УДК 517.929

Т.О. Єрьоміна, старший викладач

Про побудову неперервних розвязків систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37,
e-mail: ierominat@ukr.net

T.O. Yeromina, senior teacher

About construction of continuous solutions of nonlinear difference-functional equations

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 03056, Kyiv-56, Prospect Peremohy, 37,
e-mail: ierominat@ukr.net

Розроблено метод побудови неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь і досліджено їх властивості.

Ключові слова: різницеві рівняння, функціональні рівняння, різницево-функціональні рівняння.

It is considered one class of systems of nonlinear difference-functional equations which includes properties of difference and q-difference (functional) equations what is important tool in solving many problems in applied sciences. Therefore, under various assumptions, the difference equations have been the object of research of many mathematicians, the development of their theory acquired a number of currents. Today this theory is widely branching and already has a lot of tangible results. The main task of this work is a study of the structure of the set of continuous solutions of one class of systems of nonlinear difference-functional equations. Determined sufficient conditions of the existence of continuous solutions, developed a method of constructing such solutions of systems of nonlinear difference-functional equations and also investigated the behavior of these solutions at t goes to infinity. It should be noted that the method of proof also gives possibility to construct a periodic solution and investigate its properties. Performed researches add to already existent works of other mathematicians and facilitate further study of the continuous solutions of wider classes of difference-functional equations.

Key Words: difference equations, functional equations, difference-functional equations.

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

Окремі класи систем нелінійних різницево-функціональні рівнянь при різних припущеннях були об'єктом дослідження багатьох математиків [1-4] . Особлива увага приділялася вивченню питань існування неперервних розв'язків, дослідженню структури їх множини та поведінці при $t \to \infty$ [3-4]). Продовжуючи ці дослідження виникла задача про отримання аналогічних результатів для рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right) = \Lambda x\left(t\right) + f\left(t, x\left(t+1\right)\right), \qquad (1)$$

де $t \in \Re$, $\Lambda-$ дійсна $(n \times n)$ - матриця вигляду $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$, $f : \Re \times \Re^n \to \Re^n$, q - деяка дійсна стала, при певних припущеннях відносно λ_i, $i = \overline{1, n}$ та q.

Розглянемо систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (1). При цьому припустимо, що виконуються наступні умови:

1. $|\lambda_i| \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $q > 0$;
2. вектор-функція $f\left(t, x\right)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \Re$, $x \in \Re^n$ і $f\left(t, 0\right) = 0$;
3. для довільних $t \in \Re$, $x, y \in \Re^n$ виконується співвідношення

$$\left|f\left(t, x\right) - f\left(t, y\right)\right| \leq l\left|x - y\right|, \qquad (2)$$

де l - деяка додатна стала.

Теорема 1.*Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

4. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

5. $\Delta = \frac{l}{1-\lambda^*} < 1$,

де $1 > \lambda^* > \max\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\right\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \qquad (3)$$

де $x_i(t)$, $i=0,1,...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t\geq T>0$ *вектор-функції, які задовольняють умові* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$.

Доведення: Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду

$$x_0(qt)=\Lambda x_0(t), \tag{4_0}$$

$$x_1(qt)=\Lambda x_1(t)+f\left(t,x_0(t+1)\right), \tag{4_1}$$

$$x_i(qt)=\Lambda x_i(t)+f\left(t,\sum_{l=0}^{i-1}x_l(t+1)\right)-$$
$$-f\left(t,\sum_{l=0}^{i-2}x_l(t+1)\right), \tag{4_i}$$

$i=2,3,...$, і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t\geq T>0$ розв'язків, які задовольняють умови

$$|x_i(t)|\leq M\Delta^i, i=1,2,\ldots, \tag{5_i}$$

де M- деяка додатна стала.

Система рівнянь (4_0) має множину неперервних при $t\geq T>0$ розв'язків вигляду

$$x_0(t)=t^{\nu}\omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{6_0}$$

де $\omega(\tau)=(\omega_1(\tau),\omega_2(\tau),\ldots,\omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i=1,\ldots,n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu}=diag\left(t^{\frac{\ln\lambda_1}{\ln q}},t^{\frac{\ln\lambda_2}{\ln q}},\ldots,t^{\frac{\ln\lambda_n}{\ln q}}\right),$$

які задовольняють умові

$$|x_0(t)|\leq|t^{v}|\,|\omega(\tau)|\leq t^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}}\,|\omega(\tau)|\leq t^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}}M, \tag{5_0}$$

де $M=\max\limits_{\tau}|\omega(\tau)|$.

Підставляючи в (4_1) ряд

$$x_1(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^j f\left(q^{-(j+1)}t,x_0(q^{-(j+1)}t+1)\right), \tag{6_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше цього, в силу (2), (5_0) і $\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}<0$, отримаємо

$$\begin{aligned}&|x_1(t)|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\left|f\left(q^{-(j+1)}t,x_0(q^{-(j+1)}t+1)\right)\right|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,l\left|x_0(q^{-(j+1)}t+1)\right|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,lM\left(\frac{1}{q^{j+1}}t+1\right)^{\frac{\ln\lambda^*}{\ln q}}\leq\\&\leq lM\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\leq M\frac{l}{1-\lambda^*}\leq M\Delta.\end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4_0), (4_1) мають сім'ї неперервних при $t\geq T>0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (5_0), (5_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (5_0), (5_1), можна послідовно показати, що ряди

$$x_i(t)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^j\left[f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-2}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right], \tag{6_i}$$

$i=2,3,...$ рівномірно збігаються при всіх $t\geq T>0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i=2,3,...$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (6_i), $i=2,3,...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (4_i), $i=2,3,....$ Доведемо їх збіжність.

Оскільки ряд (6_1) рівномірно збігається при $t\geq T>0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (6_i) доведена уже для деякого $i\geq 1$ і доведемо, що ряд (6_{i+1}) також рівномірно збігається при $t\geq T>0$ і виконується оцінка (5_{i+1}). В силу (2), (6_{i+1}) та (5_i) отримаємо

$$\begin{aligned}&|x_{i+1}(t)|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\left|f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)-\right.\\&\left.-f\left(q^{-(j+1)}t,\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right)\right|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\,l\left|\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)-\right.\\&\left.-\textstyle\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\leq\\&\leq\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\,l\left|x_i\left(q^{-(j+1)}t+1\right)\right|\leq\\&\leq lM\Delta^i\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\leq M\Delta^i\frac{l}{1-\lambda^*}=M\Delta^{i+1}.\end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (4_i), i=1,2,... мають розв'язки у вигляді рядів (6_i), i=1,2,..., що рівномірно збігаються при $t\geq T>0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, i=1,2,..., які задовольняють умови (5_i). Із (5_i) безпосередньо випливає, що ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t\geq T>0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)|\leq\frac{M}{1-\Delta}.$$

Для завершення доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що ряд (3) задовольняє систему рівнянь (1), тобто виконується тотожність

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) \equiv \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + f\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1)\right).$$

Для цього потрібно довести, що ряд

$$f\left(t, x_0\left(t+1\right)\right) + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} \left[f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right)\right]$$

рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ і його сумою є $f\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} x_l(t+1)\right)$.

А це в свою чергу, буде доведено, якщо вдасться показати, що при всіх $t \geq T > 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{i\to\infty} f\left(t, \sum_{l=0}^{i} x_l(t+1)\right) = f\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} x_l(t+1)\right). \tag{7}$$

Нехай $\mathcal{E}$ - як завгодно мале додатне число. Тоді в силу умов теореми існує такий номер N, що виконується умова

$$M\frac{l}{1-\Delta}\Delta^{N+1} < \varepsilon.$$

Далі, приймаючи до уваги умови теореми і оцінки (5_i), i=0,1, ..., знаходимо

$$\left| f\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i} x_l(t+1)\right)\right| \leq$$

$$\leq l\left|\sum_{l=i+1}^{\infty} x_l(t+1)\right| \leq lM\frac{\Delta^{i+1}}{1-\Delta} < \varepsilon$$

при всіх $i \geq N$. Цим самим співвідношення (7) і теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1.-3. і умови:*

6. $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;

7. $\Delta = \frac{l}{\lambda_* - 1} < 1$,

де $1 < \lambda_* < \min\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\right\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{8}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ - деякі неперервні обмежені при $t \geq T > 0$ вектор-функції, які задовольняють умові $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Доведення: Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду

$$x_0(qt) = \Lambda x_0(t), \tag{9_0}$$

$$x_1(qt) = \Lambda x_1(t) + f\left(t, x_0(t+1)\right), \tag{9_1}$$

$$x_i(qt) = \Lambda x_i(t) + \\ + f\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l(t+1)\right) - f\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} x_l(t+1)\right), \tag{9_i}$$

$i = 2, 3, ...$ Покажемо, що вони мають сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умови

$$|x_i(t)| \leq M\Delta^i, i = 1, 2, \ldots. \tag{10_i}$$

де M- деяка додатна стала.

Дійсно, система рівнянь (9_0) має сім'ю неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, які задовольняють умові

$$|x_0(t)| \leq \frac{M}{t^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}}, \tag{10_0}$$

де $1 < \lambda_* < \min\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\right\}$. Далі, підставляючи в (9_1) ряд

$$x_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} f\left(q^j t, x_0(q^j t+1)\right), \tag{11_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більше того, в силу (2), (10_0), отримуємо

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} \left|f\left(q^j t, x_0(q^j t+1)\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} l \left|x_0(q^j t+1)\right| \leq \\ &\leq \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} l \frac{M}{(q^j t+1)^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} \leq \\ &\leq \tfrac{1}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{\lambda_*}\right)^{j} lM \leq \\ &\leq \tfrac{M}{\lambda_*} \frac{l}{1-\frac{1}{\lambda_*}} \leq M\frac{l}{\lambda_*-1} \leq M\Delta. \end{aligned}$$

Отже, системи рівнянь (9_0), (9_1) мають сім'ї неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (10_0), (10_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (10_0), (10_1), можна послідовно показати, що ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \left[f\left(q^j t, \sum_{l=0}^{i-1} x_l\left(q^j t+1\right)\right) - \right.$$

$$-f\left(q^jt,\sum_{l=0}^{i-2}x_l\left(q^jt+1\right)\right)\Bigg], \qquad (11_i)$$

$i=2,3,...$ рівномірно збігаються при всіх $t\geq T>0$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (9_i), $i=2,3,...$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (11_i), $i=2,3,...$ є формальними розв'язками систем рівнянь (9_i), $i=2,3,....$ Доведемо їх збіжність.

Справді, оскільки ряд (11_1) рівномірно збігається при $t\geq T>0$, то розмірковуючи за індукцією, припустимо, що збіжність ряду (11_i) доведена уже для деякого $i\geq 1$ і доведемо, що ряд (11_{i+1}) також рівномірно збігається при $t\geq T>0$ і виконується оцінка (10_{i+1}). В силу (2), (11_{i+1}) та (10_i) отримаємо

$$|x_{i+1}(t)|\leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1}\left|f\left(q^jt,\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^jt+1\right)\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(q^jt,\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^jt+1\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1}l\left|\sum_{l=0}^{i}x_l\left(q^jt+1\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{l=0}^{i-1}x_l\left(q^jt+1\right)\right|\leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1}l\left|x_i\left(q^jt+1\right)\right|\leq$$
$$\leq lM\Delta^i\frac{1}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j\leq$$
$$\leq M\Delta^i\frac{l}{\lambda_*-1}=M\Delta^{i+1}.$$

Отже, системи рівнянь (9_i), i=1,2,... мають розв'язки у вигляді рядів (11_i), i=1,2,..., що рівномірно збігаються при $t\geq T>0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, i=1,2,..., які задовольняють умови (10_i). Із (10_i) безпосередньо випливає, що ряд (8) рівномірно збігається при всіх $t\geq T>0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умові

$$|x(t)|\leq\frac{M}{1-\Delta}.$$

Далі, діючи аналогічно тому, як і при доведенні теореми 1, можна показати, що ряд (8) задовольняє систему рівнянь (1), тобто виконується тотожність

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i(qt)\equiv\Lambda\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t)+f\left(t,\sum_{i=0}^{\infty}x_i(t+1)\right),$$

що і завершує доведення теореми.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations./Birkhoff G.D.— Trans. Amer. Math. Soc.— 1911.—12.—pp. 243 – 284.

2. Митропольский Ю.А. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. /Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.– К.: Наукова думка.— 1985. — 216 с.

3. Пелюх Г.П. К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом /Пелюх Г.П.— ДАН. — 2006. — 73.— № 2. — С. 269–272.

4. Єрьоміна Т.О. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь /Єрьоміна Т.О.—// Нелінійні коливання.— 2014. — 17, № 3. — С. 341–350.

References

1. BYRKHOV, G. (1911) General theory of linear difference equations.— Trans. Amer. Math. Soc.,12, pp. 243 – 284.

2. MITROPOLSKY, Y., SAMOILENKO, A., MARTINUK, D. (1985) Sistemy evolyutsionnyh uravneniy s periodicheskimi i uslovnoperiodicheskimi koefitsientami. — Kiev: Naukova Dumka.

3. PELYUKH, G.(2006) K tiorii sistem lineynyh raznostnyh uravneniy s nepreryvnym argumentom. DAN. – 73, № 2. – pp. 269–272.

4. YEROMINA, T.(2014) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv sistem liniynyh riznytsevo-funktsionalnyh rivnyan. Neliniyni kolyvannya. – 17, № 3. – pp. 341–350.

Надійшла до редколегії 05.05.2015