УДК 539.3

Остос О. Х.[1], студент
Острик В. І.[1], д. ф.-м. н., проф.

Згин пружної смуги зосередженими силами

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ostos.alexander1994@yandex.ua

Ostos O. H.[1], student
V. I. Ostryk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Bending of elastic strip by concentrated forces

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: ostos.alexander1994@yandex.ua

Розглянуто згин пружної смуги трьома зосередженими нормальними силами, одна з яких прикладена до однієї грані смуги, а дві інших сили – до іншої грані. Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є знайдено точний аналітичний розв'язок задачі. Подано результати розрахунків розподілів напружень в різних поперечних перерізах смуги та нормальних переміщень на середній лінії смуги. Проведено порівняння отриманих результатів з результатами наближеного розв'язку задачі у межах теорії балок Кірхгофа.

Ключові слова: згин, пружна смуга, напруження, переміщення, балка.

It was considered the bend of elastic strip by three normal concentrated forces, which one of them was put on the one side of the strip, and two others forces were put on the another side. With the application of integral transformation of Fourier it was found the exact analytic solution of the problem, according to which the stresses were expressed by convergent integrals of Fourier, and displacements by divergent integrals. To define the latter it was used the apparatus of general functions. It was given the results of calculations of the stress distribution in the different accros sections of the bend and the normal displacements on the middle line of the bend. It was compared the obtained results with the results of the approximate solution of the problem in the bound of the theory of Kirchhoff's beams. In the last case it was considered the bend of the beam with the hing fixing edges by central concentrated force. It was elucidated, that in case of relatively thin beams the theory of Kirchhoff give good results for crooks and stresses on some distance from the points of putting the concentrated forces. It was defined the zones of great concentration of tangent stresses in the across sections of the strip near the lines where concentratedforces had effect. Stress components exceed more than several times the stress components, which were obtained by the beam's theory in the zones.

Key Words: bend, elastic strip, stress, displacement, beam.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Як відомо [1], використання прикладних теорій згину тонких пластин, балок та оболонок, які базуються на певних фізичних гіпотезах, призводить до значних похибок при визначенні напружено-деформованого стану вказаних тіл поблизу їх меж та в околі концентраторів напружень.

З метою визначення меж застосування теорії Кірхгофа згину балок та уточнення отриманих за цією теорією результатів нижче розглядається задача про згин балки, яка шарнірно опирається своїми краями на дві опори, центральною зосередженою нормальною силою. Ця задача еквівалентна задачі циліндричного згину смугової шарнірно опертої пластини рівномірно розподіленими уздовж лінії симетрії пластини поперечними силами. Порівнюються два розв'язки: точний розв'язок рівнянь теорії пружності для пружної смуги, тобто для пластини, яка знаходиться у стані плоскої деформації, та наближений розв'язок за теорією балок Кірхгофа з використанням гіпотези прямої нормалі.

Підхід, який полягає в комбінуванні розв'язку рівнянь теорії пружності в околі зосередженої нормальної сили (задачі Фламана для півплощини [2]) та розв'язку за теорією Кірхгофа поза вказаним околом, розвинуто в роботах [3, 4].

Постановка задачі

Пружна смуга, яка займає область $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le h$ і має пружні характеристики G і ν (G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона), знаходиться у стані плоскої деформації. Смуга згинається трьома зосередженими нормальними силами: сила P прикладена до верхньої грані $y=h$ смуги у точці $x=0$, сили $P/2$ – до нижньої грані $y=-h$ у точках $x=a$, $x=-a$.

Відповідна крайова задача для смуги складається із двох рівнянь рівноваги Ламе відносно компонент u_x, u_y вектора переміщень [2]:

$$2(1-\nu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+(1-2\nu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+(1-2\nu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+2(1-\nu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

і крайових умов відносно нормальних та дотичних напружень

$$\sigma_y\big|_{y=h}=-P\delta(x),$$

$$\sigma_y\big|_{y=-h}=-\frac{P}{2}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right],$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=\pm h}=0 \quad (-\infty<x<\infty), \qquad (2)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Розв'язання крайової задачі

Для розв'язання крайової задачі (1), (2) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за змінною x. Відносно трансформант переміщень

$$\tilde{u}_x=\int_{-\infty}^{\infty}u_x e^{ipx}dx,\quad \tilde{u}_y=\int_{-\infty}^{\infty}u_y e^{ipx}dx \qquad (3)$$

із (1) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$(1-2\nu)\frac{d^2\tilde{u}_x}{dy^2}-2(1-\nu)p^2\tilde{u}_x-ip\frac{d\tilde{u}_y}{dy}=0,$$

$$-ip\frac{d\tilde{u}_x}{dy}+2(1-\nu)\frac{d^2\tilde{u}_y}{dy^2}-(1-2\nu)p^2\tilde{u}_y=0. \qquad (4)$$

Увівши розв'язувальну функцію $\phi(y)$ за допомогою рівностей

$$\tilde{u}_x=2(1-\nu)\phi''(y)-(1-2\nu)p^2\phi(y),$$

$$\tilde{u}_y(y)=ip\phi'(y) \qquad (5)$$

так, щоб задовольнити тотожно друге рівняння (4), із першого рівняння (4) отримаємо диференціальне рівняння

$$\phi^{IV}(y)-p^2\phi''(y)+p^4\phi(y)=0, \qquad (6)$$

загальним розв'язком якого є функція

$$\phi(y)=A_0\,\mathrm{ch}\,py+B_0\,\mathrm{sh}\,py+C_0 y\,\mathrm{ch}\,py+D_0 y\,\mathrm{sh}\,py \qquad (7)$$

з довільними сталими A_0, B_0, C_0, D_0.

Із (5), (7) знаходимо

$$\tilde{u}_x=A\,\mathrm{ch}\,py+B\,\mathrm{sh}\,py+C\left[(3-4\nu)p^{-1}\mathrm{sh}\,py+y\,\mathrm{ch}\,py\right]+$$
$$+D\left[(3-4\nu)p^{-1}\mathrm{ch}\,py+y\,\mathrm{sh}\,py\right], \qquad (8)$$

$$-i\tilde{u}_y=A\,\mathrm{sh}\,py+B\,\mathrm{ch}\,py+Cy\,\mathrm{sh}\,py+Dy\,\mathrm{ch}\,py,$$

$$A=(A_0p+D_0)p,\; B=(B_0p+C_0)p,\; C=C_0p^2,\; D=D_0p^2.$$

Трансформанти напружень дістаємо із (8) за допомогою закону Гука і співвідношень Коші [2]:

$$i(2G)^{-1}\tilde{\sigma}_x=Ap\,\mathrm{ch}\,py+Bp\,\mathrm{sh}\,py+C\left[(3-2\nu)\mathrm{sh}\,py+\right.$$
$$\left.+py\,\mathrm{ch}\,py\right]+D\left[(3-2\nu)\mathrm{ch}\,py+py\,\mathrm{sh}\,py\right],$$

$$-i(2G)^{-1}\tilde{\sigma}_y=Ap\,\mathrm{ch}\,py+Bp\,\mathrm{sh}\,py+C\left[(1-2\nu)\mathrm{sh}\,py+\right.$$
$$\left.+py\,\mathrm{ch}\,py\right]+D\left[(1-2\nu)\mathrm{ch}\,py+py\,\mathrm{sh}\,py\right],$$

$$(2G)^{-1}\tilde{\tau}_{xy}=Ap\,\mathrm{sh}\,py+Bp\,\mathrm{ch}\,py+C\left[2(1-\nu)\mathrm{ch}\,py+\right.$$
$$\left.+py\,\mathrm{sh}\,py\right]+D\left[2(1-\nu)\mathrm{sh}\,py+py\,\mathrm{ch}\,py\right]. \qquad (9)$$

Крайові умови (2) відносно трансформант напружень набувають вигляду

$$\tilde{\sigma}_y\big|_{y=h}=-\frac{P}{2G},\quad \tilde{\sigma}_y\big|_{y=-h}=-\frac{P}{2G}\cos ap,$$

$$\tilde{\tau}_{xy}\big|_{y=\pm h}=0. \qquad (10)$$

Задовольнивши виразами (9) систему рівностей (10), отримаємо

$$A=\frac{iP}{G}\frac{2(1-\nu)\mathrm{sh}\,ph+ph\,\mathrm{ch}\,ph}{p(\mathrm{sh}\,2ph+2ph)}\cos^2 ap,$$

$$B=\frac{iP}{G}\frac{2(1-\nu)\mathrm{ch}\,ph+ph\,\mathrm{sh}\,ph}{p(\mathrm{sh}\,2ph-2ph)}\sin^2 ap, \qquad (11)$$

$$C=-\frac{iP}{G}\frac{\mathrm{ch}\,ph\sin^2 ap}{\mathrm{sh}\,2ph-2ph},\quad D=-\frac{iP}{G}\frac{\mathrm{sh}\,ph\cos^2 ap}{\mathrm{sh}\,2ph+2ph}.$$

Оберненим перетворенням Фур'є із (8), (9), (11) знаходимо компоненти переміщень та напружень у пружній смузі, що відповідають розв'язку крайової задачі (1), (2). Зокрема, вертикальні переміщення на середній лінії смуги набудуть вигляду

$$u_y\big|_{y=0}=-\frac{P}{\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\mathrm{ch}\tau+\tau\mathrm{sh}\tau}{\tau(\mathrm{sh}2\tau-2\tau)}\sin^2\frac{a\tau}{2h}e^{-ix\tau/h}d\tau. \quad (12)$$

В останньому виразі підінтегральна функція має порядок величини τ^{-2} при $\tau\to 0$, а інтеграл є розбіжним і його слід розуміти в узагальненому сенсі. З використанням узагальненого значення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\tau/h}}{\tau^2}d\tau=-\pi\frac{|x|}{h}, \qquad (13)$$

яке можна отримати подвійним інтегруванням за x інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau/h} d\tau = 2\pi h \delta(x)\,, \qquad (14)$$

із (12) отримаємо

$$u_y\big|_{y=0} = 3(1-\nu)\frac{Pa^2}{8Gh^3}|x| + \frac{2P}{\pi G}\times \qquad (15)$$
$$\times\int_0^{\infty}\left(\frac{2(1-\nu)\operatorname{ch}\tau + \tau\operatorname{sh}\tau}{\tau(2\tau - \operatorname{sh}2\tau)}\sin^2\frac{a\tau}{2h} + \frac{3(1-\nu)a^2}{8h^2\tau^2}\right)\cos\frac{x\tau}{h}d\tau\,.$$

Наближений розв'язок за теорією Кірхгофа

У теорії Кірхгофа циліндричного згину тонких пластин переміщення u_y наближено дорівнюють функції прогину $-w(x)$ (з протилежним знаком), яка вважається незмінною по товщині пластини і задовольняє диференціальне рівняння

$$w^{IV}(x) = \frac{P}{D}\delta(x) \quad \left(D = \frac{4}{3(1-\nu)}Gh^3,\ -a < x < a\right) \qquad (16)$$

та крайові умови шарнірного опирання

$$w(\pm a) = 0\,, \quad w''(\pm a) = 0\,. \qquad (17)$$

Розв'язком крайової задачі (16), (17) є функція

$$w(x) = \frac{P}{12D}\left(|x|^3 - 3ax^2 + 2a^3\right), \qquad (18)$$

а згинальний момент і узагальнена перерізувальна сила виражаються через прогин так:

$$M_x = -D\frac{d^2w}{dx^2}\,, \quad Q_x = -D\frac{d^3w}{dx^3}\,. \qquad (19)$$

Крім того, горизонтальні переміщення та напруження приймаються такими:

$$u_x = -y\frac{dw}{dx}\,, \quad \sigma_x = \frac{3y}{2h^3}M_x\,, \quad \sigma_y = 0\,,$$
$$\tau_{xy} = \frac{3}{4h^3}(h^2 - y^2)Q_x\,. \qquad (20)$$

Результати обчислень

Безрозмірні вертикальні переміщення $\overline{u}_y = \frac{Gh^3}{Pa^3}\left(u_y\big|_{y=0} - u_y\big|_{y=0,\,x=a}\right)$ середньої лінії смуги у точці $x = 0$, які обчислені за формулою (15) при $\nu = 0{,}3$, подано у табл. 1 для різних значень відносної ширини смуги h/a. Із зменшенням останнього параметра абсолютні значення $|\overline{u}_y|$ наближаються до значення 0,0875 безрозмірного прогину $\overline{w} = \frac{Gh^3}{Pa^3}w(x)$ у центрі балки ($x = 0$), розрахованого за формулою (18), а для $\overline{a} = a/h = 8$ відрізняються від нього на 5 %. Графічно переміщення $\overline{u}_y$ (криві 1, 2, 3 для $\overline{a} = 2, 4, 8$ відповідно) і прогин $-\overline{w}$ (пунктир) показано на рис. 1.

Таблиця 1

a/h	$-\overline{u}_y$ ($x=0$)	a/h	$-\overline{u}_y$ ($x=0$)
2	0,1416	12	0,0896
3	0,1141	15	0,0889
4	0,1033	20	0,0883
6	0,0950	50	0,0877
8	0,0919	80	0,0876
10	0,0904	100	0,0875

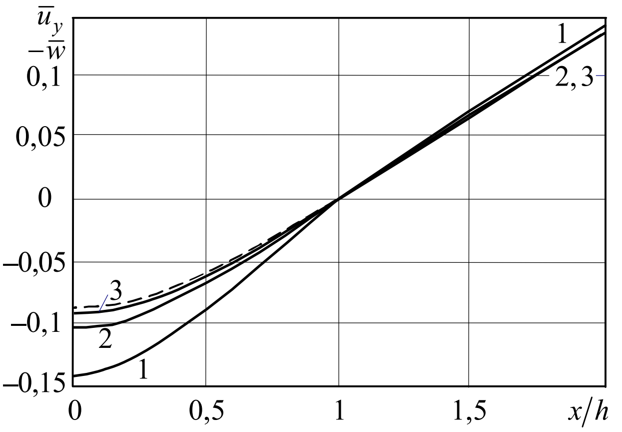

Рис. 1

Всі інші розрахунки проведено для значення $\overline{a} = 8$ і коефіцієнта Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Розподіли безрозмірних нормальних напружень $\overline{\sigma}_x = (h/P)\sigma_x$ уздовж поперечних перерізів смуги $x = 0{,}25a;\ 0{,}5a;\ 0{,}7a;\ a$ зображені кривими 1, 2, 3, 4 відповідно на рис. 2. Пунктирні лінії відповідають теорії Кірхгофа. Поодаль від ліній дії сил теорія Кірхгофа дає задовільні результати (розподіли 2, 3), а поблизу від однієї із вказаних ліній (розподіл 1) або безпосередньо на лінії $x = a$ дії сили $P/2$ (розподіл 4) напруження σ_x за точним розв'язком мають нелінійний розподіл, особливо в околі точки прикладання сили.

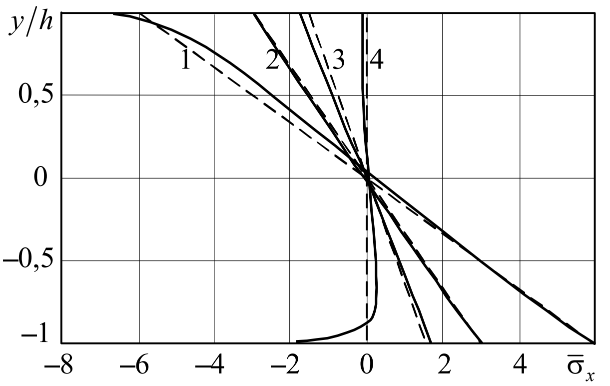

Рис. 2

На рис. 3 показано розподіли безрозмірних дотичних напружень $\overline{\tau}_{xy} = (h/P)\tau_{xy}$ по ширині смуги вздовж прямих $x = 0{,}9a; 0{,}95a; 0{,}97a; a$ (криві 1–4). За теорією Кірхгофа усі ці розподіли збігаються між собою і показані пунктирною лінією. Вони практично збігаються з розподілами дотичних напружень за точним розв'язком на певній відстані від ліній дій сил ($0{,}1a < |x| < 0{,}9a$).

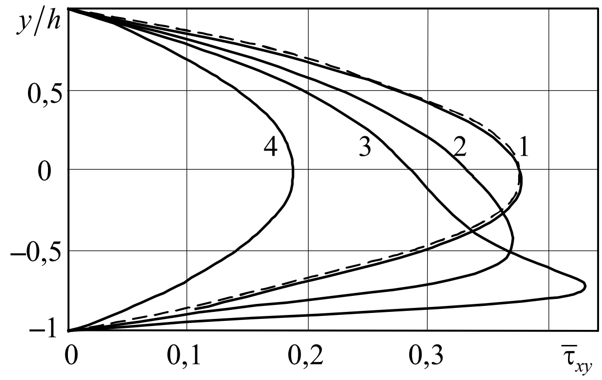

Рис. 3

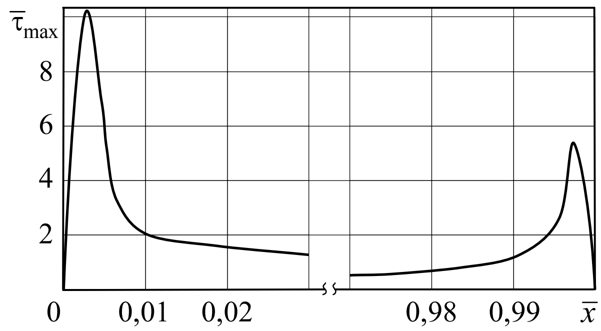

Рис. 4

У перерізах смуги, близьких до лінії $x = a$ дії сили максимум безрозмірних дотичних напружень $\overline{\tau}_{\max}$ помітно зростає, а точка, у якій досягається цей максимум зсувається із середньої лінії смуги і підходить близько до межі смуги і точки прикладання сили. Як показано на рис. 4, значення $\overline{\tau}_{\max}$ у поперечних перерізах смуги поблизу ліній $x = 0$, $x = a$ дій сил перевищують відповідне значення за теорією Кірхгофа ($\overline{\tau}_{\max} = 0{,}37$) у декілька разів.

На рис. 5 показано вигляд нормалей $x = 0{,}125a$; $0{,}25a; 0{,}5a; 0{,}75a$ (криві 1–4) після деформації пластини. Пунктирні лінії відповідають теорії Кірхгофа. Тут $\tilde{u}_x = k(G/P)u_x$, $\tilde{u}_y = y/h + k(G/P)\times$ $\times(u_y - u_y|_{y=0})$, $k = 0{,}1149$. Незважаючи на те, що

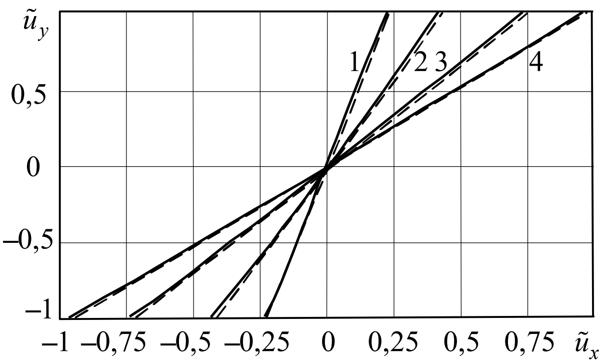

Рис. 5

за точним розв'язком нормаль пластини поза малими околами точок прикладання сил залишається майже прямою, все ж таки використання теорії Кірхгофа може давати значні похибки при обчисленні напружень та переміщень у пластині.

Список використаних джерел

1. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
3. *Мазур С. Г.* Уточненная теория изгиба тонких пластин сосредоточенными силами / С. Г. Мазур // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 4. – С. 86-89.
4. *Моргунов М. О.* Границі застосування теорії Кірхгофа при згині пружного шару зосередженими силами / М. О. Моргунов // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2000. – № 5. – С. 72-80.

References

1. TIMOSHENKO, S. and Voinovskiy-Kriger, S. (1966) *Plastinki I obolochki.* Moskva: Nauka.
2. TIMOSHENKO, S. and Gud'jer, D. (1979) *Teorija uprugosti.* Moskva: Nauka.
3. MAZUR, S. G. (1979) Utochnennaja teorija izgiba tonkih plastin sosredotochennymi silami. *Prikladnaja mehanika.* **15**, N 4. P. 86-89.
4. MORGUNOV, M. O. (2000) Granytsi zastosuvannja teoriji Kirhgofa pri zgyni pruzhnogo sharu zoseredzhenymy sylamy. *Visnyk Kyjyvs'kogo universytetu. Matematika. Mehanika.* N 5. P. 72-80.

Надійшла до редколегії 08.06.15