УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., пров.інж.

Отримання оцінки області стійкості положення рівноваги моделі популяції з післядією

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, lead engineer

Obtaining the estimation of the stability area of equilibrium in the model of population with aftereffect

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

У статті досліджуються положення рівноваги моделі популяції з запізненням. Розглядається система диференціальних рівнянь із запізненням. Дослідження динаміки проводиться з використанням лінеаризації системи в околиці ненульовий особливої точки. Показано, що особлива точка асимптотично стійка.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання.

The article investigates the equilibrium population models with delay. The system of differential equations with delay is investigated. Nonlinear right part is described by the variables that determine the dependence of the density of the populations of the victim and predator, respectively, rate of breeding populations of victims in the absence of predators, the specific rate of consumption of predator population offerings at unit density, natural mortality predator ratio processing consumed predator biomass victim of its own biomass and others. Two special points system are identified. The first point corresponds to the absence of populations. The second special point corresponds to sustainable regime. Research of dynamics is conducted using linearization system in a neighborhood of nonzero singular point. The characteristic equation are constructed. Showing that particular point asymptotically stable. Guaranteed region of asymptotic stability assessment equilibrium is computed using the second method of Lyapunov. Region asymptotic stability of equilibrium nonlinear system is calculated using a quadratic Lyapunov function constructed for the linear system. In system the delayed derivative is measured using the provided B.S. Razumyhyn.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay.

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Ця стаття є продовженням досліджень динаміки поведінки моделі популяції з запізненням, розпочата в [5,6]. Дослідження з розробки математичних моделей динаміки популяцій проводилися в роботах Ферхюльста П., Лотки А. [1], Базикіна А.Д.[3], Вольтера В. [4], Сміта Дж. [5], Колмогорова А.Н. [10]. Було складено ряд математичних моделей взаємодіючих популяцій типу «хижак-жертва». Вони мали вигляд систем диференціальних рівнянь з нелінійної правою частиною зі змінними, визначальними залежність щільності популяцій жертви і хижака, відповідно, швидкість розмноження популяції жертви у відсутності хижака, питому швидкість споживання популяцією хижака жертви при одиничній щільності, природну смертність хижака, коефіцієнт переробки спожитої хижаком біомаси жертви у власну біомасу та ін.

Одна з моделей описувалася системою двох диференціальних рівнянь без запізнювання

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{ax(t)}{N+x(t)}-by(t)\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t)=-[c-dx(t)]y(t). \qquad (1)$$

Тут $a-$ швидкість розмноження популяції жертви у відсутності хижака, $b-$ питома швидкість споживання популяції хижака жертви при одиничній щільності, $c-$ природна смертність хижака, $d/b-$ коефіцієнт переробки спожитої хижаком біомаси жертви у власну біомасу, N – максимальну кількість популяції жертви.

У роботах [5,6] було запропоновано розглянути вплив запізнювання, обумовлений часом дозрівання особин. Диференціальні рівняння (1) в цьому випадку мали вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{ax(t-\tau)}{N + x(t-\tau)} - by(t-\tau)\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t) = -[c - dx(t-\tau)]y(t). \qquad (2)$$

Система рівнянь (2) має ті ж положення рівноваги, що і система без запізнювання (1). Дослідження динаміки проводилося з використанням лінійного наближення в околиці кожної з особливих точок. Особливих точок дві. Ними є

$$O(0,0),\ O_1(x_1, y_1),\ x_1 = \frac{c}{d},\ y_1 = \frac{ac}{b(Nd + c)}.$$

Стаціонарні точки визначаються із системи

$$\left[\frac{ax(t)}{N + x(t)} - by(t)\right]x(t) = 0,\ -[c - dx(t)]y(t) = 0.$$

Ними будуть

$$O(0,0),\ M(x_1, y_1),\ x_1 = \frac{c}{d},\ y_1 = \frac{ac}{b(Nd + c)}.$$

Перша особлива точка $O(0,0)$ не представляє інтересу. Вона відповідає відсутності популяції. Розглянемо другу особливу точку. Система лінійного наближення в околі цієї особливої точки має вигляд

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau),$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{ax_1}{N + x_1} - by_1 & 0 \\ 0 & -c + dx_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{aNx_1}{(N + x_1)^2} & -bx_1 \\ dy_1 & 0 \end{bmatrix},\ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$z(t-\tau) = \begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Підставивши значення $O_1(x_1, y_1)$, отримаємо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix},\ b_{11} = -\frac{acdN}{(Nd + c)^2},$$

$$b_{12} = -c,\ b_{21} = \frac{acd}{b(Nd + c)}. \qquad (4)$$

Таким чином, система лінійного наближення в околиці особливої точки $O_1(x_1, y_1)$ є «системою з чистим запізненням». Її характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \frac{ac}{dK}e^{-\lambda\tau}\lambda + \frac{ac(dK - c)}{dK}e^{-2\lambda\tau} = 0.$$

Умовами асимптотичної стійкості будуть [5]

$$-\frac{\pi}{2\tau} < s_1 < 0,\ -\frac{\pi}{2\tau} < s_2 < 0, \qquad (5)$$

де

$$s_{1,2} = -\frac{ac}{2dK} \pm \sqrt{\left(\frac{ac}{2dK} + 1\right)^2 - (a + 1)}$$

Оскільки вихідна система нелінійна, то асимптотична стійкість положення рівноваги є локальною, тобто в деякій околиці $U_\delta(O_1)$ точки $O_1(x_1, y_1)$.

Гарантовану оцінку області асимптотичної стійкості положення рівноваги $O_1(x_1.y_1)$ можна обчислити, використовуючи другий метод Ляпунова. Розглянемо функцію Ляпунова квадратичного виду

$$V(z_1(t)) = z_1^T(t)Hz_1(t),\ z_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

з позитивно визначеною матрицею H.

Функцію Ляпунова для нелінійної системи побудувати, в загальному випадку, важко. Як правило, будують функцію Ляпунова для лінеаризованої системи, а її повну похідну обчислюють в силу нелінійної системи. Для лінійних систем з запізненням необхідною умовою стійкості є стійкість при відсутності запізнювання, тобто системи

$$\dot{z}_1(t) = (A + B)z(t)_1,\ A + B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Оскільки характеристичне рівняння системи без запізнювання має вигляд

$$\det(A+B-\lambda E)=\begin{bmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{21} & -\lambda \end{bmatrix},$$
$$=\lambda^2-b_{11}\lambda-b_{12}b_{21}=0$$

то, згідно з критерієм Гурвіца, для двовимірних систем необхідною і достатньою умовою стійкості є позитивність коефіцієнтів. Оскільки

$$-b_{11}=\frac{acdN}{(Nd+c)^2}>0,$$
$$-b_{12}b_{21}=\frac{ac^2d}{b(Nd+c)}>0,$$

то система без запізнювання (6) буде асимптотично стійкою. Розглянемо побудову функції Ляпунова (5) для лінеаризованої системи (6). Матричне рівняння Ляпунова має вигляд

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$
$$=-\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

де $c_{11}>0$, $c_{11}c_{12}-c_{12}^2>0$- довільні числа. Поклавши $c_{11}=c_{22}=2c$, $c_{12}=0$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$b_{11}h_{11}+b_{12}h_{12}=-c,\ b_{21}h_{11}+b_{11}h_{12}+b_{12}h_{22}=0,$$
$$b_{21}h_{12}=-c.$$

Її рішенням буде

$$h_{11}=c\frac{b_{21}-b_{12}}{b_{11}b_{21}},\ h_{12}=-c\frac{1}{b_{21}},$$
$$h_{22}=c\frac{b_{11}^2+b_{21}^2-b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{12}b_{21}}. \qquad (7)$$

Відповідно, екстремальними власними числами отриманої симетричної, позитивно визначеною матриці H, будуть

$$\lambda_{\max}(H)=\frac{1}{2}\left\{(h_{11}+h_{22})+\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\right\},$$
$$\lambda_{\min}(H)=\frac{1}{2}\left\{(h_{11}+h_{22})-\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\right\}.$$

І для функції Ляпунова квадратичного виду (5) з коефіцієнтами h_{11}, h_{12}, h_{22}, визначеними в (8), повна похідна, в силу системи (7), дорівнює

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t))=-c\left[x_1^2(t)+y_1^2(t)\right]<0,$$

а нульове положення рівноваги системи лінійного наближення (6) глобально асимптотично стійке. Як випливає з теореми про стійкість за лінійним наближенням, буде асимптотично стійким (але локально) і нульове положення вихідної нелінійної «обуреної системи». Обчислимо оцінку області асимптотичної стійкості. Запишемо систему, «обурену» до системи (2) в точці $O_1(x_1.y_1)$.

Відомо, що систему загального вигляду

$$\dot z_1(t)=F(z_1(t),z_1(t-\tau))$$

можна переписати, виділивши лінійну частину, наступним чином

$$\dot z_1(t)=\frac{\partial}{\partial z_1(t)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_1)}z_1(t)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z_1(t-\tau)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_1)}z_1(t-\tau)+$$
$$+F(z_1(t),z_1(t-\tau))-$$
$$-\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1(t)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_2)}z_1(t)\\&+\frac{\partial}{\partial z_1(t-\tau)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_1)}z_1(t-\tau)\end{aligned}\right\}$$

Або в вигляді

$$\dot z_1(t)=(A+B)z_1(t)+B[z_1(t-\tau)-z_1(t)]+$$
$$\{F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)\} \qquad (8)$$
$$A=\frac{\partial}{\partial z_1(t)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_1)}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$B=\frac{\partial}{\partial z_1(t-\tau)}F(z_1(t),z_1(t-\tau))\big|_{(z_1,z_1)}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&0\end{bmatrix}.$$

Повна похідна Ляпунова (5) в силу нелінійної системи з запізненням (8) в зміщеній точці $O_1(x_1.y_1)$ має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t))=\dot z_1^T(t)Hz(t)+z_1^T(t)H\dot z_1(t)=$$
$$z_1^T(t)(A+B)^T Hz_1(t)+[z_1(t-\tau)-z_1(t)]^T B^T Hz_1(t)+$$
$$+\{F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)\}^T Hz_1(t)+$$

$$+z_1^T(t)H(A+B)z_1(t)+z_1^T(t)HB[z_1(t-\tau)-z_1(t)]+$$
$$+z_1^T(t)H\{F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)\}^T.$$

Використовуючи матричне рівняння Ляпунова, отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t))\le -z_1^T(t)Cz(t)+$$
$$2|HB|\|z_1(t)\|\big[|z_1(t)+|z_1(t-\tau)|\big]+$$
$$+2|H|\|z_1(t)\|F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)|$$

Припустимо, що виконуються умови Б.С. Разуміхина. Вони мають вигляд

$$\lambda_{\min}(H)|z_1(s)|^2\le V(z_1(s))<V(z_1(t)),\ s<t,$$
$$\le\lambda_{\max}(H)|z_1(t)|^2$$

або

$$|z_1(t-\tau)|<\sqrt{\varphi(H)}|z_1(t)|,$$
$$\varphi(H)=\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H).$$

Тоді для повної похідної функції Ляпунова в силу «обуреної системи» (8) матиме місце наступна нерівність

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t))\le -\{\lambda_{\min}(C)-2|HB|(1+\sqrt{\varphi(H)})\}|z_1(t)|^2+$$
$$+2|H|\|z_1(t)\|F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)|$$

Оцінимо останній доданок, що визначає оцінку області стійкості.

$$R[z_1(t),z_1(t-\tau)]=$$
$$2|H|\|z_1(t)\|F(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau)|=$$

Векторна функція $F(z_1(t),z_1(t-\tau))$ має вигляд

$$F(z_1(t),z_1(t-\tau))$$
$$=\begin{pmatrix}F_1(x_1(t),y_1(t),x_1(t-\tau),y_1(t-\tau))\\ F_2(x_1(t),y_1(t),x_1(t-\tau),y_1(t-\tau))\end{pmatrix}$$

де

$$F_1(x_1(t),x_1(t-\tau),y_1(t),y_1(t-\tau))$$
$$=\left[\frac{a(x_1(t-\tau)+x_1)}{N+(x_1(t-\tau)+x_1)}-b(y_1(t-\tau)+y_1)\right]$$
$$(x_1(t)+x_1)-$$
$$-\left[\frac{ax_1}{N+x_1}-by_1\right]x_1,$$

$$F_2(x_1(t),x_1(t-\tau),y_1(t),y_1(t-\tau))$$
$$=-[c-d(x_1(t-\tau)+x_1)](y_1(t)+y_1)+$$
$$[c-d_1x_1]y_1,$$

$$Az_1(t)+Bz_1(t-\tau)=\begin{pmatrix}b_{11}x_1(t-\tau)+b_{12}y_1(t-\tau)\\ b_{21}x_1(t-\tau)\end{pmatrix}.$$

Розглянемо перший елемент $R_1[z_1(t),z_1(t-\tau)]$ «вектора збурень»

$$R[z_1(t),z_1(t-\tau)]=\begin{Bmatrix}R_1[z_1(t),z_1(t-\tau)],\\ R_2[z_1(t),z_1(t-\tau)]\end{Bmatrix}^T=$$
$$=F_1(z_1(t),z_1(t-\tau))-Az_1(t)-Bz_1(t-\tau).$$

Враховуючи, що

$$x_1=\frac{c}{d},\ y_1=\frac{ac}{b(Nd+c)},\ b_{11}=-\frac{acdN}{(Nd+c)^2},$$
$$b_{12}=-c,\ b_{21}=\frac{acd}{b(Nd+c)},$$

отримуємо

$$R_1[z_1(t),z_1(t-\tau)]$$
$$=\left[\frac{a(x_1(t-\tau)+x_1)}{N+(x_1(t-\tau)+x_1)}-b(y_1(t-\tau)+y_1)\right]$$
$$(x_1(t)+x_1)-$$
$$\left[\frac{ax_1}{N+x_1}-by_1\right]x_1-$$
$$-b_{11}x_1(t-\tau)-b_{12}y(t-\tau). \tag{9}$$

Розглянемо другий елемент

$$R_2[z_1(t),z_1(t-\tau)].$$

Отримуємо

$$R_2[z_1(t),z_1(t-\tau)]=$$
$$-[c-d(x_1(t-\tau)+x_1)](y_1(t)+y_1)+$$
$$[c-d_1x_1]y_1-b_{21}x_1(t-\tau)=$$
$$=-cy_1(t)+dx_1(t-\tau)y_1(t)$$
$$+dx_1y_1(t)-cy_1+dx_1(t-\tau)y_1$$
$$+dx_1y_1+cy_1-dx_1y_1-b_{21}x_1(t-\tau)=$$
$$=dx_1(t-\tau)y_1(t). \tag{10}$$

Таким чином,

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t))\le -\{\lambda_{\min}(C)-2|HB|(1+\sqrt{\varphi(H)})\}|z_1(t)|^2+$$
$$2|H|\|z_1(t)\|R[z_1(t),z_1(t-\tau)]|.$$

І для отримання оцінки «гарантованої області асимптотичної стійкості» отримуємо нерівність

$$U_R = \{z : |z| \le r\},$$
$$r = \max_{t>0}\left\{ z : |z| \le \frac{\lambda_{\min}(C) - 2|HB|\left(1+\sqrt{\varphi(H)}\right)}{2|H|\|R[z_1(t), z_1(t-\tau)]\|}\right\}$$
,

при умові $|z(t-\tau)| < \sqrt{\varphi(H)}|z(t)|$.

Список використаних джерел

1. *Lotka A.J.* Elements of physical biology / A.J. Lotka. - Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. – 460 с.
2. *Malthus T.R.* An Essay on the Principle of Population / T.R. Maltus.- London: Johnson, 1798. – 134 с.
3. *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва: Наука, 1985. – 181 с.
4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – Москва: Наука, 1976. – 286 с.
5. *Смит Дж.* Модели в экологии / Дж. Смит. – Москва: Мир, 1976. - 182 с.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э.Эльсгольц, С.Б. Норкин. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
7. *Гаркуша Н.І.* Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. - №4. – С. 135-138.
8. *Гаркуша Н.І.* Динаміка однієї екологічної моделі «хижак-жертва» без врахування вікової структури / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія кібернетика. – 2014. - №14. – С. 22-24.
9. *Verhulst P.F.* Natice sur la loi que la population suit dans son accoroissement / P.F. Verhulst // Corr. Math. Et. Phys. – 1838. - V.10. - P. 113-121.
10. *Колмогоров А.Н.* Качественное изучение математических моделей динамики популяций / А.Н. Колмогоров // Проблемы кибернетики. – 1972. - №25. – С. 100-106.

References

1. LOTKA, A. (1925) *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams and Wilkins.
2. MALTHUS, T. (1798) *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*. London: Johnson.
3. BAZYKIN, A. (1985) *Mathematical Biophysics of Interacting Populations*. Moskva: Nauka.
4. VOLTERRA V. (1976) *The Mathematical Theory of the Struggle for Existence*. Moskva: Nauka.
5. SMITH, J. (1974) *Models in Ecology*. Cambridge: CambridgeUniversity Press.
6. ELSGOLTZ, L., NORKIN, S. (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*. Moskva: Nauka.
7. GARKUSHA, N. (2014) About One Mathematical Model of the Dynamics of Interacting Population. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №4.– p.135-138.
8. GARKUSHA, N. (2014) The Dynamics of the Ecological Model “Predator-Prey” without Age Structure. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Cybernetics*, №14. - p. 22-24.
9. VERHULST, P. (1838) Natice sur la loi que la population suit dans son accoroissement. In *Corr. math. et phys., v.* 10. - p.113-121.
10. KOLMOGOROV, A. (1972) A Qualitative Study of Mathematical Models of Population Dynamics . – In *Problems of Cybernetics.* №25. - p. 100-106.

Надійшло до редколегії 10.05.2015 р.