinder / V.S. Malyuga, A.M. Gomilko // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 2000. – 456. – P. 1741-1758.

References

1. CHONG, M.S., PERRY, A.E., CANTWELL, B.J. (1990) A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids A*. 2. p. 765-776.
2. Malyuga, V.S., Meleshko, V.V., Speetjens, M.F.M., Clercx, H.J.H., van Heijst, G.J.F. (2002) Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 458. p. 1867-1885.
3. OTTINO, J.M. (1989) *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge University Press.
4. MELESHKO, V.V. MALYUGA, V.S., GOMILKO, A.M. (2000) Steady Stokes flow in a finite cylinder. 456. p. 1741-1758.

Надійшла до редколегії 03.06.15