УДК 004.658.2

Буй Д. Б., д.ф.-м.н., проф.,
Пузікова А. В., аспірантка.

Математична теорія нормалізації: нормальні форми 2-4 порядків

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: anna_inf@mail.ru

D. B. Buy, the doctor of physical and mathematical sciences, the professor,
A. V. Puzikova, postgraduate.

Mathematical theory of normalization: 2-4 normal forms

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: anna_inf@mail.ru

У статті викладено фрагмент математичної теорії нормалізації: наводяться строгі означення 2-4 нормальних форм (НФ) для табличних (реляційних) баз даних; визначаються потенційні ключі за умов, коли значення потужностей реляційної схеми і домена знаходяться у межах $|R|\le 2$ *або* $|D|\le 1$ *(розглядаються умови, коли аксіоматика Армстронга не є повною); вказуються достатні умови для знаходження у 2-4 НФ для спеціальних випадків; встановлюються логічні зв'язки між сформульованими означеннями 2-4 НФ.*
Ключові слова: табличні бази даних, нормальні форми.

This paper presents a fragment of normalization theory: rigorous definitions of Second Normal Form, Third Normal Form, Boyce-Codd Normal Form and Fourth Normal Form in table (relation) databases are given; finding out the meanings of candidate keys, provided that the values of cardinalities of the scheme R *(finite set of attributes) and the universal domain* D *(the set, from which attributes take on values in interpretations) lie within* $|R|\le 2$ *or* $|D|\le 1$ *(considered conditions when Armstrong's axiomatic is not complete). Sufficient conditions which ensure that the table being in Second Normal Form, Third Normal Form, Boyce-Codd Normal Form and Fourth Normal Form for special cases are specified. Logical connections between the determined definitions of normal forms are established and it is shown that those definitions are satisfied the principle of "inclusion" higher normal forms in lower normal forms.*
Key Words: table databases, normal forms.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Різні підходи до понятійного апарату теорії нормалізації в реляційних базах даних призвели до різноманітності у визначеннях нормальних форм (НФ) в таких базах даних [1].

Метою роботи є побудова фрагменту математичної теорії нормалізації (стосовно 2-4 НФ для табличних баз даних), який би відповідав вимогам строгості для математичних теорій.

Всі неозначувані тут поняття та позначення використовуються в розумінні монографії [2]; зокрема, $t_{\varnothing}$ позначає порожню таблицю, яка не містить рядків і якій можна приписати довільну схему; t_{ε} позначає таблицю порожньої схеми $\varnothing$, яка містить тільки рядок ε також порожньої схеми: $t_{\varepsilon} \overset{def}{=} \{\varepsilon\}$.

Нехай t – таблиця, A, B, C – атрибути таблиці t, R – схема (довільна зафіксована скінченна множина атрибутів), X, Y, Z – підмножини схеми R, D – універсальний домен.

Суперключі, потенційні ключі, первинні та непервинні атрибути, повні та транзитивні ФЗ

Нагадаймо, що на таблиці t виконується, за означенням, функціональна залежність (ФЗ) $X \to Y$, якщо для двох довільних рядків s_1, s_2 таблиці t, які збігаються на множині атрибутів X, має місце їх рівність і на множині атрибутів Y [2]:

$$(X \to Y)(t) = true \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1, s_2 \in t\left(s_1|X = s_2|X \Rightarrow s_1|Y = s_2|Y\right).$$

Нехай F – множина ФЗ. Нагадаймо також, що таблиця t схеми R є *моделлю* множини ФЗ F, якщо кожна ФЗ $X \to Y \in F$ виконується на таблиці t:

$$t \text{ модель } F \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall (X \to Y)(X \to Y \in F \Rightarrow (X \to Y)(t) = true) \text{ [3].}$$

ФЗ $X \to Y$ поставимо у відповідність множину ФЗ:

$$\Phi_{X \to Y} = \{X' \to Y \mid X' \subset X \wedge Y \not\subseteq X'\}.$$

Тобто, множина $\Phi_{X \to Y}$ містить усі нетривіальні ФЗ, такі, що їх права частина співпадає з множиною Y, а ліва частина є власною підмножиною множини X.

Очевидно, що $\Phi_{X \to Y} = \{X' \to Y \mid X' \in \in 2^X \setminus \{X\}\}$ за умови $X \subseteq Y$; $\Phi_{X \to Y} = \{X' \to Y \mid X' \in \{U \bigcup V \mid U \in 2^{X \setminus Y} \setminus \{X\}, V \in 2^Y \setminus \{Y\}\}\}$, за умови $Y \subseteq X$ або множини атрибутів X, Y непорівнювані відносно теоретико-множинного включення $\subseteq$. Вище 2^Y – булеан множини Y.

Означення 1. ФЗ $X \to Y$ називається *повною* (відносно множини ФЗ F), якщо вона виконується на довільній таблиці t, яка є моделлю множини F, а жодна ФЗ з множини $\Phi_{X \to Y}$ не виконується на таблиці t:

$$X \to Y \text{ – } \textit{повна} \text{ (відносно множини ФЗ } F\text{)} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall t (t \text{ – модель } F \Rightarrow (X \to Y)(t) = true \wedge$$
$$\wedge \forall \psi (\psi \in \Phi_{X \to Y} \Rightarrow \psi(t) = false)). \ \square$$

Враховуючи, що відношення синтаксичного і семантичного слідувань для аксіоматики ФЗ збігаються за умови $|D| \geq 2$ (див. критерій повноти аксіоматики Армстронга [4]), для вказаного випадку можна використовувати синтаксичну форму означення 1:

$$X \to Y \text{ – } \textit{повна} \text{ (відносно множини ФЗ } F\text{)} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow} X \to Y \in [F] \wedge \forall \psi (\psi \in \Phi_{X \to Y} \Rightarrow \psi \notin [F]),$$

де $[F]$ – синтаксичне замикання множини ФЗ F[1].

Означення 2. Множина атрибутів $W \subseteq R$ називається *суперключем* (відносно множини ФЗ F), якщо ФЗ $W \to R$ виконується на довільній таблиці t, яка є моделлю множини F:

$$W \text{ – } \textit{суперключ} \text{ (відносно множини ФЗ } F\text{)} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall t (t \text{ – модель } F \Rightarrow (W \to R)(t) = true). \ \square$$

[1] Див., наприклад, [3].

Таким чином, наприклад, вся множина атрибутів схеми R є суперключем, оскільки ФЗ $R \to R$ є тривіальною і, значить, виконується на довільній таблиці.

Як і вище для випадку $|D| \geq 2$ можна використовувати синтаксичну форму означення 2:

$$W \text{ – } \textit{суперключ} \text{ (відносно множини ФЗ } F\text{)} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Leftrightarrow} W \to R \in [F].$$

Означення 3. Множина атрибутів $K \subseteq R$ називається *потенційним ключем* (відносно множини ФЗ F), якщо K є суперключем і ФЗ $K \to R$ є повною. □

Змістовно кажучи, потенційний ключ – це суперключ, ліву частину якого не можна зменшити, не втративши властивість бути суперключем.

Лема 1 (про існування потенційного ключа). Для довільної множини ФЗ F, заданої над схемою R, існує не менше одного потенційного ключа. □

Доведення. Дійсно, якщо тривіальна ФЗ $R \to R$ є повною, то множина атрибутів R є шуканим потенційним ключем; інакше існує така власна підмножина $X^1 \subset R$, що на довільній моделі множини ФЗ F виконується ФЗ $X^1 \to R$. Якщо ФЗ $X^1 \to R$ є повною, то множина атрибутів X^1 є потенційним ключем, інакше існує така власна підмножина $X^2 \subset X^1 \subset R$, що $(X^2 \to R)(t) = true$, де t – довільна модель множини ФЗ F. Продовжуючи таким чином і враховуючи, що множина атрибутів R містить скінченну кількість атрибутів, на k-ому кроці (для певного $k \leq |R|$) знайдеться така множина атрибутів X^k, що $(X^k \to R)(t) = true$ і ФЗ $X^k \to R$ є повною. За означенням 3 множина атрибутів X^k і є шуканим потенційним ключем. □

Задамо на множині $2^R \times 2^R$ (по суті, на множині всіх ФЗ, бо ФЗ є парою множин атрибутів) наступне бінарне відношення. Скажемо, що ФЗ $X' \to Y'$ і $X \to Y$ знаходяться у відношенні $\trianglelefteq$, якщо $X' \subseteq X$ та $Y' = Y$:

$$X' \to Y' \trianglelefteq X \to Y \overset{def}{\Leftrightarrow} X' \subseteq X \wedge Y' = Y.$$

Очевидно, що відношення $\trianglelefteq$ на множині $2^R \times 2^R$ (тобто на множині всіх ФЗ) задає частковий порядок. Дійсно, відношення $\trianglelefteq$ є:

1) рефлексивним, оскільки $X \to Y \trianglelefteq X \to Y \Leftrightarrow X \subseteq X$;

2) антисиметричним, оскільки з того, що $X' \to Y \trianglelefteq X \to Y$ і $X \to Y \trianglelefteq X' \to Y$ відповідно слідують включення $X' \subseteq X$ і $X \subseteq X'$, звідки $X' = X$;

3) транзитивним, оскільки з того, що $X'' \to Y \trianglelefteq X' \to Y$ і $X' \to Y \trianglelefteq X \to Y$ відповідно слідують включення $X'' \subseteq X'$ і $X' \subseteq X$, звідки $X'' \subseteq X$, а отже, $X'' \to Y \trianglelefteq X \to Y$.

Розглянемо частково впорядковану множину $\left\langle \Phi_{R\to R} \bigcup \{R \to R\} \bigcap [F], \trianglelefteq \right\rangle$, де, як і раніше, $\Phi_{R\to R} = \{X \to R \mid X \subset R\}$. Тоді її кожний мінімальний елемент вигляду $X \to R$ є повною ФЗ і задає потенційний ключ X. Наявність декількох мінімальних елементів визначає декілька потенційних ключів. По суті це ще одне визначення потенційного ключа.

Значення потенційних ключів при деяких значеннях потужностей множин R та D вказані у табл. 1. Дана таблиця містить три рядки та чотири стовпчики. Комірки позначаються парами, перша компонента – номер рядка, друга – номер стовпчика.

Таблиця 1

Потенційні ключі при певних значеннях потужностей множин R та D

	$\|D\|$ \\ $\|R\|$	1: $\|R\|=0$	2: $\|R\|=1$, $R=\{A\}$	3: $\|R\|=2$, $R=\{A,B\}$	4: $\|R\|>2$
1	$\|D\|=0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\|D\|=1$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
3	$\|D\|\geq 2$	$\varnothing$	Єдиний ключ: $\{A\}$	Єдиний ключ: $\{A\}$ або $\{B\}$ або $\{A,B\}$. Два ключі: $\{A\}$ і $\{B\}$	Ключі визначаються, виходячи з множини ФЗ F

Лема 2. Заповнення табл. 1 коректне. □

Доведення. Доведення проводиться розглядом кожного з випадків.

а) $|R|=0$ (випадки (1,1), (2,1), (3,1), тобто перший стовпчик); тоді, незалежно від потужності домена, $t_{\varnothing}$, t_{ε} – всі можливі таблиці в інтерпретації, бо атрибутів в даному випадку немає. Єдиною можливою ФЗ є $\varnothing \to \varnothing$, яка є тривіальною, звідси $\varnothing$ – потенційний ключ; ▫

б) $|R|\geq 1$, $|D|\leq 1$ (випадки (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), тобто комірки перших двох рядків, окрім комірок першого стовпчика); в інтерпретаціях розглядаються не більше ніж однорядкові таблиці; оскільки ФЗ вигляду $\varnothing \to R$ виконується на порожній та однорядковій таблицях (леми 1, 4 з [4]) з очевидних включень $\varnothing \subset \{A\} \subseteq R$, де A – довільний (або єдиний) атрибут схеми R, маємо, що єдиним потенційним ключем є порожня множина $\varnothing$; ▫

в) $|R|=1$, $|D|\geq 2$ (випадок (3,2)); в інтерпретаціях не більше ніж одноатрибутні таблиці; нехай для визначеності $R=\{A\}$. Оскільки ФЗ $\varnothing \to \{A\}$ – не виконується на таблиці з двох рядків, то таблиця має єдиний потенційний ключ $\{A\}$ (ФЗ $\{A\} \to \{A\}$ є тривіальною); ▫

г) $|R|=2$ і $|D|\geq 2$ (випадок (3,3)); нехай для визначеності $R=\{A,B\}$ і $d_1, d_2 \in D$, де d_1, d_2 – різні. Оскільки ФЗ вигляду $\varnothing \to R$ не виконується на довільній дворядковій таблиці та множини $\{A\}$, $\{A,B\}$, ($\{B\}$, $\{A,B\}$) не можуть бути одночасно потенційними ключами з огляду на мінімальність потенційних ключів, то множина потенційних ключів може мати один ключ: $\{A\}$ або $\{B\}$ або $\{A,B\}$, чи два: $\{A\}$ та $\{B\}$. Множина ключів залежить від множини ФЗ F; точніше кажучи: якщо $F=\varnothing$, то єдиний потенційний ключ $\{A,B\}$; якщо $\{A\} \to \{A,B\} \in F$ ($\{B\} \to \{A,B\} \in F$), то єдиний потенційний ключ $\{A\}$ (відповідно $\{B\}$); якщо $\{\{A\} \to \{A,B\}, \{B\} \to \{A,B\}\} \subseteq F$, то маємо два потенційних ключа $\{A\}$ і $\{B\}$; ▫

д) $|R|\geq 2$ і $|D|\geq 2$ (випадок (3,4)); множина потенційних ключів цілком визначається множиною ФЗ F, тобто в цьому випадку нічого не можна сказати про потенційні ключі. ▫□

Наслідок 1. Якщо $|R|=0$ або $|D|\leq 1$, то потенційним ключем буде тільки порожня множина $\varnothing$. □

Доведення випливає з заповнення табл. 1. □

Лема 3. Якщо $|R|>0$ і $|D|\geq 2$, то ФЗ виду $\{A\}\to Y$, де $A\in R$, $\varnothing\neq Y\subseteq R$ є повною за умови $\{A\}\to Y\in[F]$ (тобто виконання ФЗ $\{A\}\to Y$ на довільній моделі множини ФЗ F). □

Для доведення достатньо врахувати той факт, що ФЗ вигляду $\varnothing\to Y$, де $Y\subseteq R$ і $Y\neq\varnothing$ не виконується на довільній дворядковій таблиці. □

Означення 4. Атрибут $A\in R$ називається *транзитивно залежним* від множини атрибутів $X\subset R$ (відносно множини ФЗ F), якщо існує така множина атрибутів $Y\subset R$, що $A\notin X\bigcup Y$ і для довільної таблиці t, яка є моделлю множини ФЗ F, виконується $(X\to Y)(t)=true$, $(Y\to X)(t)=false$, $(Y\to\{A\})(t)=true$[2]:

$$\exists Y(Y\subset R\wedge A\in R\setminus(X\bigcup Y)\wedge\forall t(t-\text{модель } F\Rightarrow(X\to Y)(t)=true\wedge$$
$$\wedge(Y\to X)(t)=false\wedge(Y\to\{A\})(t)=true).\ \square$$

Для випадку $|D|\geq 2$ запишемо синтаксичну форму означення 4:

$$\text{атрибут } A \text{ транзитивно залежний від множини атрибутів } X\subset R \text{ (відносно множини ФЗ } F) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists Y(Y\subset R\wedge A\in R\setminus(X\bigcup Y)\wedge$$
$$\wedge X\to Y\in[F]\wedge Y\to X\notin[F]\wedge Y\to\{A\}\in[F]).$$

Лема 4. Якщо K – потенційний ключ (відносно множини ФЗ F) і для деякого атрибута $A\in R$ ФЗ $K\to\{A\}$ не є повною, то атрибут A є транзитивно залежним від множини атрибутів K.□

Доведення. Розглянемо довільну таблицю t, яка є моделлю множини ФЗ F Нехай ФЗ $K\to\{A\}$ не є повною, оскільки ФЗ $K\to\{A\}$, очевидно, виконується на таблиці t (з огляду на те, що K – ключ), тоді існує така власна підмножина $K'\subset K$, $\{A\}\not\subset K'$ (тобто $A\notin K'$), що виконуються ФЗ $K'\to\{A\}$ на таблиці t; але оскільки K – потенційний ключ, то ФЗ $K'\to K$ не виконується на таблиці t з огляду на мінімальність потенційного ключа K. Таким чином, з виконання ФЗ $K\to K'$, $K'\to\{A\}$ і невиконання ФЗ $K'\to K$ на таблиці t (з огляду на її довільність) за означенням 4 атрибут A є транзитивно залежним від потенційного ключа K. □

Означення 5. Атрибут $A\in R$ називається *первинним* (відносно множини ФЗ F), якщо A міститься в якому-небудь потенційному ключі[3]:

$$A-\text{первинний}\overset{def}{\Leftrightarrow} A\in\bigcup_{K\in\Delta}K,$$

де $\Delta=\Delta(F)$ – сім'я всіх потенційних ключів (відносно множини ФЗ F). □

Означення 6. Атрибут $A\in R$ називається *непервинним* (відносно множини ФЗ F), якщо A не міститься в жодному з потенційних ключів:

$$A-\text{непервинний}\overset{def}{\Leftrightarrow} A\in R\setminus\bigcup_{K\in\Delta}K,$$

де Δ – як і раніше, сім'я всіх потенційних ключів. □

Друга нормальна форма

Як і раніше фіксуємо схему R та множину ФЗ F.

Означення 7. Скажемо, що таблиця $t(R)$ знаходиться у *другій НФ (2НФ)*, якщо, по-перше, таблиця $t(R)$ знаходиться у першій НФ (1НФ[4]), по-друге, таблиця t є моделлю множини ФЗ F та, по-третє, кожний непервинний атрибут характеризується повною ФЗ від кожного потенційного ключа, тобто:

$$\forall A\forall K(K\in\Delta\wedge A\in R\setminus\bigcup_{\widehat{K}\in\Delta}\widehat{K}\Rightarrow K\to\{A\}-\text{повна ФЗ}).\ \square \qquad (1)$$

З означення 7 випливає, що якщо множина непервинних атрибутів порожня, то умова (1) цього означення виконується автоматично (відповідна імплікація тривіально істинна, оскільки умова $A\in R\setminus\bigcup_{\widehat{K}\in\Delta}\widehat{K}$ хибна).

Твердження 1 (достатні умови для знаходження у 2НФ для спеціальних випадків). Таблиця t знаходиться у 2НФ, якщо $|R|\leq 2$ або $|D|\leq 1$. □

Доведення. Використовуючи результати з табл. 1 розглянемо усі можливі випадки для умов

[2] Означення наведено відповідно до [5]. Дрібас у монографії [6] в означенні транзитивної ФЗ надає додаткову умову: $Y\not\subset X$. Тоді подальша лема 4 не є чинною, а в наведеному нижче означенні 3НФ потр*ібно вимагати, щоб таблиця задовольняла умовам 2НФ.

[3] Означення 5-6 наводяться відповідно до [5-7].

[4] Оскільки означення 1НФ не підлягає повній формалізації, пропонуємо використовувати один з його варіантів згідно [7], адаптований до термінології даної статті: «таблиця знаходиться у 1НФ тоді і тільки тоді, коли кожний її рядок містить тільки одне значення для кожного атрибуту».

$|R| \leq 2$ (перші три стовпчики) або $|D| \leq 1$ (перші два рядки):

а) $|R| = 0$ або $|D| \leq 1$ (комірки (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1)); тобто два перших рядка та комірка (3,1); згідно з табл. 1 єдиним потенційним ключем є $\varnothing$, тобто $\Delta = \{\varnothing\}$, звідки всі атрибути схеми R є непервинними; оскільки в цьому випадку розглядаються не більше ніж однорядкові таблиці, то, очевидно, що довільна така таблиця буде моделлю множини ФЗ F; таким чином, залишається перевірити виконання умови (1), яка в даному випадку приймає вигляд:

$$\forall A (A \in R \Rightarrow \varnothing \to \{A\} \text{ – повна ФЗ}),$$

та, знову ж виконується очевидно; ▫

б) $|D| \geq 2$ і $|R| = 1$ (комірка (3,2)); нехай для визначеності $R = \{A\}$ (як в табл. 1), тоді множина $\{A\}$ є потенційним ключем (див. табл. 1), а оскільки схема взагалі не містить непервинних атрибутів, то таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 2НФ; ▫

в) $|D| \geq 2$ і $|R| = 2$: (комірка (3,3)); нехай для визначеності $R = \{A, B\}$ (як в табл. 1). Нехай потенційним ключем є одноелементна множина, наприклад, $\{A\}$. Тоді ФЗ $\{A\} \to \{B\}$, де $\{B\}$ – єдиний непервинний атрибут, є повною згідно леми 3. Отже, таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 2НФ. ▫

Нехай тепер множиною потенційних ключів є або $\Delta = \{\{A\}, \{B\}\}$ або $\Delta = \{\{A, B\}\}$; тоді схема взагалі не містить непервинних атрибутів, а отже, умова 2НФ (1) для таблиці t, яка є моделлю множини ФЗ F, виконується автоматично. ▫□

Змістовна інтерпретація твердження 1: не більше ніж двоатрибутні таблиці або не більше ніж однорядкові таблиці знаходяться у 2НФ (за умови, що вони є моделями множини ФЗ F).

В наступній лемі Δ – сім'я всіх потенційних ключів, як і раніше.

Лема 5 (достатні умови для знаходження у 2НФ). Таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 2НФ, якщо виконується одна з наступних умов:

1) всі потенційні ключі одноелементні;

2) $\bigcup_{K \in \Delta} K = R$, тобто сім'я потенційних ключів є покриттям схеми R (еквівалентно: множина непервинних атрибутів порожня)[5]. □

[5] Формулювання умов наводиться згідно [8].

Доведення. Доведемо перше твердження. Оскільки при значеннях потужностей $|D| \leq 1$ або $|R| = 0$ потужність потенційного ключа нульова (наслідок 1), нам потрібно розглянути випадок, коли $|D| \geq 2$ і $|R| > 0$. Нехай всі потенційні ключі одноелементні. Згідно з лемою 3 усі непервинні атрибути повністю залежать від кожного потенційного ключа; отже, таблиця t знаходиться у 2НФ.▫

Доведемо друге твердження. Оскільки за умови 2) в формулюванні схема взагалі не містить непервинних атрибутів, то умова 2НФ для таблиці t не порушується. ▫□

Третя нормальна форма

Як і раніше фіксуємо схему R та множину ФЗ F.

Задамо на множині 2^R наступне бінарне відношення. Скажемо, що множини атрибутів $X, Y \subseteq R$ знаходяться у відношенні $\doteqdot$ (відносно множини ФЗ F), якщо $F \models X \to Y$ і $F \models Y \to X$.

Лема 6. Відношення $\doteqdot$ є відношенням еквівалентності. □

Доведення. Дійсно, відношення $\doteqdot$ є:

1) рефлексивним, оскільки $X \doteqdot X \Leftrightarrow F \models X \to X$ (ФЗ $X \to X$ є тривіальною);

2) симетричним, оскільки з того, що $X \doteqdot Y$ випливає $Y \doteqdot X$;

3) транзитивним; покажемо, що виконується імплікація $X \doteqdot Y \wedge Y \doteqdot Z \Rightarrow X \doteqdot Z$. Розглянемо випадки:

а) $|D| \leq 1$ (перші два рядки табл. 1); оскільки на порожній та однорядковій таблицях виконуються довільні ФЗ, то імплікація виконується очевидно;

б) $|R| = 0$ (перший стовпчик табл. 1); єдиною можливою ФЗ є тривіальна ФЗ $\varnothing \to \varnothing$ отже, імплікація виконується тривіально;

в) $|D| \geq 2 \wedge |R| \geq 1$; враховуючи, що для даного випадку відношення синтаксичного слідування ($\vdash$) та семантичного слідування ($\models$) співпадають (див. критерій повноти аксіоматики Армстронга [4]), побудуємо доведення для ФЗ $X \to Z$:

1. $X \to Y$ (за припущенням $X \doteqdot Y$; отже, $F \models X \to Y$, звідси за критерієм повноти аксіоматики Армстронга маємо: $F \vdash X \to Y$);

2. $Y \to Z$ (за припущенням $Y \doteqdot Z$; отже, $F \models Y \to Z$, звідси за критерієм повноти аксіоматики Армстронга маємо: $F \vdash Y \to Z$);

3. $X \to Z$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності).

Отже, $F \mid -X \to Z$, звідси випливає $F \models X \to Z$ (нагадаємо, що $|D| \geq 2$). Аналогічно будується доведення для ФЗ $Z \to X$, тобто, $F \mid -Z \to X$, отже $F \models Z \to X$. Звідси маємо: $X \doteqdot Z$. □

Таким чином, відношення $\doteqdot$ розбиває множину 2^R (булеан схеми R) на класи еквівалентності.

Наслідок 2. За умов $|D| \leq 1$ або $|R| = 0$ усі елементи множини $2^R = \{X \mid X \subseteq R\}$ належать до одного класу еквівалентності. □

Доведення випливає безпосередньо з доведення леми 6. □

Лема 7. Множина суперключів належить до одного класу еквівалентності. □

Доведення. Нехай множина атрибутів K є суперключем (відносно множини ФЗ F), тоді виконується ФЗ $K \to R$, тобто $F \models K \to R$. Враховуючи виконання тривіальної ФЗ $R \to K$ ($K \subseteq R$), тобто $F \models R \to K$, маємо $K \doteqdot R$. □

Позначимо клас еквівалентності суперключів $[R]_{\doteqdot}$, де схема R є представником класу.

Лема 8. Виконується імплікація:

$$\forall A, \forall X (\forall Y (A \in R \setminus (X \bigcup Y) \wedge (Y \to \{A\})(t) = true \Rightarrow X \doteqdot Y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ не є транзитивно залежним від X). □

Доведення проводиться безпосередньо. □

Відомо, що наявність непервинних атрибутів, які є транзитивно залежними від потенційних ключів, приводить до виникнення аномалій (згідно визначення аномалій з [9]). З леми 8 випливає, що для вирішення вказаної проблеми достатньо вимагати, щоб ліві частини усіх нетривіальних ФЗ виду $X \to \{A\}$, де $\{A\}$ – непервинний атрибут, належали до класу $[R]_{\doteqdot}$[6].

Означення 8. Скажемо, що таблиця $t(R)$ знаходиться у *третій НФ (3НФ)*, якщо, по-перше, таблиця $t(R)$ знаходиться у 1НФ, по-друге, таблиця t є моделлю множини ФЗ F та, по-третє, для кожної нетривіальної ФЗ виду $X \to \{A\}$ такої, що $F \models X \to \{A\}$, де $\{A\}$ – непервинний атрибут, множина атрибутів X є суперключем, тобто:

$$\forall X, \forall A \ (X \subset R \wedge A \in R \setminus (\bigcup_{K \in \Delta} K \cup X) \wedge (X \to \{A\})(t) = true \Rightarrow (X \to R)(t) = true). \square \quad (2)$$

З означення 8 випливає, що, якщо множина непервинних атрибутів порожня, то умова (2) цього означення виконується автоматично (відповідна імплікація тривіально істинна). Таким чином, доведена наступна лема.

Лема 9 (достатня умова для знаходження у 3НФ). Таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ якщо $\bigcup_{K \in \Delta} K = R$, тобто сім'я потенційних ключів є покриттям схеми R. □

Твердження 2 (достатні умови для знаходження у 3НФ для спеціальних випадків). Таблиця знаходиться у 3НФ якщо $|R| \leq 2$ або $|D| \leq 1$. □

Доведення. Враховуючи результати з табл. 1 розглянемо усі можливі випадки для умов $|R| \leq 2$ (перші три стовпчики) або $|D| \leq 1$ (перші два рядки):

a) $|R| = 0$ (комірки (1,1), (2,1), (3,1), тобто перший стовпчик); оскільки порожня схема R не має непервинних атрибутів, то умови 3НФ виконуються автоматично (лема 9); ▫

b) $|R| \geq 1$ і $|D| \leq 1$ (комірки (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4); тобто перші два рядки); згідно з табл. 1 єдиним потенційним ключем є $\varnothing$, тобто $\Delta = \{\varnothing\}$, тоді будь-який елемент множини $2^R = \{X \mid X \subseteq R\}$ є суперключем; таким чином, умова (2) виконується для кожної відповідної ФЗ вигляду $X \to \{A\}$; оскільки в цьому випадку розглядаються не більше ніж однорядкові таблиці, то, очевидно, що довільна така таблиця буде моделлю множини ФЗ F і знаходиться у 3НФ; ▫

c) $|R| = 1$, $|D| \geq 2$ (комірка (3,2)); нехай для визначеності $R = \{A\}$ (як в табл. 1), тоді множина $\{A\}$ є потенційним ключем (див. табл. 1), а оскільки схема не містить непервинних атрибутів, то за лемою 9 таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ; ▫

d) $|R| = 2$, $|D| \geq 2$ (комірка (3,3)); нехай для визначеності $R = \{A, B\}$ (як в табл. 1). Нехай потенційним ключем є одноелементна множина, наприклад, $\{A\}$, тоді B – єдиний непервинний атрибут. Запишемо усі елементи множини $2^R = \{X \mid X \subseteq R\}$: $\{\varnothing, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$. Оскільки умова (2) виключає з розгляду тривіальні ФЗ, то залишається перевірити лише імплікації:

1. $(\varnothing \to \{B\})(t) = true \Rightarrow (\varnothing \to \{A, B\})(t) = true$;
2. $(\{A\} \to \{B\})(t) = true \Rightarrow (\{A\} \to \{A, B\})(t) = true$.

[6] Саме такий підхід здійснюється у класичних алгоритмах, описаних у [6].

В першій імплікації посилка є хибною, оскільки ФЗ $\varnothing \to \{B\}$ не виконуються на довільній дворядковій таблиці, отже, імплікація виконується.

Друга імплікація виконується, оскільки за припущенням множина $\{A\}$ є потенційним ключем. Отже, таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ. ▫

Нехай тепер множиною потенційних ключів є або $\{\{A\},\{B\}\}$ або $\{(A,B\}\}$; тоді схема взагалі не містить непервинних атрибутів, а отже, за лемою 9 таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ. ▫□

Змістовна інтерпретація твердження 2: не більше ніж двоатрибутні таблиці або не більше ніж однорядкові таблиці знаходяться у 3НФ (за умови, що вони є моделями множини ФЗ F).

Наслідок 3. $3НФ \Leftrightarrow 2НФ$ за умови $|R| \le 2$ або $|D| \le 1$.□

Доведення випливає з тверджень 1 і 2.□

Лема 10. Якщо таблиця t знаходиться у 3НФ, то вона знаходиться у 2НФ: $3НФ \Rightarrow 2НФ$.□

Доведення. З урахуванням наслідку 3 достатньо розглянути випадок, коли $|D| \ge 2$ і $|R| > 2$.

Нехай таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ. Доведення проводиться від супротивного. Припустимо таблиця t не знаходиться у 2НФ, тоді для деякого непервинного атрибута A знайдеться такий потенційний ключ K, що ФЗ $K \to \{A\}$ не є повною, тобто, існує така підмножина $K' \subset K$, що виконується ФЗ $K' \to \{A\}$. Це порушує виконання умови (2), оскільки в силу мінімальності потенційного ключа множина $K' \subset K$ не є суперключем. Прийшли до протиріччя. □

Нормальна форма Бойса-Кодда

Означення 9. Скажемо, що таблиця $t(R)$ знаходиться у *нормальній формі Бойса-Кодда (НФБК)*, якщо, по-перше, таблиця $t(R)$ знаходиться у 1НФ, по-друге, таблиця t є моделлю множини ФЗ F та, по-третє, для кожної нетривіальної ФЗ виду $X \to \{A\}$ такої, що $F \models X \to \{A\}$, множина атрибутів X є суперключем:

$$\forall X\ ,\forall A$$
$$(X \subset R \wedge A \in R \setminus X \wedge (X \to \{A\})(t) = true \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (X \to R)(t) = true).\square \qquad (3)$$

Твердження 3 (достатні умови для знаходження у НФБК для спеціальних випадків). Таблиця знаходиться у НФБК якщо $|R| \le 2$ або $|D| \le 1$. □

Доведення. Враховуючи результати з табл. 1 розглянемо усі можливі випадки для умов $|R| \le 2$ (перші три стовпчики) або $|D| \le 1$ (перші два рядки).

a) $|R| = 0$ або $|D| \le 1$ (комірки (1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4); тобто перший стовпчик і перші два рядки); згідно з наслідком 2 усі елементи множини $2^R = \{X \mid X \subseteq R\}$ належать до одного класу еквівалентності – класу суперключів $[R]_{\equiv}$, де схема R є представником класу. Отже, умови НФБК виконуються автоматично і таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у НФБК; ▫

b) $|R| = 1$, $|D| \ge 2$ (комірка (3,2)); нехай для визначеності $R = \{A\}$ (як в табл. 1), тоді множина $\{A\}$ є потенційним ключем (див. табл. 1). Імплікація з умови (3) для єдиної нетривіальної ФЗ $\varnothing \to \{A\}$ запишеться як:

$$(\varnothing \to \{A\})(t) = true \Rightarrow (\varnothing \to \{A\})(t) = true,$$

і виконується тривіально. Отже, таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у НФБК. ▫

c) $|R| = 2$, $|D| \ge 2$ (комірка (3,3)); нехай для визначеності $R = \{A, B\}$ (як в табл. 1). Можливі два випадки:

1) нехай множина потенційних ключів – одноелементна, тобто, $\Delta = \{\{A\}\}$ або $\Delta = \{\{B\}\}$, або $\Delta = \{\{A, B\}\}$. Враховуючи доведення з твердження 2 для даного випадку, залишається перевірити виконання умови (3) для нетривіальної ФЗ $\varnothing \to \{A\}$ ($\varnothing \to \{B\}$), де атрибут A (атрибут B) є первинним:

$$(\varnothing \to \{A\})(t) = true \Rightarrow (\varnothing \to \{A, B\})(t) = true.$$

Якщо посилка є хибною, то імплікація тривіально істинна. Якщо посилка є істинною, то всі рядки таблиці t мають однакове значення атрибута A. Оскільки $\{A\}$ – потенційний ключ, то у всіх рядків таблиці t однакові значення атрибута B. Отже, імплікація також істинна;

2) нехай тепер множина потенційних ключів двоелементна, тобто, $\Delta = \{\{A\},\{B\}\}$; враховуючи попередній пункт доведення залишається перевірити виконання умови (3) для нетривіальної ФЗ $\{A\} \to \{B\}$ ($\{B\} \to \{A\}$):

$$(\{A\} \to \{B\})(t) = true \Rightarrow (\{A\} \to \{A, B\})(t) = true.$$

Імплікація виконується, оскільки за припущенням множина $\{A\}$ є потенційним ключем. Отже, таблиця, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у НФБК. ▫□

Змістовна інтерпретація останнього твердження: не більше ніж двоатрибутні таблиці або не більше ніж однорядкові таблиці знаходяться у НФБК (за умови, що вони є моделями множини ФЗ F).

Наслідок 4. $НФБК \Leftrightarrow 3НФ$ за умови $|R| \le 2$ або $|D| \le 1$.□

Доведення випливає з лем 11 і 13.□

Наслідок 5. $НФБК \Leftrightarrow 3НФ \Leftrightarrow 2НФ$ за умови $|R| \le 2$ або $|D| \le 1$.□

Доведення випливає з наслідків 3 і 4.□

Лема 11. Якщо таблиця t знаходиться у НФБК, то вона знаходиться у 3НФ: $НФБК \Rightarrow 3НФ$. □

Доведення. Нехай таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у НФБК. З урахуванням включення $R \setminus (\bigcup_{K \in \Delta} K \cup X) \subseteq R \setminus X$ з виконання умови (3)

$$\forall X, \forall A \; (X \subset R \wedge A \in R \setminus X$$

$$\wedge (X \to \{A\})(t) = true \Rightarrow (X \to R)(t) = true)$$

тривіально отримуємо виконання умови (2) для таблиці t:

$$\forall X, \forall A \; (X \subset R \wedge A \in R \setminus (\bigcup_{K \in \Delta} K \cup X) \wedge$$

$$(X \to \{A\})(t) = true \Rightarrow (X \to R)(t) = true).$$

Отже, таблиця t, яка є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 3НФ.□

Наслідок 6. Виконуються імплікації: $НФБК \Rightarrow 3НФ \Rightarrow 2НФ$.□

Доведення випливає з лем 14 і 12. □

Четверта нормальна форма

Нагадаймо, що на таблиці t схеми R виконується багатозначна залежність (БЗЗ) $X \to\to Y$, якщо для двох довільних рядків s_1, s_2 таблиці t, які збігаються на множині атрибутів X, існує рядок $s_3 \in t$, який дорівнює об'єднанню обмежень рядків s_1, s_2 на множини атрибутів $X \cup Y$ і $R \setminus (X \cup Y)$ відповідно:

$$(X \to\to Y)(t) = true \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1, s_2 \in t (s_1 | X = s_2 | X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists s_3 \in t (s_3 = s_1 | (X \cup Y) \cup s_2 | R \setminus (X \cup Y)))$$ [2].

Нехай зафіксовані множини ФЗ F і БЗЗ G.

Нагадаймо, що таблиця $t(R)$ є *моделлю* множини $F \cup G$, якщо кожна залежність $\varphi \in F \cup G$ виконується на таблиці t:

$$t(R) \text{ модель } F \cup G \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varphi (\varphi \in F \cup G \Rightarrow \varphi(t) = true)$$ [10].

Означення 10. Скажемо, що таблиця $t(R)$ знаходиться у *четвертій НФ (4НФ)*, якщо, по-перше, таблиця $t(R)$ знаходиться у 1НФ, по-друге, таблиця t є моделлю об'єднання множин ФЗ і БЗЗ $F \cup G$ та, по-третє, для кожної нетривіальної БЗЗ $X \to\to Y$, такої, що $F \cup G \models X \to\to Y$, множина атрибутів X є суперключем:

$$\forall X, \forall Y \;\; (X \subset R \wedge Y \ne R \setminus X \wedge Y \not\subseteq X \wedge$$

$$\wedge (X \to\to Y)(t) = true \Rightarrow (X \to R)(t) = true).\square \quad (4)$$

Твердження 4 (достатні умови для знаходження у 4НФ для спеціальних випадків). Таблиця знаходиться у 4НФ якщо $|R| \le 1$ або $|D| \le 1$.□

Доведення. Враховуючи результати з табл. 1 розглянемо усі можливі випадки для умов $|R| \le 1$ (перші два стовпчики) або $|D| \le 1$ (перші два рядки).

a) $|R| = 0$ або $|D| \le 1$ (комірки (1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)); тобто перший стовпчик і перші два рядки); згідно з табл. 1 єдиним потенційним ключем є $\varnothing$, тобто $\Delta = \{\varnothing\}$, звідки всі елементи множини $2^R = \{X \mid X \subseteq R\}$ є суперключами. Отже, умови 4НФ виконуються автоматично і таблиця, яка є моделлю множини $F \cup G$, знаходиться у 4НФ; ▫

b) $|R| = 1$ і $|D| \ge 2$ (комірка (3,2)); нехай для визначеності $R = \{A\}$ (як в табл. 1). Можливими БЗЗ є $\varnothing \to\to \varnothing$, $\varnothing \to\to \{A\}$, $\{A\} \to\to \varnothing$, $\{A\} \to\to \{A\}$, кожна з яких є тривіальною. Отже, умови 4НФ виконуються автоматично (відповідна імплікація тривіально істинна) і таблиця, яка є моделлю множини $F \cup G$, знаходиться у 4НФ. ▫□

Зауважимо, що за умови $|R| = 2$ таблиця буде знаходитись у НФБК, але може не знаходитись в 4НФ, як показано в наступному прикладі.

П р и к л а д 1. Нехай задані схема $R = \{A, B\}$ і множина БЗЗ $G = \{\varnothing \to\to \{A\}\}$. З вказаних умов випливає, що потенційним ключем є множина атрибутів $\{A, B\}$. Таблиця із схемою $\{A, B\}$, зображена на рис. 1, є моделлю заданої множини БЗЗ G. Очевидно, що таблиця знаходиться в НФБК, але, оскільки ліва частина БЗЗ $\varnothing \to\to \{A\}$

не є суперключем, таблиця не знаходиться в 4НФ.

A	B
1	1
1	2

Рисунок 1. Таблиця з прикладу 1.

Лема 12. Якщо таблиця $t(R)$ знаходиться у 4НФ, то вона знаходиться у НФБК: $4НФ \Rightarrow НФБК$.□

Доведення. З урахуванням тверджень 3 і 4 достатньо розглянути випадок, коли $|D|\geq 2$ і $|R|\geq 2$. Нехай таблиця t, яка є моделлю множини $F\bigcup G$, знаходиться у 4НФ і нехай $X\rightarrow\{A\}$ – довільна нетривіальна ФЗ (тобто, $A\in R\setminus X$) така, що $F\bigcup G\models X\rightarrow\{A\}$. Покажемо, що множина атрибутів X є суперключем. Розглянемо випадки:

a) $X\bigcup\{A\}\subset R$; оскільки, за припущенням, $F\bigcup G\models X\rightarrow\{A\}$, то за критерієм повноти аксіоматики БЗЗ і ФЗ [10] для випадку $|R|\geq 2$ маємо: $F\bigcup G\,|-X\rightarrow\{A\}$; тоді за правилом продовження ФЗ до БЗЗ (див., наприклад, [2]) на таблиці t виконується БЗЗ $X\rightarrow\rightarrow\{A\}$, яка є нетривіальною (нагадаємо, що $A\in R\setminus X$ і $X\bigcup\{A\}\subset R$). За припущенням таблиця t знаходиться у 4НФ, тобто виконується умова (4) і множина атрибутів X є суперключем. Отже, імплікація з умови (3)

$$\forall X\ ,\forall A$$
$$(X\subset R\wedge A\in R\setminus X\wedge(X\rightarrow\{A\})(t)=true\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(X\rightarrow R)(t)=true)$$

є істинною і таблиця t знаходиться у НФБК; ▫

b) $X\bigcup\{A\}=R$; аналогічно до попереднього пункту для випадку, що розглядається ($|R|\geq 2$), маємо: $F\bigcup G\,|-X\rightarrow\{A\}$; тоді за правилом поповнення (див., наприклад, [3]) на таблиці t виконується ФЗ $X\rightarrow X\bigcup\{A\}$, тобто ФЗ $X\rightarrow R$, звідси множина атрибутів X є суперключем. Отже, таблиця t, яка є моделлю множини $F\bigcup G$, знаходиться у НФБК. □

Теорема 1. Виконуються імплікації: $4НФ\Rightarrow НФБК\Rightarrow 3НФ\Rightarrow 2НФ$.□

Доведення тривіально випливає з леми 12 і наслідку 6. □

Висновки

1. Таблиця $t(R)$, яка знаходиться у 1НФ і є моделлю множини ФЗ F, знаходиться у 2НФ, 3НФ і НФБК, якщо $|R|\leq 2$ або $|D|\leq 1$.

2. Сформульовані означення 2-4 НФ задовольняють принципу «включення» НФ вищих порядків в НФ нижчих порядків, тобто виконуються імплікації:

$$4НФ\Rightarrow НФБК\Rightarrow 3НФ\Rightarrow 2НФ\,.$$

3. Подальша робота полягає у побудові фрагменту теорії нормалізації стосовно НФ вищих порядків (зокрема, проективно-з'єднувальної НФ), який би відповідав вимогам строгості для математичних теорій.

Список використаних джерел

1. *Буй Д. Б.* Теорія нормалізації в реляційних базах даних (огляд) / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – №5(69). – С. 45-49.
2. *Редько В.Н.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
3. *Буй Д. Б.* Повнота аксіоматики Армстронга / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – № 3 – С. 103-108.

References

1. BUI, D. B. and PUZIKOVA, A. V. (2014) Theory of Normalization in Relational Databases (A Survey). *Radioelektronni i Komp'yuterni Systemy*. 5(69). p. 45-49.
2. REDKO, V. N. at al. (2001) *Reliatsiini Bazy Danykh: Tablychni Alhebry Ta SQL-Podibni Movy*. Kyiv: Akademperiodyka.
3. BUI, D. B. and PUZIKOVA, A. V. (2011) Completeness of Armstrong's axiomatic. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 3, 103-108.

4. *Буй Д. Б.* Критерій повноти аксіоматики Армстронга / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Матеріали міжнародної конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» – TAAPSD'2011 (Україна, Ялта, 19-23 вересня 2011 року). – С. 30-34.
5. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
6. *Дрибас В. П.* Реляционные модели баз данных / В. П. Дрибас. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 192 с.
7. *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных, 8-е издание.: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005. – 1328 с.
8. *Исаченко А. Н.* Модели данных и СУБД / А. Н. Исаченко, С. П. Бондаренко. – Минск: БГУ, 2007. – 205 с.
9. *Fagin R.* A Normal Form for Relational Databases That Is Based on Domains and Keys / R. Fagin // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 6. – P. 387-415.
10. *Буй Д. Б.* Аксіоматика багатозначних залежностей табличних баз даних: повнота та її критерій / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Матеріали міжнародної наукової конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» – TAAPSD'2014 (Україна, Київ, 15-17 грудня 2014 року). – С. 35-43.

4. BUI, D. B. and PUZIKOVA, A. V. (2013) Kryteriy Povnoty Aksiomatyky Armstronha. In *Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development Conference*, Monday 19th to Friday 23d September 2011. Yalta. pp. 22-23.
5. MAIER, D. (1983) *The theory of relational databases*. Computer Science Press.
6. DRIBAS, V. P. (1982) *Relyacionnye modeli bas dannyh*. Minsk: Izdatelskiy centr Belorusskiy universytet.
7. DATE, C. J. (2005) *An Introduction to Database Systems*. 8th Ed. Addison-Wesley.
8. YSACHENKO A. N. and BONDARENKO S. P. (2007) *Modeli danykh i SUBD*. Mins'k: BHU.
9. FAGIN, R. (1981) A Normal Form for Relational Databases That Is Based on Domains and Keys. *Communications of the ACM*. 6. p. 387-415.
10. BUI, D. B. and PUZIKOVA, A. V. (2014) Aksiomatyka bahatoznachnykh zalezhnostey tablychnykh baz danykh: povnota ta yiyi kryteriy. In *Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development Conference*, Monday 15th to Wednesday 17th December 2014. Kyiv. pp. 35-43.

Надійшла до редколегії 12.06.2015