УДК 004.93

Скотаренко Ф.М., аспірант

Алгоритм лінійної дискримінації для матричних просторів та його основи

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т Глушкова 4д,

e-mail: fred.unicyb@gmail.com

F.M. Skotarenko, postgraduate student

Algorithm of linear discrimination problem for matrix spaces: base principals

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: fred.unicyb@gmail.com

У роботі наведено алгоритм задачі лінійної дискримінації як один з варіантів розв'язання проблеми групування інформації(ПГІ) у варіанті задачі класифікації чи кластеризації. Загалом ПГІ, що є важливою складовою прикладних досліджень, виступає в одному з проявів: як задача відновлення функції, представленої своїми спостереженнями, чи – у вигляді задачі класифікації, кластеризації, розпізнавання образів. Задача лінійної дискримінації в R^n *є важливим інструментом групування в прикладних дослідженнях, коли досліджувані об'єкти представлені векторами ознак. В той же час у багатьох важливих областях дослідження: розпізнавання мовних сигналів, обробка зображень, динамічні символи жестової мови, - природними представниками досліджуваних об'єктів є матриці. Робота присвячена розробці та обґрунтуванню алгоритму розпізнавання саме останньої задачі на основі лінійної дискримінації в матричних евклідових просторів, розвитку математичного апарату для оперування з матричними об'єктами. Як і в евклідових просторах числових векторів, необхідні математичні засоби будуються на основі сингулярного подання та техніки псевдо обернення за Муром - Пенроузом для слушних лінійних операторів над слушними евклідовими просторами. В роботі наведені основні результати теорії кортежних операторів, які дозволяють сформулювати та конструктивно реалізувати у вигляді алгоритму задачу лінійної дискримінації для матриць.*

Ключові слова: матричні евклідові простори, кортежні оператори, сингулярне подання кортежних операторів, лінійна дискримінація в матричних евклідових просторах.

In this paper, represented algorithm of a linear discrimination problem as a variant of the problem of grouping information (GIP). In general GIP which is an important component of applied research, appears in one of the manifestations: a problem of recovery function, presented his observations or - in the form of classification, clustering, pattern recognition, or recognition dynamic symbols sign language. Linear discrimination of two classes is an important representative of the latest version of PIP. Linear discrimination inserted and considered for elements of Euclidean space matrices of a fixed dimension. The importance of clustering or classification tasks defined by the recognition that in many important applied problems of representative natural objects are grouped perform matrix. Matrix, in particular, presented image. Just - spectrogram in processing audio signals, dynamic symbols sign language , too, is the image matrix. Formulation and solution of linear discrimination based on the use of a special class of linear operators introduced by the authors in [Donchenko, Zinko, Skotarenko, 2012] - cortege operators. The work the proposed are necessary facts from the theory cortege operators.

Key Words: Matrix Euclidean spaces, cortege operators, matrix corteges operators, Single Valued Decomposition for cortege linear operators, linear discrimination of Matrix Euclidean Spaces.

Статтю представив д.т.н., профессор Гаращенко Ф.Г

Вступ

Одним з надійних засобів розв'язування задачі класифікації в R^n є класифікація на основі лінійної дискримінації (ЛД) класів. В той же час у багатьох важливих прикладних областях: мовні сигнали, зображення, динамічні символи жестової мови, - природними представниками досліджуваних об'єктів є матриці. Тому важливим є розробка методів, які б дозволяли розв'язування ЛД-задач для матричних об'єктів. Нижче представлені основні складові математичного апарату, який дозволяє формулювати та конструктивно розв'язувати ЛД-задачу як задачу розпізнавання для матричних представників. Як і в евклідових просторах числових векторів, необхідні математичні засоби будуються на основі сингулярного подання та техніки псевдо обернення за Муром - Пенроузом (ПдО) для слушних лінійних операторів над слушними евклідовими просторами. Такі слушні складові пропонує концепція кортежних операторів для матричних кортежів. В роботі наведені основні результати із статті [Донченко, Зінько, Скотаренко, 2012] в якій сформульована та реалізована концепція кортежних операторів які дозволяють сформулювати та конструктивно реалізувати у вигляді алгоритму розв'язання ЛД-задачі лінійної дискримінації для матриць.
Основні визначення та необхідні результати наводитимуться саме за цитованою вище роботою.

1 Кортежні оператори

Під "кортежним оператором" (КорО) за матричним кортежем $\alpha = (X_1,...,X_K)$, $X_k \in R^{m\times n}$, $k=\overline{1,K}$ будемо розуміти лінійний оператор $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$, який визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha z = \sum_{i=1}^{K} z_i X_i,\ \ z\in R^K : z^T = (z_1,...,z_K).$$

Наступна теорема технічною, але є важливою для реалізації програми концепції кортежних операторів: конструктивної побудови сингулярний подання (SVD) КорО та побудови теорії псевдо обернення для них. В ній $\wp_\alpha^*$ - позначає спряжений до $\wp_\alpha$.

Теорема1. Добутком двох операторів $\wp_\alpha^*\wp_\alpha : R^K \to R^K$ є лінійний оператор, визначений звичайною матрицею F:

$$\wp_\alpha^*\wp_\alpha = \begin{pmatrix} trX_1^T X_1,...,trX_1^T X_K \\ \cdots \\ trX_K^T X_1,...,trX_K^T X_K \end{pmatrix} = F,$$

яка є матрицею Грама для $X_1,...,X_K$ в евклідовому просторі $R^{m\times n}$ із слідовим скалярним добутком: $\left(X_i, X_j\right) = trX_i^T X_j, i,j=\overline{1,K}$

Сингулярний розклад для матриці F це спектральний розклад звичайної симетричної невід'ємно визначеної матриці. Це означає, що задача побудови сингулярного розкладу для кортежного оператора зводиться до класичної задачі сингулярного розкладу для операторів між Евклідовими просторами числових векторів.
Позначатимемо в подальшому (v_k, λ_k^2), $k=\overline{1,r}$, $r = rankF$ всі ненульові сингулярності матриці F (пари власний вектор - власне число), які відповідають додатнім власним числам, $\lambda_1^2 \ge \cdots \ge \lambda_r^2 > 0$.

Теорема 2. Набір пар (U_k, λ_k^2), $k=\overline{1,r}$ в якій $U_k = \frac{1}{\lambda_k}\wp_\alpha v_k$, $k=\overline{1,r}$ є набором ненульових сингулярностей оператора $\wp_\alpha\wp_\alpha^*$. Крім того $v_k = \frac{1}{\lambda_k}\wp_\alpha^* U_k$, $k=\overline{1,r}$.

Теорема 3. (SVD-подання кортежного оператора) Будь який кортежний оператор $\wp_\alpha$ та спряжений до нього $\wp_\alpha^*$ можуть бути подані у вигляді:

$$\wp_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_j v_j^T = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j U_j (v_j,\cdot)_{R^K},$$

$$\wp_\alpha^* = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j (U_j,\cdot)_{R^{m\times n}}$$

Теорема 4. ПдО $\wp_\alpha^+$ для КорО $\wp_\alpha$ визначається співвідношенням

$$\wp_\alpha^+ X = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\lambda_k} v_k (U_k, X), X \in \mathrm{R}^{m\times n},$$

а для його спряженого -

$$\wp_\alpha^{+*} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\lambda_k} U_k v_k^T$$

В подальшому будуть потрібні аналоги Z-операторів в евклідових просторах числових векторів, що є ортогональними проекторами на ортогональні доповнення до множини можливих значень лінійного оператора та спряженого до нього. Цими операторами для кортежних операторів із збереженням змісту є Z - оператори, що визначатимуться співвідношеннями:

$$Z(\wp_\alpha) = E_K - \sum_{j=1}^{r} v_j v_j^T,\ E_K \text{ - одинична в } R^K,$$

$$Z(\wp_\alpha^*) X = \sum_{k=1}^{K} U_k (U_k, X)_{\mathrm{R}^{m\times n}}, X \in \mathrm{R}^{m\times n}$$

2 Лінійна дискримінація в матричних Евклідових просторах

ЛД- проблема полягає в розділенні двох наборів векторів в евклідових просторах слушною гіперплощиною. Для R^n в робастній постановці ЛД-задача застосуванням техніки ПдО була розв'язана в [Кириченко, Лепеха, 2002]. Концепція кортежних операторів дозволяє перенести згаданий результат на матриці.

2.1 Постановка задачі

Нехай $X_1,...,X_K \in R^{m\times n}$ множина матриць з навчальної вибірки представляє два класи Cl_1, Cl_2 об'єктів: для

$$J_1 \cap J_2 = \varnothing, J_1 \cup J_2 = \{1,2,...,K\}$$
$$X_j \in Cl_1, j \in J_1, X_j \in Cl_2, j \in J_2 : \ .$$

Необхідно знайти $\Delta > 0$ і визначити лінійний функціонал $A: R^{m\times n} \to R^1$ таким чином, щоб $(A, X_j) > \Delta, j \in J_1, (A, X_j) < -\Delta, j \in J_2$ (1)

Позначимо через $\Omega(\Delta)$ множину числових векторів $y^T = (y_1,...,y_K)$ з R^K, які задовольняють обмеженням

$$y_j > \Delta, j \in J_1, y_j < -\Delta, j \in J_2$$

2.2 Розв'язок ЛД-задачі для матриць

Зауважимо, що набір $(A, X_1)_{tr},...,(A, X_K)_{tr}$ значень лінійних форм на матрицях, що підлягають дискримінації, визначає значення спряженого $\wp_\alpha^*$ оператора до кортежного оператора $\wp_\alpha$ для аргументу A:

$$\left(\wp_\alpha^* A\right)^T = \left((X_1, A,),...,(X_K, A)\right), \quad \wp_\alpha^* A \in R^K$$

Має місце наступна теорема

Теорема 5. ЛД-задача для матриць в формі, сформульованій вище, є рівносильною розв'язності лінійного рівняння

$$\wp_\alpha^* X = y \qquad (2)$$

в області $\Omega(\Delta)$: існуванню $y \in \Omega(\Delta)$, для якого (2) розв'язне .

Доведення. Дійсно, виконання (1) означає, що вектор

$$y \in R^K : y^T = \left((A, X_1),...,(A, X_K)\right)$$

належить до $\Omega(\Delta)$. Навпаки, якщо для деякого $y \in \Omega(\Delta)$ розв'язок рівняння (2) існує, то цей розв'язок і є розв'язком ЛД-задачі.

Теорема 6. ЛД-задача має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує $y_* \in \Omega(\Delta) \subseteq R^K$, для якого

$$y_*^T Z(\wp_\alpha) y_* = y_*^T (E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T) y_* = 0 .$$

За таким y_* ЛД-розв'язок визначається рівнянням

$$A = \wp_\alpha^{*+} y_* \qquad (3)$$

Наслідок. Матрична ЛД розв'язна задача якщо існує $y_* \in \Omega(\Delta) \subseteq R^K$ для якого виконуються такі умови

$$y_*^T (E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T) y_* = 0$$

і відповідні розв'язки раніше визначені (2).

Теорема 7. Матрична ЛД рівносильне задачі оптимізації в області $\Omega(\Delta) \subseteq R^K$ для квадратичної форми

$$y^T Z(\wp_\alpha) y = y^T (E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T) y \, .$$

Якщо розв'язок y_* в оптимізаційної задачі дає мінімум, який дорівнює нулю, то ЛД- розв'язок визначається співвідношенням
$A = \wp_\alpha^{*+} y_*$.

3. Матрична ЛД - задача: алгоритм

Теорема 7 є основою в алгоритмі розв'язку матричної ЛД-задачі для двох матричних класів.
Він складається із шести наступних кроків

1-й крок: Обчислення матриці Грама *F* для набору матриць $X_1,...,X_K \in R^{m \times n}$:

$$F = \begin{pmatrix} trX(1)^T X(1),...,trX(1)^T X(K) \\ \cdots \\ trX(K)^T X(1),...,trX(K)^T X(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(X(1),X(1)\right)_{tr},...,\left(X(1),X(K)\right)_{tr} \\ \cdots \\ \left(X(K),X(1)\right)_{tr},...,\left(X(K),X(K)\right)_{tr} \end{pmatrix} .$$

2-й крок: Обчислення ненульових сингулярностей матриці *F*:

$(v_k, \lambda_k^2), \lambda_k^2 > 0, \;\; k = \overline{1,r}, \;\; r = rankF$ - набору пар

власний вектор - власне число для ненульових власних чисел ;

3-й крок: Обчислення матриці $E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T$

квадратичної форми ;

4-й крок: Розв'язання задачі квадратичної оптимізації в області $\Omega(\Delta)$ для квадратичної форми з матрицею попереднього кроку:

- мінімізація квадратичної форми

$$y^T \left(E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T \right) y \text{ в області } \Omega(\Delta) \subseteq R^K$$

числовий методами . Розв'язок задачі позначається y_*;

5-й крок: Перевірку умови рівності мінімуму в точці y_* мінімуму нулю:

$$y_*^T \left(E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T \right) y_* = 0 \, ; \qquad (4)$$

6-й крок:

- якщо задовольняє умові (4) : тоді будується розв'язок матричної ЛД- задачі за формулою,
$$A = \wp_\alpha^{*+} y_*$$
за співвідношенням
$$\wp_\alpha^{+*} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\lambda_k} U_k v_k^T \, ;$$
- якщо умова (4) не задовольняється, робиться висновок, що матрична ЛД - задача не розв'язна.

Висновок

Наведений алгоритм лінійної дискримінації переносить дослідження від числових векторів евклідового простору до евклідового простору матриць фіксованої розмірності. В свою чергу це дозволяє досліджувати динамічні символи жестової мови. Як і в евклідових просторах числових векторів, необхідні математичні засоби будуються на основі сингулярного подання та техніки псевдо обернення. Цей алгоритм може бути використаний у багатьох важливих областях дослідження: розпізнавання мовних сигналів, обробка зображень, динамічні символи жестової мови, - природними представниками досліджуваних об'єктів є матриці.

Список використаних джерел

1. *Кириченко Н.Ф.* Применение псевдо-обратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации / Н.Ф. *Кириченко, Н.П.Лепеха* // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 4. – С. 107 - 124.
2. *Кириченко Н.Ф.* Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация/ *Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко, Д.П. Сербаев* // Кибернетика и системный анализ. – №3, 2005. – С. 58 - 68.
3. *Кириченко Н.Ф.* Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации/ *Н.Ф. Кириченко, Ю.Г. Кривонос, Н.П. Лепеха* // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. С. 47 – 57
4. *Донченко В.С.* Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструткивные методы описания базовых структур и их использование. //International Journal “Information technologies & Knowledge”. - 2011. - Vol. 5.- Number 3. - С. 203 - 216.
5. *Донченко В*. “Вектори ознак” в задачі групування інформації: вектори і матриці/ *В. Донченко, Т. Зінько, Ф. Скотаренко//* Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - С. 111 – 124.

References

1. KIRICHENKO, M., LEPEHA, M. (2002) *The use of pseudo-and projection matrices to research problems of control, surveillance and identification.* Cybernetics and Systems Analisys. Vol.4. P. 107 - 124.
2. KIRICHENKO, M., DONCHENKO, V. & SERBAEV, D (2005). *Nonlinear regression recursive converters: dynamical systems and optimization.* Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 58 - 68.
3. KIRICHENKO,M., KRIVONOS, Y., LEPEHA, M. (2007) *Synthesis systems neurofunctional converters in solving classification problems.* Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 47 – 57.
4. DONCHENKO, V. (2011) *Euclidean spaces numerical vectors and matrices: design methods for describing the basic structures and their use.* International Journal “Information technologies & Knowledge”. Vol. 5. - Number 3. - P. 203 - 216.
5. DONCHENKO, V., ZINKO, T., SKOTARENKO, F. (2012) *“Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes.* - Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - P. 111 - 124.

Received 07.06.2015