УДК 539.3

Горошко О. О.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кикоть С. В.[2], к.ф.-м.н., доц.

Коливання гнучкого трубопроводу на пружній основі при закритичних швидкостях транспортування рідини

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.
[2] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1,
e-mail: a.goroshko@gmail.com,
s.v.kykot@gmail.com

Oleg O. Goroshko[1], Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof.,
Sergiy V. Kykot'[2], Ph.D., (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Oscillations of a flexible conduit on an elastic foundation at overcritical values of transported fluid

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[2] National Transport University, 01010, Kyiv, Suvorova 1,
e-mail: a.goroshko@gmail.com,
s.v.kykot@gmail.com

Досліджуються коливання гнучкого трубопроводу на пружній основі з шарнірним закріпленням кінців під впливом потоку рідини, що рухається з швидкістю значення якої перевищують значення другої критичної швидкості. На основі двохвильового представлення розв'язку, побудовано рівняння для визначення власних частот та ексцесів, якими визначаються деформації форм коливань при закритичних швидкостях руху потоку рідини. Встановлено, що в закритичній області транспортування рідини має місце скінчене число тонів власних коливань.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, рухоме навантаження, двохвильовий коливний процес, частота коливань, ексцес, закритична швидкість.

The paper considers oscillations of a flexible conduit with fluid flow, which is located on elastic foundation with pin jointed ends. The fluid flow velocity is more than the second critical velocity value. The inertia forces in full of the moving load are taken into consideration in the mathematical model construction.

Object of study – a flexible conduit with fluid flow, which is located on an elastic foundation.

Purpose – investigation of influence of the fluid flow velocity on the natural-vibration frequencies and determination the conditions of loss of stability of the conduit on an elastic foundation.

Method of study is based on extraction and approximate investigation of one-frequency two-wave oscillation processes in mechanical structures with moving loads.

Based on two-wave representation of the solution, equations for determining the natural frequencies and excesses which define deformation of the oscillations forms depending on the overcritical values of the fluid flow velocity are constructed.

The results of the paper can be used for further developments of direct methods for constructing approximate solutions of complicated dynamic systems.

Forecast assumptions about the object of study – taking into consideration of the inertia forces of moving load in full gives an opportunity qualitatively reveal the basic characteristics of dynamics of a structure with a moving load.

Key words: conduit, moving loading, double wave oscillation process, oscillation frequency, excesses, overcritical velocity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

У науковій монографії [1] та статті [3] доведено, що коливання балок та гнучких об'єктів скінченної довжини, які лежать на пружній вінкеровій основі і відбуваються під дією рухомих рівномірно розподілених інерційних навантажень (потоку рідини), що рухаються з постійною швидкістю, моделюється суперпозицією двох груп стоячих хвиль з однаковими частотами, але з різними формами і фазами.

Дослідження динаміки трубопроводу при закритичних швидкостях транспортування рідини розглянуто у роботі [4].

Метою даної роботи є вивчення динаміки коливань гнучкого трубопроводу на пружній основі при закритичних швидкостях руху потоку рідини.

Постановка задачі та методика розв'язання. Розглянемо особливості коливань одновимірного гнучкого трубопроводу на пружній основі під впливом потоку рідини, що рухається з швидкістю $v > v_{kp2}$, значення якої перевищують критичні [3].

Диференціальне рівняння поперечних коливань гнучкого трубопроводу на пружній основі з рухомою рідиною при повному врахуванні сил інерції рухомого навантаження в даному випадку набуває вигляду

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(T - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku = 0\,, \quad (1)$$

де $u(x,t)$ – поперечні відхилення труби;
T – її поздовжній натяг; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ – сума розподілених мас труби і рухомої рідини;
v – швидкість транспортування потоку рідини;
k – коефіцієнт жорсткості опорної основи.

Граничні умови, які не залежать від того, контактує трубопровід з поверхнею чи ні, а визначаються способами закріплення та навантаження кінців. Наприклад, розглянемо випадок шарнірного закріплення на краях гнучкого трубопроводу

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(l,t) = 0\,. \quad (2)$$

Наявність гіроскопічних сил, представлених членами зі змішаними похідними в рівняннях динаміки трубопроводів з рухомою рідиною, не дають змоги застосувати методи розділення змінних та прямі методи математичної фізики в класичній формі до дослідження коливного руху.

При докритичних швидкостях руху рідини рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу, а при закритичних швидкостях руху рідини рівняння (1) перетворюється в рівняння еліптичного типу.

У роботі [3] для коливання гнучкого трубопроводу на пружній основі під впливом потоку рідини, що рухається з постійною докритичною швидкістю $v < v_{kp2}$, встановлено значення трьох критичних швидкостей руху рідини

$$v_{kp1} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}\,,\ v_{kp2} = \sqrt{\frac{T(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}} = v_{kp1}\sqrt{1+\frac{\rho_2}{\rho_1}}\,,$$

$$v_{kp3} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2} + \frac{k}{\rho_2\lambda_n^2}} = v_{kp1}\sqrt{1+\frac{k}{T}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2}\,;$$

а також умови $v_{kp1} < v_{kp3} < v_{kp2}$, при $k < \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T$, $n = 1,2,3,...,\infty$.

Для розв'язання крайової задачі (1), (2) будемо шукати розв'язок рівняння (1) в комплексному вигляді [1,2]

$$u(x,t) = aX(x)e^{i(\omega t + \gamma x)}\,. \quad (3)$$

Підставивши розв'язок у формі (3) в рівняння (1) та, відокремивши дійсну й уявну частини, отримаємо систему рівнянь:

$$\left[(T-\rho_2 v^2)\right]X''(x) +$$
$$+\left[(\rho_1+\rho_2)\omega^2 + 2\rho_2 v\omega\gamma - (T-\rho_2 v^2)\gamma^2 - k\right]X(x) = 0,$$
$$\left[\rho_2 v\omega - (T-\rho_2 v^2)\gamma\right]X'(x) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) дають змогу побудувати власні функції $X_n(x)$, знайти частоти власних коливань ω_n та ексцеси γ_n, що характеризують зміну форм власних коливань під дією рухомого навантаження.

Із другого рівняння системи (4) знаходимо значення параметра γ за формулою

$$\gamma = \frac{\rho_2 v\omega}{T-\rho_2 v^2} = -\frac{\rho_2 v\omega}{\rho_2 v^2 - T}\,. \quad (5)$$

Виключивши з першого рівняння системи (4) параметр γ за допомогою формули (5), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення власних чисел та форм

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0\,, \quad (6)$$

де

$$\lambda^2 = \frac{k}{\rho_2 v^2 - T} - \omega^2\frac{\rho_1\rho_2 v^2 - T(\rho_1+\rho_2)}{\left(\rho_2 v^2 - T\right)^2}\,.$$

При нульових граничних умовах із (6) знаходимо

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x\,,\ \text{де}\ \ \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1,2,3,...,\infty)\,.$$

Цим параметрам відповідає частинний комплексний розв'язок на частоті n-го тону

$$u_n(x,t) = a_n \sin\lambda_n x\left[\cos\omega_n t\cos\gamma_n x - \sin\omega_n t\sin\gamma_n x + +i\left(\sin\omega_n t\cos\gamma_n x + \cos\omega_n t\sin\gamma_n x\right)\right]. \quad (7)$$

У відповідності з (5) – (6) визначаємо

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\left(\rho_2 v^2 - T\right)\left(T + k\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \rho_2 v^2\right)}{\rho_1\rho_2 v^2 - T\left(\rho_1+\rho_2\right)}},$$

$$\gamma_n = -\frac{n\pi}{l}\rho_2 v\sqrt{\frac{T + k\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \rho_2 v^2}{\left(\rho_2 v^2 - T\right)\left(\rho_1\rho_2 v^2 - T\left(\rho_1+\rho_2\right)\right)}}, \quad (8)$$

$$n = 1,2,3,\ldots,m$$

Формули (8) встановлюють залежність частоти власних коливань ω та параметра γ від швидкості руху інерційного навантаження.

Дійсних значень частоти набувають в закритичній області при $v_{kp2} < v < v_{kp3}$, або

$$v_{kp1}\sqrt{1+\frac{\rho_2}{\rho_1}} < v < v_{kp1}\sqrt{1+\frac{k}{T}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2},$$

звідки одержуємо умови: $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} < \dfrac{k}{T}\left(\dfrac{l}{\pi n}\right)^2$, та

$$k > \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T, \quad n = 1,2,3,\ldots,m.$$

Внаслідок лінійності задачі частинними розв'язками рівняння (1) будуть як дійсна, так і уявна частини (7)

$$u_{n1}(x,t) = a_n\sin\lambda_n x\left(\cos\omega_n t\cos\gamma_n x - \sin\omega_n t\sin\gamma_n x\right),$$

$$u_{n2}(x,t) = a_n\sin\lambda_n x\left(\sin\omega_n t\cos\gamma_n x + \cos\omega_n t\sin\gamma_n x\right). \quad (9)$$

Щодо формул (9) можемо зауважити, що розв'язок $u_{n2}(x,t)$ відрізняється від $u_{n1}(x,t)$ лише запізненням на $\Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$.

Для побудови графічних залежностей, як приклад, приймались такі параметри системи:

$\rho_1 = \rho_2 = \rho/2$, $l = 5$ м, $T/\rho = \Omega^2\left(l/\pi\right)^2$, $\Omega = \sqrt{2}\pi$ с$^{-1}$.

На рисунках 1 та 2 показано залежності частоти власних коливань ω_n та параметра γ_n від швидкості руху потоку рідини v, що визначаються формулами (8).

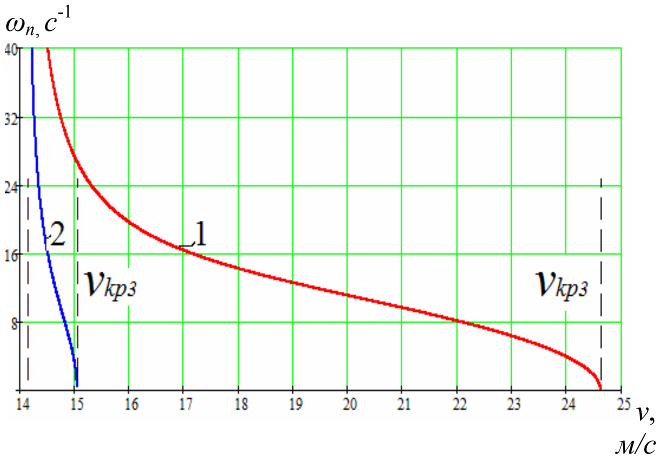

Рис. 1. Залежність частоти від значення закритичної швидкості руху рідини

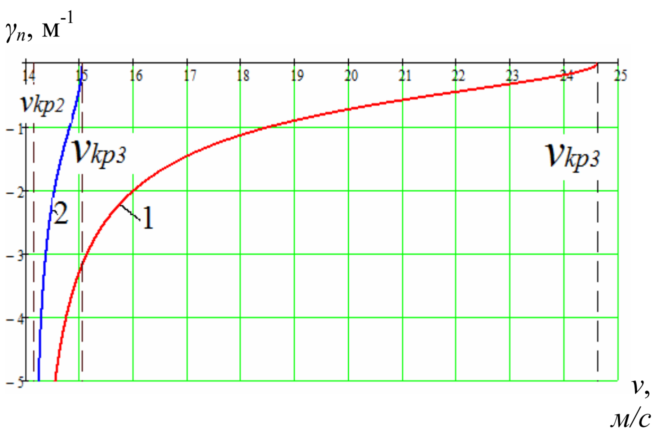

Рис. 2. Залежність ексцесу від значення закритичної швидкості руху рідини

Загальний розв'язок рівняння коливання трубопроводу (1), який будується у формі $u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} u_n(x,t)$ для закритичних значень швидкості руху потоку рідини $v_{kp2} < v < v_{kp3}$ набуває вигляду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{m}a_n\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\gamma_n x\cos(\omega_n t+\varphi_n)-\right.$$
$$\left.-\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\gamma_n x\sin(\omega_n t+\varphi_n)\right). \quad (10)$$

Загальний розв'язок (10) перепишемо у двохвильовій формі

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{m}a_n\left(\Phi_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)-\Psi_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)\right), \quad (11)$$

де

$$\Phi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\gamma_n x,$$
$$\Psi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\gamma_n x. \quad (12)$$

Маємо дві різні форми стоячих хвиль, утворені деформуванням форм власних коливань $\sin\frac{\pi nx}{l}$, зсувами, що визначаються параметром γ_n, але однаковими частотами. Параметр γ_n це своєрідний ексцес (перекіс) форм коливань, які задовольняють одні й ті ж граничні та початкові умови, але зміщені за фазою на $\frac{\pi}{2}$. При нульовій швидкості руху навантаження ці форми збігаються, тобто має місце класичний підхід до розділення змінних.

Після нескладних тригонометричних перетворень розв'язок (11) зводиться до вигляду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{m}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos(\omega_n t+\gamma_n x+\varphi_n). \quad (13)$$

Висновки. Отримані розрахункові формули та графічні залежності дають змогу зробити певні висновки щодо коливного процесу гнучкого трубопроводу при закритичних швидкостях транспортування рідини.

У закритичній області швидкостей руху потоку рідини коливання гнучкого трубопроводу мають двохвильовий характер.

Залежно від співвідношень величин: швидкості транспортування рідини v, поздовжнього натягу T, та коефіцієнта жорсткості основи k, – при закритичних швидкостях транспортування рідини має місце скінчене число тонів власних коливань.

Список використаних джерел

1. *Горошко О. О.* Двохвильові процеси в механічних системах / Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. – К.: Либідь, 1991. – 188 с.
2. *Горошко О. О.* Дослідження одночастотних режимів в двохвильових системах (в системах з рухомим навантаженням) / О. О. Горошко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : фіз.-мат. науки. – 2002. – № 2. – С. 93–98.
3. *Кикоть С. В.* Коливання гнучкого трубопроводу на пружній основі з рухомою рідиною. / С. В. Кикоть // Вісник НТУ: В 2-х частинах: Ч. 2 – К.: НТУ – 2012. – Вип. 26 – С. 559 – 563.
4. *Лимарченко О. С.* Поведінка трубопроводу при закритичних швидкостях течії рідини */ О. С* Лимарченко, О. П. Тімохін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 173–175.

References

1. GOROSHKO O., KIBA S., DEM'YANENKO A. (1991) Two-waves processes in mechanical systems. Kyiv: Lybid.
2. GOROSHKO O. (2002) An investigation of the one-frequency regimes in two-waves systems (in the systems with a moving loading). Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.(2). p. 93–98.
3. KYKOT' S. (2012) Oscillations of a flexible conduit on an elastic foundation with moving fluid *Visnyk NTU: In two parts. Kyiv: NTU.* 26(2). p. 559–563.
4. LIMARCHENKO O. (2013) Behavior of pipeline for supercritical velocities of liquid flow. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.(3). p. 173–175.

Надійшла до редколегії 29.05.2015