

УДК 539.3

Клімчук Т. В.¹, аспірант
Острик В. І.¹, д. ф.-м. н., проф.

Ковзний контакт напівнескінченного штампа з пружною смугою

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

T. V. Klimchuk¹, graduate student
V. I. Ostryk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Sliding contact of the semi-infinite stamp with an elastic strip

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

Розглянуто плоску контактну задачу теорії пружності про вдавлювання напівнескінченного штампa в пружну смугу, нижня межа якої жорстко закріплена, у випадку повного проковзування між подошвою штампa і межею смуги з урахуванням сил тертя в області контакту. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано точний аналітичний розв'язок задачі. Визначено розподіли напружень в області контакту та на закріпленій грані смуги, а також нормальні переміщення вільної від навантаження частини межі смуги.

Ключові слова: ковзний контакт, пружна смуга, штамп, метод Вінера – Гопфа, напруження.

In present paper the sliding contact problem of the semi-infinite stamp with rectilinear basis and an elastic strip with rigidly fixed bottom edge is considered. Corresponding mixed boundary-value problem of theory of elasticity was reduced to single integral equation by means of using the Fourier integral transform. The functional equation was obtained after expanding the integral equation on whole real axis and settling the functions which are analytical in upper and lower half-planes of the complex plane. The solution of the last one was realized by the Wiener – Hopf method. The factorization of the coefficient of functional equation was implemented in the form of infinite products which contain roots of transcendental equations. Obtained exact analytical solution for stress and displacement includes the power series with exponential convergence. The results of the calculation of contact stress and normal displacement on the top edge and also normal and tangential stresses on the bottom edge are presented. The calculation was performed for different values of friction coefficient and compared with results of smooth contact.

Key words: sliding contact, elastic strip, stamp, Wiener – Hopf method, stress.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

У контактній механіці окремий розділ складають задачі для пружної смуги, що пов'язано з необхідністю досліджень властивостей конструкційних матеріалів з покриттями. Отримані, в основному, наближені асимптотичні розв'язки контактних задач для вузької або широкої (в порівнянні з розміром штампa) смуги у випадку гладкого контакту, тобто без врахування сил тертя в області контакту [1, 2].

Дана робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану в пружній смузі при фрикційному контакті з напівнескінченим штампом. Раніше ця задача без врахування сил тертя в області контакту розв'язана в [3].

Постановка задачі

Розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з модулем зсуву G та коефіцієнтом Пуассона ν

в умовах плоскої деформації (рис. 1). Нехай нижня грань $y = -h$ ($-\infty < x < \infty$) смуги жорстко закріплена. У верхню грань $y = h$ смуги на проміжку $0 \leq x < \infty$ вдавлюється штамп з прямолінійною основою, який під дією рівномірно розподілених нормального p і дотичного q навантажень рухається рівномірно з малою швидкістю так, що динамічними ефектами можна знехтувати. Інша частина $-\infty < x < 0$ верхньої межі $y = h$ вільна від навантаження. В області контакту $0 \leq x < \infty$, $y = h$ подошви штампa з частиною верхньої грані смуги нормальні та дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона (Кулона). Для забезпечення проковзування штампa вздовж смуги на інтенсивності p і q навантаження необхідно накласти умову $q = \mu_0 p$, де $|\mu_0|$ – коефіцієнт тертя; випадку руху штампa вліво відповідають значення $\mu_0 > 0$, $q > 0$, вправо – значення $\mu_0 < 0$, $q < 0$ ($p > 0$).

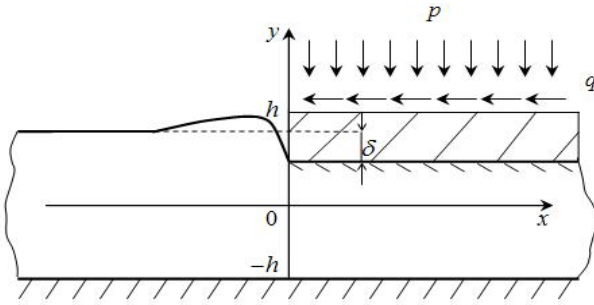


Рис. 1. Взаємодія штампа з пружною смугою

Крайові умови задачі наступні:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= -\delta, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = \mu_0 \sigma_y|_{y=h} \quad (0 < x < \infty), \\ \sigma_y|_{y=h} &= 0, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0 \quad (-\infty < x < 0), \\ u_x|_{y=-h} &= 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

де δ – просідання штампа. Величина δ визначається з умов рівноваги елемента $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$, $-h \leq y \leq h$ смуги на нескінченності ($x_0 \rightarrow \infty$), який знаходиться в умовах однорідного напружено-деформованого стану: $\sigma_y = -p$, $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = -\delta / (2h)$. Із закону Гука отримаємо

$$\delta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{ph}{G}.$$

Інтегральне рівняння задачі та його розв'язання

Введемо невідому функцію нормальних контактних напружень

$$\sigma(x) = \frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=h} \quad (0 < x < \infty) \quad (2)$$

та її трансформанту Фур'є

$$\tilde{\sigma}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma(r) e^{i\mu r} dr.$$

Розглянемо основну змішану крайову задачу для смуги, коли на грані $y = h$ задано нормальні $2G\sigma(x)$ та дотичні $2G\mu_0\sigma(x)$ напруження, а на грані $y = -h$ – нульові переміщення. Розв'язок шукатимемо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. На грані $y = h$ смуги матимемо:

$$u_y|_{y=h} = 2h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(2\mu h)}{2\mu h \Delta(2\mu h)} \tilde{\sigma}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= 2(1-\nu) [(3-4\nu) \operatorname{sh} 2z - 2z] - \\ &\quad - 2i\mu_0 [(3-4\nu)(1-2\nu) \operatorname{sh}^2 z - z^2], \\ \Delta(z) &= (3-4\nu)(\operatorname{ch} 2z - 1) + 8(1-\nu)^2 + 2z^2. \end{aligned}$$

Розв'язок (3) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставивши вираз для нормальних переміщень з (3) в першу крайову умову (1), отримаємо інтегральне рівняння

$$2h \int_{-\infty}^{\infty} K(2\mu h) \tilde{\sigma}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu = -\delta \quad (0 \leq x < \infty). \quad (4)$$

Функцію контактних напружень подамо у вигляді

$$\sigma(x) = -\frac{p}{2G} + \sigma_1(x), \quad \sigma_1(\infty) = 0.$$

Виконавши заміни змінних

$$x = 2h\xi, \quad r = 2h\eta, \quad \tau = 2\mu h$$

та ввівши нову невідому функцію

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{2\pi} 2h\delta^{-1} \sigma_1(2h\xi) \quad (0 < \xi < \infty), \quad (5)$$

інтегральне рівняння (4) перепишемо у формі

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad (6)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$f(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi} hp}{\delta G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(-is_k)}{s_k^2 \Delta'(-is_k)} e^{-s_k \xi},$$

де s_k ($k = 1, 2, \dots$) – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ з півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

Рівняння (6) є класичним інтегральним рівнянням Вінера – Гопфа. Для його розв'язання застосуємо метод факторизації [4].

Вважаючи, що $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$, розповсюдимо інтегральне рівняння (6) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta,$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$), отримаємо функціональне рівняння

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \\ &= -\frac{1}{\delta G} hp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(-is_k)}{s_k^2 \Delta'(-is_k)} \frac{1}{iz - s_k}. \end{aligned}$$

Факторизацію коефіцієнта $K(z)$ рівняння (8) виконаємо у вигляді нескінченних добутків:

$$K(z) = K(0)K^+(z)K^-(z), \quad K(0) = \frac{1-2\nu}{1-\nu},$$

$$K^+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_k}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_k}\right)^{-1},$$

$$K^-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_k}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_k}\right)^{-1},$$

де ζ'_k і ζ_k ($k=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ із півплощин $\text{Re}s < 0$ і $\text{Re}s > 0$ відповідно.

Функцію $F^+(z)/K^-(z)$ подамо як різницю аналітичних у півплощинах $\text{Im}z > c^+$ і $\text{Im}z < c^-$ функцій:

$$\frac{F^+(z)}{K^-(z)} = f^+(z) - f^-(z),$$

$$f^+(z) = \frac{ihp}{\delta G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(-is_k)}{s_k^2 \Delta'(-is_k)} \frac{1}{K^-(is_k)(is_k+z)}.$$

В результаті згідно з [4] отримаємо розв'язок функціонального рівняння (8):

$$\Phi^+(z) = f^+(z) / [K(0)K^+(z)],$$

$$\Phi^-(z) = K^-(z)f^-(z).$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до першого співвідношення (7), отримаємо розв'язок інтегрального рівняння (6):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt \quad (\xi > 0). \quad (9)$$

Визначення напружень та переміщень

Обчисливши інтеграл із (9) за допомогою теорії лишків та врахувавши заміни (2), (5), отримаємо контактні напруження ($\xi > 0$):

$$\frac{\sigma_y}{p} \Big|_{y=h} = -1 - K(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(i\zeta'_k) K^-(i\zeta'_k)}{\lambda'(i\zeta'_k)} e^{\zeta_k \xi}. \quad (10)$$

Аналогічно, обрахувавши інтеграл із (3) для $x < 0$, знайдемо нормальні переміщення ненавантаженої частини верхньої грані смуги ($\xi < 0$):

$$\frac{u_y}{\delta} \Big|_{y=h} = -\frac{1}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K^+(is_k)} \frac{\lambda(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} e^{s_k \xi}. \quad (11)$$

Поблизу краю штамп контактні напруження та нормальні переміщення мають характерну для задач ковзного контакту поведінку

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = O(x^{-1/2+\gamma}), \quad x \rightarrow +0;$$

$$u_y \Big|_{y=h} = O((-x)^{1/2+\gamma}), \quad x \rightarrow -0,$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{(1-2\nu)\mu_0}{2(1-\nu)}.$$

яку визначаємо з формул (3), (7) із застосуванням тауберових теорем [4].

Напруження на нижній грані смуги дістанемо у вигляді комплексної комбінації

$$\frac{1}{p} (\sigma_y + i\tau_{yx}) \Big|_{y=-h} = -\frac{1}{2} (1 + i\mu_0) + 2(1-\nu) \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}(\tau)}{\tau \Delta(\tau) K^+(\tau)} e^{-i\tau \xi} d\tau, \quad (12)$$

$$\tilde{\lambda}(\tau) = [\tau + 2(1-\nu)] \text{ch} \tau + [\tau - (1-2\nu)] \text{sh} \tau -$$

$$-i\mu_0 \{ [\tau - 2(1-\nu)] \text{ch} \tau + [\tau + (1-2\nu)] \text{sh} \tau \}.$$

Обчислення напружень і переміщень, віднесених до величин p і δ відповідно, за формулами (10)–(12) проведено для коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ і різних значень коефіцієнта тертя $|\mu_0|$ ($\mu_0 = 0.25, 0.5, 1$ при проковзуванні штамп вліво; $\mu_0 = 0$ при гладкому контакті; $\mu_0 = -0.25, -0.5, -1$ при проковзуванні штамп вправо).

На рис. 2 наведено розподіли нормальних контактних напружень $\sigma_y/p \Big|_{y=h}$. Видно, що зі збільшенням коефіцієнта тертя у випадку руху штамп вправо ($\mu_0 < 0$) спостерігається зменшення контактного тиску в середній частині області контакту ($0.3 < x/(2h) < 1$). На краю області контакту ($x \rightarrow +0$) контактний тиск необмежено зростає. На відміну від контакту штамп з пружною півплощиною, де вплив дотичних зусиль, які виникають в області контакту за наявності тертя, на розподіл контактного тиску є незначним [1], у даній задачі цей вплив є суттєвим.

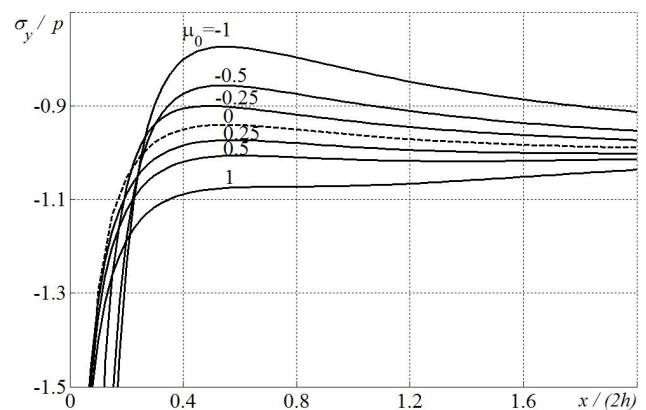


Рис. 2. Розподіли контактних напружень ($y = h$)

На рис. 3 зображено нормальні переміщення вільної від навантаження частини верхньої грані смуги. На відстані від краю штамп, яка приблизно дорівнює ширині смуги, її верхня межа піднімається, утворюючи пагорбок, висота якого зростає при збільшенні параметра μ_0 ; для від'ємних значень $\mu_0 < -0.5$ пагорбок зникає і вся верхня межа смуги просідає разом зі штампом.

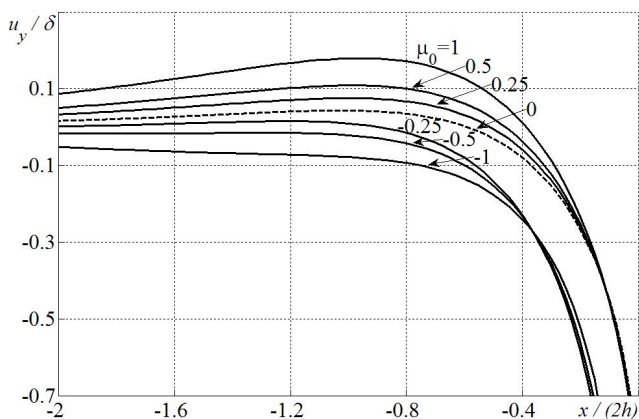


Рис. 3. Розподіли нормальних переміщень ($y = h$)

Рис. 4 і 5 ілюструють розподіли нормальних $\sigma_y/p|_{y=-h}$ і дотичних $\tau_{yx}/p|_{y=-h}$ напружень на закріпленій нижній грані смуги. Привертає увагу той факт, що у випадку проковзування штамп вправо ($\mu_0 < 0$) у певній зоні нижньої грані смуги поза штампом нормальні напруження переходять у напруження розтягу. При збільшенні навантаження це може призвести до відшарування смуги від жорсткої основи. Зсувні напруження на нижній грані смуги зменшуються поблизу краю штамп-

па внаслідок видавлювання пружного матеріалу з під штамп.

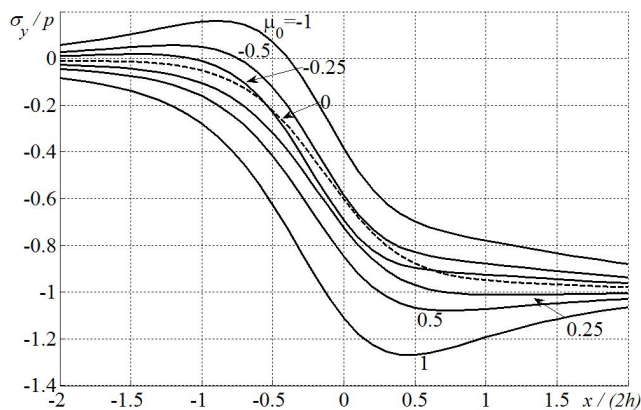


Рис. 4. Розподіли нормальних напружень ($y = -h$)

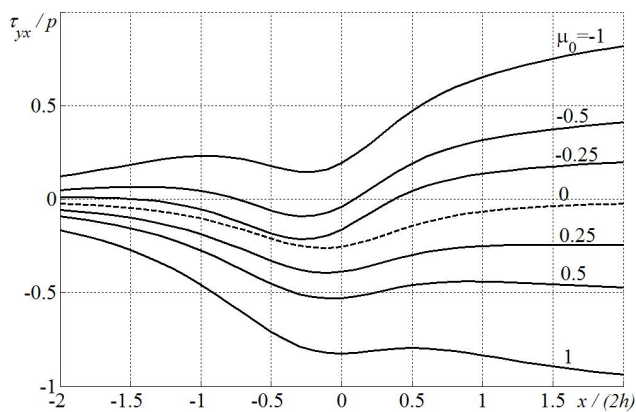


Рис. 5. Розподіли дотичних напружень ($y = -h$)

Список використаних джерел

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва, 2001. – 672 с.
3. Улитко А. Ф. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании / А. Ф. Улитко, В. И. Острик // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
4. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.

References

1. DZHONSON, K. (1989) *Mehanika kontaktного vzaimodeistvija*. Moskva: Mir.
2. VOROVICH, I. and ALEKSANDROV, V. (editors) (2001) *Mehanika kontaktnih vzaimodeistvii*. Moskva.
3. ULITKO, A. and OSTRUK, V. (2004) Smeshannaja zadacha teorii uprugosti dlja polosi na zestkom osnovanii. *Trudy III Vserosijskoj konferentsii po teorii uprugosti*. Rostov-na-Donu: Novaja kniga. P. 372 – 375.
4. NOBL, B. (1958) *Methods based on the Wiener – Hopf technique*. London – New York – Paris – Los Angeles.

Надійшла до редколегії 09.06.15