УДК 512.53

Тетяна В. Турка, к. ф.-м. наук

Центр напівгрупи відповідностей

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», 84116, Україна, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19,
e-mail: tvturka@gmail.com

Tetiana V. Turka, Ph. D.

The Center of Semigroup of Correspondences

Donbass State Pedagogical University, 84116, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk, Batyk str, 19.
e-mail: tvturka@gmail.com

У даній роботі описано центр напівгрупи відповідностей скінченної групи. Введено означення суперцентрального автоморфізму скінченної групи. Показано, що кожний автоморфізм циклічної групи є суперцентральним. Доведено, що центр напівгрупи відповідностей скінченної групи ізоморфний групі суперцентральних ізоморфізмів групи.

Ключові слова: центр напівгрупи, суперцентральний автоморфізм, напівгрупа відповідностей.

The problem of learning the semigroups of correspondences was set by Kurosh O. H. at his time. The work presents the centre of the semigroup of correspondences of the finite group. It is introduced the definition of the supercentral automorphism of the finite groups. We show that every automorphism of the cyclic group is supercentral and each homotecia of the vector space is the supertsentral automorphism of the additive group of this space. It is proved that the set of all supercentral automorphisms form a subgroup of the group of the automorphisms of the finite group. It is also proved that the center the semigroup of the correspondences of the finite group is isomorphic to the group of the supercentral isomorphisms of the group. As a result, it is stated that the center of the semigroups of correspondences of the finite group is isomorphic to the group of the automorphisms of the finite group. It should be noted that if the finite group is a cyclic group or elementary abelian group, then the semigroup of correspondences has nontrivial center. If the group is generated by the element of order 2, then its semigroup of correspondences has the trivial center.

Key Words: center of a semigroup, supercentral automorphism, semigroup of correspondences

1 Вступ

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G \times G$ розглядати як бінарне відношення на G, то множина $S(G)$ всіх підалгебр з $G \times G$ є напівгрупою відносно деморганівського добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називається *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

Задачу вивчення напівгруп відповідностей поставив ще в кінці 60-х років минулого століття відомий математик Курош О.Г. (див. [1]). Напівгрупи відповідностей довільних універсальних алгебр вивчав Іскандер [2]. Напівгрупи відповідностей скінченних груп вивчались, зокрема, в [3] і [4]. У даній роботі описується будова центра напівгрупи відповідностей скінченної групи.

У роботі [3] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G \times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

2 Центр напівгрупи відповідностей

Нагадаємо, що центром $Z(T)$ напівгрупи T називається множина

$$Z(T) = \{a \in T \mid ax = xa \ \text{ для всіх } x \in T\}.$$

Зауважимо, що у випадку напівгрупи відповідностей $S(G)$ її центр $Z(S(G))$ завжди містить одиницю напівгрупи — діагональне відношення Δ, і нуль напівгрупи — пусте відношення (останнє — у випадку, коли пусте відношення включається в $S(G)$). Якщо центр містить лише ці елементи, будемо називати його *тривіальним.*

Твердження 1. *Нехай G — довільна універсальна алгебра. Якщо ненульовий елемент $A \in S(G)$ належить центру $Z(S(G))$ напівгрупи відповідностей $S(G)$, то проекція елемента $A \subseteq G \times G$ на кожен множник збігається з G.*

Доведення. Для довільного бінарного відношення $\varphi \subseteq G \times G$ маємо рівності, які легко перевіряються безпосередньо:

$$\begin{aligned} \varphi \circ (G \times G) &= \mathrm{pr}_1\ \varphi \times G, \\ (G \times G) \circ \varphi &= G \times \mathrm{pr}_2\ \varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Повне відношення $G \times G$ є елементом напівгрупи відповідностей $S(G)$. Тому з рівностей (1) випливає, що для довільного ненульового елемента $A \in Z(S(G))$ виконується рівність

$$\mathrm{pr}_1\ A \times G = G \times \mathrm{pr}_2\ A.$$

Але тоді

$$\mathrm{pr}_1 A = G, \qquad G = \mathrm{pr}_2 A.$$ □

Нехай тепер G є групою,

$$A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$$

— елемент із центру $Z(S(G))$ її напівгрупи відповідностей $S(G)$. Із твердження 1 випливає, що $G_1 = G_2 = G$.

Лема 1. *Якщо елемент*

$$A = (H_1, G, H_2, G, \varphi)$$

напівгрупи відповідностей $S(G)$ належить центру, то $H_1 = H_2 = E$ і $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$.

Доведення. Розглянемо елемент

$$B = (E, E, G, G, \varepsilon),$$

де ε — тривіальний автоморфізм одиничної групи. Тоді

$$B \circ A = (E, E, G, G, \varepsilon) = B,$$

$$A \circ B = (H_1, H_1, G, G, \varepsilon).$$

Отже, $H_1 = E$.

Аналогічно для елемента

$$C = (G, G, E, E, \varepsilon)$$

маємо:

$$A \circ C = (G, G, E, E, \varepsilon) = C,$$

$$C \circ A = (G, G, H_2, H_2, \varepsilon).$$

Тому $H_2 = E$.

Оскільки обидва фактори тепер дорівнюють $G/E \simeq G$, то $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$. □

Автоморфізм φ групи G будемо називати *суперцентральним*, якщо він комутує з усіма ізоморфізмами факторів групи G у тому сенсі, що для довільних підгруп G_1, H_1, G_2, H_2, таких, що $G_1 \triangleright H_1$, $G_2 \triangleright H_2$ і $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$, і для довільного ізоморфізму $\psi : G_1/H_1 \to G_2/H_2$ виконується рівність

$$\varphi(\psi(gH_1)) = \psi(\varphi(gH_1)) \tag{2}$$

для довільного $g \in G_1$.

Зрозуміло, що тотожний автоморфізм є суперцентральним. Розглянемо менш тривіальні приклади.

Твердження 2. *Кожен автоморфізм циклічної групи є суперцентральним.*

Доведення. Це очевидно для нескінченної циклічної групи Z, де є всього 2 автоморфізми: тотожний і $x \mapsto -x$.

Нехай тепер Z_n — циклічна група порядку n. Кожен автоморфізм групи Z_n має вигляд $\varphi_k : x \mapsto kx$, де елемент $k \in Z_n^*$ — фіксований. Для автоморфізма φ_k рівність (2) набуває вигляду

$$k \cdot \psi(g + N_1) = \psi(k \cdot (g + H_1))$$

і є правильною. □

Елементарну абелеву групу Z_p^n зручно розглядати як адитивну групу n–вимірного векторного простору над полем Z_p. Тоді підгрупи збігатимуться з підпросторами, а автоморфізми — з невиродженими лінійними перетвореннями. Тому аналогічно попередньому доведенню для групи Z_n доводиться

Твердження 3. *Для довільного елемента $k \in Z_p^*$ гомотетія $\varphi_k : x \mapsto kx$ є суперцентральним автоморфізмом адитивної групи векторного простору Z_p^n.*

Твердження 4. *Нехай G — скінченна група.*

a) Якщо φ — суперцентральний автоморфізм, то для кожної підгрупи $H \leqslant G$ виконується рівність $\varphi(H) = H$.

b) Множина всіх суперцентральних автоморфізмів утворює підгрупу групи Aut G.

Доведення. a) Нехай $H \leqslant G$ — довільна підгрупа, φ — суперцентральний автоморфізм,

$$\varepsilon : H/E \to H/E$$

— тотожний ізоморфізм і g — довільний елемент із H. Тоді з рівності (2) випливає, що $\varphi(g) = \varepsilon(\varphi(g))$. Оскільки ε визначений лише на підгрупі H, то $\varphi(g) \in H$.

b) Позаяк група G — скінченна, то всі автоморфізми мають скінченний порядок. Тому досить перевірити лише замкненість множини суперцентральних автоморфізмів відносно множення. Нехай φ_1 і φ_2 — суперцентральні автоморфізми. Враховуючи a), замкненість відносно множення випливає з такого ланцюжка рівностей:

$$\begin{gathered}(\varphi_1\varphi_2)(\psi(gH_1)) = \varphi_2(\varphi_1(\psi(gH_1))) = \\ = \varphi_2(\psi(\varphi_1(gH_1))) = \\ = \varphi_2(\psi(\varphi_1(g)H_1)) = \psi(\varphi_2(\varphi_1(g)H_1)) = \\ = \psi(\varphi_2(\varphi_1(gH_1))) = \psi((\varphi_1\varphi_2)(gH_1)).\end{gathered}$$ □

Теорема 1. *Центр $Z(S(G))$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ скінченної групи G збігається з множиною елементів вигляду $A = (E, G, E, G, \varphi)$, де φ — суперцентральний автоморфізм групи G.*

Доведення. Із твердження 1 і леми 1 випливає, що кожен елемент $A \in Z(S(G))$ має вигляд $A = (E, G, E, G, \varphi)$, де $\varphi \in \operatorname{Aut} G$. Покажемо спочатку, що $\varphi(H) = H$ для кожної підгрупи $H \leqslant G$. Справді, якщо $H \leqslant G$, то $H \times H$ є елементом напівгрупи $S(G)$. Але

$$(H \times H) \circ A = H \times \varphi(H),$$

$$A \circ (H \times H) = (\varphi^{-1}(H) \times H).$$

Тому якщо $A \in Z(S(G))$, то $\varphi(H) = H$.

Розглянемо тепер довільний елемент $B = (H_1, G_1, H_2, G_2, \psi)$ напівгрупи $S(G)$. Запишемо B у вигляді

$$B = \bigcup_i (g_iH_1, g_i'H_2),$$

де $g_i'H_2 = \psi(g_iH_1)$. Безпосередньо перевіряється, що

$$\begin{gathered}B \circ A = \bigcup_i (g_iH_1, \varphi(g_i')H_2), \\ A \circ B = \bigcup_i (\varphi^{-1}(g_i)H_1, g_i'H_2).\end{gathered} \tag{3}$$

Якщо $A \circ B = B \circ A$, то $\varphi^{-1}(g_i)H_1 = g_jH_1$ для деякого g_j. Тому $g_iH_1 = \varphi(g_j)H_1$. Крім того, має бути

$$(\varphi^{-1}(g_i)H_1, g_i'H_2) = (g_jH_1, \varphi(g_j')H_2).$$

Але тоді

$$\begin{gathered}\psi(\varphi(g_jH_1)) = \psi(\varphi(g_j)H_1) = \psi(g_iH_1) = \\ = g_i'H_2 = \varphi(g_j')H_2 = \varphi(g_j'H_2) = \\ = \varphi(\psi(g_jH_1)).\end{gathered} \tag{4}$$

Оскільки елемент $g_j \in G_1$ може бути довільним, то це доводить виконання умови (2). Отже, автоморфізм φ є суперцентральним.

Навпаки, якщо φ — суперцентральний автоморфізм групи G, то для елемента $A = (G, E, G, E, \varphi)$ і довільного елемента $B = (G_1, H_1, G_2, H_2, \psi)$ із рівності $g_iH_1 = \varphi(g_j)H_1$ і рівностей (4) випливає, що праві частини в (3) будуть збігатися. А тому $A \circ B = B \circ A$ і A належить центру напівгрупи $S(G)$. □

Наслідок 1. *Центр $Z(S(G))$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ скінченної групи G ізоморфний групі суперцентральних автоморфізмів групи G.*

Доведення. Оскільки

$$(G, E, G, E, \varphi) \circ (G, E, G, E, \psi) =$$

$$= (G, E, G, E, \varphi\psi),$$

то це випливає з теореми 1 і твердження 4.b). □

Наслідок 2. *Якщо група автоморфізмів* $\mathrm{Aut}\, G$ *групи* G *має тривіальний центр, то й напівгрупа відповідностей* $S(G)$ *має тривіальний центр.*

Доведення. Це випливає з теореми 1 і того, що кожний суперцентральний автоморфізм належить центру групи $\mathrm{Aut}\, G$. □

Наслідок 3. *Якщо* G *є циклічною групою* Z_n *(де* $n > 2$*) або елементарною абелевою групою* Z_p^n *(де* $p > 2$ *— просте), то напівгрупа відповідностей* $S(G)$ *має нетривіальний центр.*

Доведення. Із тверджень 2 і 3 випливає, що в цих випадках існують нетривіальні суперцентральні автоморфізми. За теоремою 1 кожен із таких автоморфізмів дає нетривіальний елемент із центру напівгрупи $S(G)$. □

Наслідок 4. *Якщо група* G *породжується елементами порядку* 2, *то її напівгрупа відповідностей* $S(G)$ *має тривіальний центр.*

Доведення. Із твердження 4.a) випливає, що кожний суперцентральний автоморфізм лишає нерухомими елементи порядку 2. А тому коли група породжується елементами порядку 2, то суперцентральним буде тільки тотожний автоморфізм. □

Зауважимо, що умову наслідку 4 задовольняють, зокрема, елементарна абелева 2–група Z_2^n, діедральна група D_n, симетрична група S_n і знакозмінна група A_n ($n > 4$).

Список використаних джерел

1. *Курош А.Г.* Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года) / А.Г. Курош // М.: Наука — 1974. — С. 160.
2. *Искандер А.А.* Структура соответствий универсальной алгебры / А.А. Искандер // Изв. АН СССР, серия матем. — 1965. — №29 — С.1357–1372.
3. *Ганюшкін О.Г.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — № 3. — С. 9–13.
4. *Турка Т.* Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи / Т.В. Турка // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — № 4. — С. 38-42.

References

1. *KUROSH, A.G.,* (1974) *General algebra (lectures 1969-70 school years)* – M.: Nauka.–160 p.
2. *ISKANDER A.A.* (1965) *Structure of correspondence to a universal algebra* Izv.AN SSSR. Series: Mathematics, № 29. P. 1357–1372
3. *GANYUSHKIN O., TURKA T.* (2009) *The order of semigroups of correspondence of finite group* - The Bulletin of the University of Kiev. Series: Mechanics and mathematics, № 3. P. 9–13.
4. *TURKA T.* (2010) *Green's relations at semigroup of correspondences of finite group* The Bulletin of the University of Kiev. Series: Mechanics and mathematics, № 4. P. 38–42.

Received: 01.10.2014