УДК 519.9

Царук В. І., аспірант

Про оптимізацію транспортних потоків в моделі Бекмана

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, 03680, Україна, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: volodymyr.tsaruk@gmail.com

V. I. Tsaruk, post-graduate student

On transport flow optimization in Backman model

Taras Shevchenko National University of Kyiv, cybernetics faculty, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: volodymyr.tsaruk@gmail.com

В роботі досліджується задача оптимізації транспортних потоків з метою мінімізації загальних затрат системи за допомогою зовнішніх обмежень або, навпаки, заохочень. Розглянуто зведення моделі Бекмана до задачі дворівневої оптимізації і задачі з обмеженнями вигляду варіаційної нерівності. Запропоновано підхід до її розв'язання методом Каруша-Куна-Такера. Детально розглянуто конкретну реалізацію даної задачі, а саме задачу керування громадським транспортом. Продемонстровано зведення її до набору задач опуклої оптимізації на опуклій множині.

Ключові слова: транспортні потоки, принцип Вордропа, рівновага за Нешем, дворівнева оптимізація

Transport flow congestion problem is relevant for big cities. In case of uncontrolled development of transport flow the equilibrium of traffic, which is far from effective, is quickly set in the city. Different methods of road network management are used to overcome this problem: limitation or extension of the road traffic, regulation by means of traffic lights, or development of public transport. Generally, mathematical background of this management leads us to a highly complicated problem. This research studies the problem of optimizing transport flows to minimize the total cost of the system by means of external constraints or, on the contrary, incentives. Its implementation for the Beckman model is considered, and reduction to a bilevel optimization problem, or mathematical problem with variational inequality constraints. Its solution by Karush-Kuhn-Tucker method is suggested. Specific implementation of this problem is considered in detail, namely the problem of public transport control. Its reduction to a set of convex optimization problems for convex sets is demonstrated.

Key Words: transport flows, Wardrop principle, Nash equilibrium, bilevel optimization
Статтю представив д.т.н., п.н.с. Кудін В.І.

Вступ

В великих містах особливо актуальною є проблема перевантаженості транспортної мережі. Для боротьби з нею при плануванні міста намагаються проектувати дороги на кілька кроків наперед, а з існуючими проблемами розбираються, використовуючи різні методи: розвиток громадського транспорту, обмеження руху, регулювання частот світлофорів, тощо.

Задача моделювання транспортних потоків складається з двох підзадач: розрахунок матриці кореспонденції [1], що визначає попит на перевезення, і пошук точки рівноваги, що відповідає даній матриці. В даній роботі матриця кореспонденцій вважається відомою і фіксованою, і досліджується керування точкою рівноваги.

При пошуку точки рівноваги потоків індивідуального транспорту використовують перший принцип Вордропа [2]: кожен користувач транспортної мережі незалежно від інших вибирає маршрут слідування в точку призначення, що відповідає найменшим затратам для нього. В результаті цього вибору користувачі утворюють потоки на відповідних маршрутах, пошук значень яких і є ціллю їх моделювання. Найбільш вивченою моделлю є модель Бекмана [3]. Вона припускає, що витрати на користування дорогами є неперервними і монотонними функціями від їх завантаженості, і зводить задачу пошуку точки рівноваги до розв'язання варіаційної нерівності. В [4] доводиться, що до розв'язку цієї ж варіаційної нерівності збігається еволюційний алгоритм за тих же функцій витрат, а отже задача може моделювати реальні процеси.

Очевидно, що отримана рівновага потоків не буде точкою, в якій сумарні затрати є найменшими. Більше того, при неграмотному плануванні доріг різниця між оптимальними і наявними затратами тільки зростатиме. В [5] наводиться приклад мережі, де один з сегментів доріг тільки погіршує загальний транспортний стан, причому такі сегменти зустрічались і в реальних системах доріг різних міст.

В роботі розглянуто метод оптимізації роботи транспортної мережі, впливаючи на затрати користування нею. Цей вплив може бути викликаний звуженням або розширенням проїжджої частини, введенням плати за користування, чи просто збільшенням кількості автобусів на маршруті. Задача зводиться до задачі дворівневої оптимізації [6].

Модель Бекмана

Використовуватимемо опис моделі з [1]. Нехай $\Gamma(V,E)$ – орієнтований граф, де V – множина вершин, а E – множина дуг. Позначимо $S \subset E$ – множина джерел і $D \subset E$ – множина стоків. Між елементами множин S і D існує попит на перевезення. Позначимо множину потокотворчих пар:

$$W = \{w = (i,j) : i \in S, j \in D\}.$$

Кожній парі $w \in W$ відповідає число $\rho_w \geq 0$, яке називається попитом на перевезення.

Позначимо: P_w – множина маршрутів, що ведуть з i в j; $P = \bigcup_{\{w \in W\}} P_w$ – множина всіх можливих маршрутів; $x_p, p \in P$ – потік через відповідний маршрут. Для кожної пари $w \in W$ виконується наступна умова:

$$X_w = \left\{ x_p \geq 0 : p \in P_w, \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w \right\}.$$

Позначимо також $x = (x_p, p \in P)$ – вектор потоків з допустимою множиною:

$$x \in X = \prod_{w \in W} X_w.$$

Нехай $\delta_{p,e} \in \{0,1\}$, де $p \in P, e \in E$ – індекс належності ребра e маршруту p. Тоді кожній дузі $e \in E$ відповідає число – вартість подорожі через неї $t_e = g_e(x_e)$, де $x_e = \sum_{p \in P} \delta_{p,e} x_p \in \mathbb{R}$ – потік через відповідну дугу. Тоді вартість подорожі маршрутом $p \in P$ визначається функцією $G_p = G_p(x) = \sum_{e \in E} \delta_{p,e} g_e(x_e)$, де $x \in X$, а вектор вартостей маршрутів – вектор-функцією $G(x)$.

Оскільки кожен водій мінімізує власні затрати, то ненульовими будуть тільки ті потоки, які є мінімальними для відповідної пари «джерело-витік»:

$$x_p > 0 \Leftrightarrow G_p(x) = \min_{k \in P_w} G_k(x), p \in P_w. \tag{1}$$

В такому випадку транспортна рівновага, що встановлюється в місті, визначається вектором $x^\dagger$, що є розв'язком варіаційної нерівності:

$$G(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq 0 \ \forall x \in X. \tag{2}$$

Керування потоками

Міське керівництво зацікавлене в мінімізації загальних транспортних витрат. Впливати на ці витрати воно може, змінюючи пропускну спроможність доріг, тобто впливаючи на функції витрат.

Нехай $\{R_i \subset E, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ – сімейство множин ребер, керованих за одним принципом, таких що $\forall i,j \in I, R_i \cap R_j = \emptyset$. Позначимо тоді $r = (r_i, i \in I)$ – вектор керування ребрами. Вартість проїзду заданим ребром буде подано в вигляді функції з параметром:

$$t_p = g_e(x_e, r) = g_e(x_e, r_i). \tag{3}$$

Тоді нерівність, що задає рівновагу, набуває вигляду:

$$G(x^\dagger, r)(x' - x^\dagger) \geq 0 \ \forall x' \in X. \tag{4}$$

Нехай також вартість застосування керування задається строго опуклою функцією $K(r) = \sum_{i \in I} K_i(r_i)$. За таких умов отримуємо математичну задачу з обмеженням вигляду варіаційної нерівності:

$$\begin{gathered} G(x^\dagger, r)x^\dagger + K(r) \underset{x^\dagger, r}{\longrightarrow} min, \\ G(x^\dagger, r)(z - x^\dagger) \geq 0 \ \forall z \in X. \end{gathered} \tag{5}$$

Підходи до розв'язання

Дворівнева задача оптимізації. Нехай функції вартості проїзду по ребру $G_e(x,r) = g_e(x_e, r) = g_e\left(\sum_{p \in P} \delta_{p,e} x_p, r\right)$ неперервно диференційовні, строго монотонно зростаючі по x_e. Тоді для довільних $p, k \in P'$ маємо:

$$\frac{\partial G_p(x,r)}{\partial x_k} = \sum_{e\in E} \delta_{p,e} \frac{\partial g_e\left(\sum_{q\in P} \delta_{q,e} x_q, r\right)}{\partial x_k} =$$
$$= \sum_{e\in E} \delta_{p,e}\delta_{k,e} \frac{dg_e\left(\sum_{q\in P} \delta_{q,e} x_q, r\right)}{dx_e} =$$
$$= \frac{\partial G_k(x,r)}{\partial x_p}.$$

Звідси, відповідно до теореми Шварца, випливає існування такої функції $F(x,r)$, що $G_p(x,r) = \frac{\partial P(x,r)}{\partial x_p}$. Вона може бути представлена у вигляді:

$$F(x,r) = \sum_{e\in E} \int_0^{\sum_{p\in P} \delta_{p,e} x_p} g_e(z,r)dz. \qquad (6)$$

В такому випадку задача (5) зводиться до дворівневої задачі мінімізації:

$$G(x^\dagger, r)x + K(r) \xrightarrow[x^\dagger, r]{} min, \qquad (7)$$
$$x^\dagger \in arg \min_{x^\dagger \in X} F(x,r).$$

Оскільки функція $G(x,r)$ – строго монотонна, то, відповідно, функція $F(x,r)$ буде строго опуклою.

Метод Каруша-Куна-Такера. Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод Каруша-Куна-Такера [6]. Розглянемо структуру множини X. Кожній парі «джерело-стік» $w \in W$ відповідає обмеження вигляду

$$v_w(x) = \sum_{p\in P_w} x_p - \rho_w = 0.$$

Позначимо $N_w = |P_w|$ – кількість маршрутів на даній парі.

На кожен потік накладається обмеження невід'ємності:

$$h_p(x) = x_p \geq 0, p \in P.$$

Тоді функція Лагранжа для задачі нижнього рівня матиме вигляд:

$$L(x,\lambda,\mu) = F(x,r) - \lambda v(x) - \mu h(x).$$

Тут $\lambda \in \mathbb{R}^m, m = |W|$, а $\mu \in \mathbb{R}^n$, $n = |P|$. У такому випадку отримаємо необхідну умову мінімуму:

$$\nabla_x F(\bar{x},r) = \nabla_x F(x,r) - \lambda \nabla_x v(x) - \mu \nabla_x h(x).$$

Розпишемо її:

$$\begin{cases} G_p(\bar{x},r) - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w, \\ \sum_{p\in P_w} x_p - \rho_w = 0, \\ \lambda_w \geq 0, \\ x_p \geq 0, \\ \mu_p \geq 0, \\ \mu_p x_p = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Тоді задача (7) набуває вигляду оптимізаційної задачі з обмеженнями взаємодоповнення:

$$G(x^\dagger, r)x^\dagger, + K(r) \xrightarrow[x^\dagger, r, \mu, \lambda]{} min$$
$$\begin{cases} G_p(x^\dagger,r) - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w, \\ \sum_{p\in P_w} x_p - \rho_w = 0, w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p^\dagger \geq 0, p \in P, \\ \mu_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p x_p^\dagger = 0, p \in P, \\ r_i \geq 0, i \in I. \end{cases} \qquad (9)$$

Розглянемо величину $\lambda_w N_w = \lambda_w^0$. Для кожного маршруту $p \in P_w$, якщо потік через нього ненульовий, виконується рівність:

$$G_p(x,r) = \lambda_w^0.$$

Тому λ_w^0 – найменша вартість подорожі за парою $w \in W$. Тоді задача (9) може бути представлена у вигляді:

$$\sum_{w\in W} \sum_{p\in P_w} \lambda_w^0 x_p, + K(r) \xrightarrow[x^\dagger, r, \mu, \lambda]{} min$$
$$\begin{cases} G_p(x^\dagger,r) - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w, \\ \sum_{p\in P_w} x_p - \rho_w = 0, w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p^\dagger \geq 0, p \in P, \\ \mu_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p x_p^\dagger = 0, p \in P, \\ r_i \geq 0, i \in I. \end{cases} \qquad (9`)$$

Спрощена гібридна транспортна модель

Дана модель об'єднує одночасно громадський та індивідуальний транспорт. Вона використовує наступні припущення:

- Маршрути громадського транспорту прокладені заздалегідь;

- Кожен маршрут громадського транспорту має лише початкову і кінцеву зупинку;
- Громадський транспорт їздить лише своїми виділеними смугами і ніяк не перетинається з індивідуальним;
- Кожен пасажир приймає рішення: щодо використання типу транспорту. При цьому має повну інформацію щодо всіх можливих маршрутів.

Доповнимо ребра графа E ребрами $e_w^* \in E^*, w \in W$, що відповідають маршрутам громадського транспорту. Відповідно, кожне з цих ребер породжує новий маршрут $p^* \in P^*$на $w \in W$. Кожному маршруту $p \in P^*$ відповідає його інтенсивність $r_p \geq 0$, а також $K_p > 0$ – вартість обслуговування одиничної інтенсивності. Тоді ці величини утворюють вектори r і K. Загальна множина всіх маршрутів складає $P' = P \cup P^*$.

Позначимо x' – вектор потоків на кожному з маршрутів $p \in P'$, і, відповідно, $G'(x', r)$ – вектор вартостей проїзду, причому

$$G_p'(x', r) = \begin{cases} G_p(x'), p \in P, \\ g_p(x_p, r_p), p \in P^*, \end{cases}$$

тобто вартість поїздки маршрутом громадського транспорту залежить тільки від завантаженості цього маршруту і його інтенсивності.

Тоді транспортна рівновага визначається розв'язком $x^\dagger \in X'$ варіаційної нерівності:

$$G'(x^\dagger, r)(z - x^\dagger) \geq 0 \;\; \forall z \in X'. \qquad (10)$$

В цьому випадку загальна задача набуває відповідно оптимізаційної задачі з обмеженнями вигляду варіаційних нерівностей.

$$\begin{gathered} G'(x^\dagger, r)x + Kr \xrightarrow[x^\dagger, r]{} min, \\ G'(x^\dagger, r)(z - x^\dagger) \geq 0 \; \forall z \in X'. \end{gathered} \qquad (11)$$

Лінійний випадок. Нехай функції вартості проїзду маршрутами мають вигляд:

$$G_p'(x', r) = \begin{cases} C_p x + b_p, p \in P, \\ \dfrac{c_p x_p}{r_p} + b_p, p \in P^*, \end{cases} \qquad (12)$$
$$C_p \in \mathbb{R}^n, n = |P'|.$$

Тоді, підставивши (11) і (12) в (9), отримаємо:

$$G'(x^\dagger, r)x^\dagger, + Kr \xrightarrow[x^\dagger, r, \mu, \lambda]{} min$$
$$\begin{cases} C_p x + b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w, \\ \dfrac{c_p x_p}{r_p} + b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w^*, \\ \sum_{p \in P_w} x_p - \rho_w = 0, w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p x_p = 0, p \in P, \\ r_p > 0, p \in P'. \end{cases}$$

Довизначимо дану систему при $r_p = 0$. Зробимо заміну:

$$\hat{x}_p = \begin{cases} \dfrac{x_p}{r_p}, p \in P^*, r_p > 0, \\ 0, \; p \in P^*, r_p = 0. \end{cases}$$

Тоді $r_p = \frac{\hat{x}_p}{x_p}$ при $x_p > 0$. Також покладемо вектор $\hat{x} = (\hat{x}_p, p \in P^*)$. В цьому випадку роль керування виконуватимуть компоненти x_p вектора x при $p \in P^*$.

$$\sum_{p \in P} (C_p x + b_p) x_p + \sum_{p \in P^*} (c_p \hat{x}_p + b_p) + \sum_{p \in P^*} K_p \frac{\hat{x}_p}{x_p} \xrightarrow[x, \hat{x}, \mu, \lambda]{} min$$
$$\begin{cases} C_p x + b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w, \\ c_p \hat{x}_p + b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w^*, \\ \sum_{p \in P_w'} x_p - \rho_w = 0, w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p \geq 0, p \in P, \\ \mu_p x_p = 0, p \in P, \\ \hat{x}_p \geq 0, p \in P'. \end{cases} \qquad (13)$$

На ній задача (13) набуває вигляду:

Зафіксуємо деяку множину індексів

$$\Lambda = \{p \in P' | \mu_p = 0\}.$$

$$\sum_{p\in P}(C_p x + b_p)x_p + \sum_{p\in P^*}\left(c_p\hat{x}_p + b_p\right) + \sum_{p\in P^*\cap\Lambda} K_p \frac{\hat{x}_p}{x_p} \xrightarrow[x,\hat{x},\mu,\lambda]{} min$$

$$\begin{cases} C_p x + b_p - \lambda_w N_w = 0, p \in P_w \cap \Lambda, \\ C_p x + b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, x_p = 0, p \in P_w \cap (P \setminus \Lambda), \\ c_p\hat{x}_p + b_p - \lambda_w N_w = 0, p \in P_w^* \cap \Lambda, \\ b_p - \lambda_w N_w - \mu_p = 0, p \in P_w^* \cap (P \setminus \Lambda), \\ \sum_{p\in P_w'} x_p - \rho_w = 0, w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p \geq 0, p \in P \cap (P \setminus \Lambda), \\ \mu_p \geq 0, p \in P \cap \Lambda, \\ \hat{x}_p \geq 0, p \in P'. \end{cases} \quad (14)$$

Зафіксуємо $w \in W$. Тоді для довільного $\lambda_w \geq 0$ система рівнянь

$$C_p x + b_p - \lambda_w N_w = 0, p \in P_w \cap \Lambda$$

має єдиний розв'язок $x^{(w)}(\lambda_w) = \lambda_w a^{(w)} + d^{(w)}$. Підставивши його в рівняння $\sum_{p\in P_w'} x_p - \rho_w = 0$, отримаємо:

$$\sum_{P_w^*\cap\Lambda} x_p = \rho_w - \sum_{P_w\cap\Lambda} \lambda_w a^{(w)} + d^{(w)}$$

Позначивши вектор $\tilde{x} = \left(x_p, p \in P^*\right)$ вектором керування, вказавши, що вектор μ, не впливає на розв'язок і виконавши перетворення, аналогічні (9`), ми отримаємо задачу оптимізації опуклої функції на опуклій множині:

$$\lambda\rho + \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w^*\cap\Lambda} K_p \frac{b_p - \lambda_w N_w}{c_p x_p} \xrightarrow[\tilde{x},\lambda]{} min$$

$$\begin{cases} x^{(w)}(\lambda_w) = \lambda_w a^{(w)} + d^{(w)}, P_{w\cap\Lambda}, \\ \hat{x}_p = \dfrac{b_p - \lambda_w N_w}{c_p}\ 0, p \in P_w^* \cap \Lambda, \\ \sum_{P_w^*\cap\Lambda} x_p = \rho_w - \sum_{P_{w\cap\Lambda}}\left(\lambda_w a_p^{(w)} + d_p^{(w)}\right), w \in W, \\ \lambda_w \geq 0, w \in W, \\ x_p \geq 0, p \in P \cap (P \setminus \Lambda), \\ \lambda_w \leq min\{b_p | p \in P_{w\cap\Lambda}\}, \\ \rho_w - \sum_{P_{w\cap\Lambda}}\left(\lambda_w a_p^{(w)} + d_p^{(w)}\right) \geq 0, \\ \hat{x}_p \geq 0, p \in P'. \end{cases} \quad (15)$$

Очевидно, що вона має множину розв'язків, яким відповідає множина векторів $\{(x,r)_\Lambda\}$ і число $G_\Lambda((x,r)_\Lambda)$ – значення цільової функції. Відповідно, розв'язком задачі (13) буде $\arg\min_\Lambda G_\Lambda((x,r)_\Lambda)$.

Висновки

В статті розглянуто задачу оптимізації транспортних потоків на прикладі моделі Бекмана. Її зведено до задачі дворівневої оптимізації, а також досліджено її для окремого випадку, коли функції виплат лінійні за значеннями потоків.

Задача оптимізації транспортних потоків має високу обчислювальну складність. Навіть в найпростішому випадку, де функції витрат є лінійними, вона розбивається на 2^N задач опуклої оптимізації, де N – кількість маршрутів, а враховуючи, що кількість маршрутів теж зростає експоненційно з ростом міста, проблеми з обчисленням виникають досить швидко.

Для подолання цієї проблеми можна накласти обмеження на кількість маршрутів для кожної пари стік-витік або використати модель, відмінну від моделі Бекмана.

Список використаних джерел

1. *Гасников А. В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Гасников А.В., Кленов С.Л., др. — Москва, МФТИ, 2010. — 362 с.
2. *Wardrop J. G.* Some theoretical aspects of road traffic research. / J. G. Wardrop, J. I. Whitehead. — ICE Proceedings: Engineering Divisions, Volume 1, Issue 5, 1952. — pp. 72-73.
3. *M. Beckman* Studies in Economics of Transportation. / M. Beckman, C. McGuire, and C. Winsten. — Yale University Press, New Haven, 1956. — pp. 767–768.
4. *Sandholm W H.* Evolutionary Implementation and Congestion / William H. Sandholm. — Oxford, Review of Economic Studies, 69, 2002. — pp. 667-689.
5. *Braess D.* Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. / D. Braess. — Unternehmensforschung 12, 1969. — pp. 258–268.
6. *Allende G. B.* Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: Solution Techniques from Parametric Optimization / Gemayqzel Bouza Allende. — University of Twente, 2006. — 161 p.

References

1. GASNIKOV A. V., KLENOV S. L., etc. (2010). *Introduction into transport flows mathematical modelling.* Moscow, MPhTI.
2. J. G. WARDROP, J. I. WHITEHEAD (1952). *Some theoretical aspects of road traffic research*. ICE Proceedings: Engineering Divisions, Volume 1, Issue 5. pp. 72-73.
3. M. BECKMAN, C. MCGUIRE, and C. WINSTEN (1956). *Studies in Economics of Transportation.* New Haven: Yale University Press. pp. 767–768.
4. W. H. SANDHOLM (2002). *Evolutionary implementation and congestion pricing.* Oxford: Review of Economic Studies, 69. pp. 667-689.
5. D. BRAESS (1969). *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung.* Unternehmensforschung 12. pp. 258–268.
6. GEMAYZEL BUOZA ALLENDE (2006). *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: Solution Techniques from Parametric Optimization*. University of Twente.

Надійшла до редколегії 22.05.2015