

УДК 627.324.2/3:532.72

Власюк А.П.¹, д.т.н., проф.,
Цветкова Т.П.², ст. викл.

**Математичне моделювання
масоперенесення солей при
нестационарній фільтрації і
вологперенесенні в насичено-
ненасиченому ґрунтовому масиві**

¹Міжнародний економіко-гуманітарний
університет імені акад. С. Дем'янчука, 33027,
м. Рівне, вул. Степана Дем'янчука, 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

²Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: Tsvetkova@ukr.net

A.P. Vlasyuk¹, Doctor of science, prof.,
T.P. Tsvetkova², senior teacher

**Mathematical modelling of salts mass
transfer under non-stationary filtration
and moisture transfer in saturated non-
saturated soil mass**

¹International university of economics and
humanities named after academician Stepan
Demyanchuk, 33027, Rivne, Stepan Demyanchuk
st, 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

²National University of Water Management
National Resources Use, 33000 Rivne, Soborna st,
11, e-mail: Tsvetkova@ukr.net

Проведено математичне моделювання процесу масоперенесення солей з врахуванням нестационарної фільтрації та вологперенесення в насичено-ненасиченому ґрунті у двовимірному нелінійному випадку. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць. В результаті програмної реалізації задачі проведені чисельні експерименти і здійснено їх аналіз.

Ключові слова: масоперенесення, вологперенесення, нестационарна фільтрація, повне і неповне насичення, концентрація, напір.

The mathematical modelling was carried out of the process of mass transfer of salts taking into account non-stationary filtration and moisture transfer in saturated-non-saturated soil with two-dimensional non-linear case. On the basis of the built mathematical model of this boundary problem the research has been conducted of the process of salt transfer to the drain in the area of complete saturation and of the process of moisture transfer taking into account salt transfer in the area of incomplete soil saturation. The comprehensive study is carried out of the process of salt transfer in areas of complete and incomplete saturation. For this purpose these areas of water saturation are considered as one entity with common unknown boundary which is in the process of problem solution. This gave the possibility to find the interconnection between investigated processes and to carry out their forecast in the area of saturated-non-saturated soil medium. Numeric solution of corresponding boundary problem were found by the method of finite differences. As the result of the programme implementation of the problem numeric experiments were carried out and their analysis was conducted.

Key Words: mass transfer, moisture transfer, non-stationary filtration, complete and incomplete saturation, concentration, head.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Підтоплення територій населених пунктів та інших земельних ділянок відбувається унаслідок підйому рівня ґрунтових вод (РГВ). Основні способи боротьби з підтопленнями та негативним впливом ґрунтових вод базуються на будівництві різного типу дренажних систем. Вибір оптимальних заходів повинен розглядатися

на основі прогнозу протікання даних процесів та фізико-хімічних показників з врахуванням техногенних і природно-кліматичних чинників. Тому для управління водними ресурсами необхідно детально дослідити процеси, що протікають у ґрунтових масивах, а саме: вологперенесення, що описує динаміку руху

вологи, - в ненасиченому ґрунті, фільтрацію – в насиченому ґрунті, масоперенесення – поширення забруднення та засолення ґрунтів. Процеси фільтрації та масоперенесення в насичених ґрунтах розглянуто в [1-3], теоретичні основи вологоперенесення розглядалися окремо в областях повного і неповного насичення. Крім того, процес вологоперенесення розглядався без врахування масоперенесення та впливу осмотичних явищ. У даній роботі здійснено комплексне дослідження процесу масоперенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві у нелінійному двовимірному випадку.

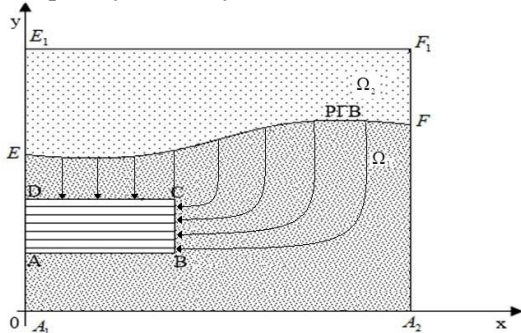


Рис. 1 Фільтрація сольового розчину до горизонтального дренажу

Потрібно дослідити процеси нестационарної фільтрації солевих розчинів до дрени в області повного насичення Ω_1 і вологоперенесення в області неповного насичення Ω_2 з врахуванням перенесення солей в обох областях.

Математична модель задачі. Математична модель процесу масоперенесення при нестационарній фільтрації солевих розчинів в області повного насичення Ω_1 у загальноприйнятих позначеннях описується диференціальними рівняннями вигляду [1-5]

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = a \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (2)$$

$$v_x^1(c_1) = -k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$v_y^1(c_1) = -k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y},$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AA_1 \cup A_1A_2 \cup A_2F \cup DE} = 0; \quad (4)$$

$$h_1(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_1|_{EF} = y, \quad h_1|_{ABCD} = \tilde{H}_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial n} \Big|_{AA_1 \cup A_1A_2 \cup A_2F \cup DE} = 0.$$

Процес масоперенесення солей при вологоперенесенні в області неповного насичення ґрунту Ω_2 описується наступною математичною моделлю [1-5]:

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2(c_2 - C^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right), \quad (7)$$

$$v_x^2(c_2) = -k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (8)$$

$$v_y^2(c_2) = -k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y},$$

$$c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0^2(x, y), \quad (9)$$

$$c_2|_{E_1F_1} = \tilde{C}_2, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{EE_1 \cup F_1F} = 0,$$

$$h_2(x, y, 0) = \tilde{H}_0^2(x, y), \quad h_2|_{EF} = y, \quad \frac{\partial h_2}{\partial n} \Big|_{EE_1 \cup F_1F} = 0. \quad (10)$$

На межі областей повного і неповного насичення (вільній поверхні) EF задані умови спряження для напорів, концентрації солевих розчинів і потоків солі відповідно:

$$h_1|_{EF} = h_2|_{EF}, \quad c_1|_{EF} = c_2|_{EF}, \quad (11)$$

$$[q] = 0 \text{ або } v_1c_1 - D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} = v_2c_2 - D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n}.$$

На дрени $ABCD$ задані наступні граничні умови:

$$\frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{ABCD} = 0 \text{ або } \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x} \Big|_{CB} = 0.$$

Чисельний метод розв'язування задачі. Для знаходження чисельного розв'язку поставленої крайової задачі використано метод скінченних різниць [6].

Для знаходження чисельного розв'язку задачі нестационарної фільтрації модифікуємо локально-одновимірну схему (ЛОС) О.А.

Самарського [6] на випадок нелінійної крайової задачі.

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{\partial h_1}{\partial t}. \quad (13)$$

Для (12), (13) побудовано неявну різницеву схему, чисельний розв'язок якої знайдено методом прогонки.

$$\frac{H_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2H_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} + H_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{C_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{H_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{1,i,j}^k}{0,5\tau}, \quad (14)$$

$$H_{1,i,j}^0 = \tilde{H}_1^1, \quad H_{1,0,j}^{k+\frac{1}{2}} = H_{1,1,j}^k, \quad H_{1,n,j}^{k+\frac{1}{2}} = H_{1,n-1,j}^1, \\ i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1};$$

$$\frac{H_{1,i,j-1}^{k+1} - 2H_{1,i,j}^{k+1} + H_{1,i,j+1}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{C_{1,i,j-1}^{k+1} - 2C_{1,i,j}^{k+1} + C_{1,i,j+1}^{k+1}}{h_1^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{H_{1,i,j}^{k+1} - H_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau}, \quad (15)$$

$$H_{1,i,j}^0 = \tilde{H}_0^1, \quad H_{1,i,0}^{k+1} = H_{1,i,1}^k, \quad H_{1,i,m}^{k+1} = H_{1,i,m-1}^1, \\ i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

Для знаходження розв'язку задачі (1), (3), (5) при повному насиченні модифікуємо ЛОС [6] на випадок нелінійної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\nu_x(c_1)}{D_1(c_1)} \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} (c_1 - C^*) = 0,5\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\nu_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h}{\partial x} + \nu(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\nu_y(c_1)}{D_1(c_1)} \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} (c_1 - C^*) = 0,5\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\nu_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h}{\partial y} + \nu(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \quad (19)$$

при відповідних крайових умовах, заданих на межі області повного насичення.

Розв'язок відповідних крайових задач (18), (20) знайдено з використанням монотонної різницевої схеми та методу прогонки у вигляді

$$C_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{1,i+1,j} C_{1,i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{1,i+1,j}, \quad (20)$$

$$\alpha_{1,i+1,j}^1 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{1,i,j}^1 a_3}, \quad \beta_{1,i+1,j}^1 = \frac{a_3 \beta_{1,i,j}^1 + f_3}{c_3 - \alpha_{1,i,j}^1 a_3},$$

$$\alpha_{1,0,i} = 0, \quad \beta_{1,0,i} = C_{1,0,i}^{k+\frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}}{h_1},$$

$$b_3 = \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1}, \quad f_3 = \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau} C_{1,i,j}^k - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} C_1^*,$$

$$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

$$C_{1,i,j}^{k+1} = \alpha_{1,i,j+1} C_{1,i,j+1}^{k+1} + \beta_{1,i,j+1}, \quad (21)$$

$$\text{де } \alpha_{1,i,j+1} = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_{1,i,j} a_4}, \quad \beta_{1,i,j+1} = \frac{a_4 \beta_{1,i,j} + f_4}{c_4 - \alpha_{1,i,j} a_4},$$

$$\alpha_{1,i,0} = 0, \quad \beta_{1,i,0} = C_{1,i,0}^{k+1}, \quad a_4 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1}, \quad b_4 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1},$$

$$c_4 = -\frac{2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_1} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} - \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau},$$

$$f_4 = \frac{\sigma_1}{D_1(c_1)\tau} C_{1,i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} C_1^*,$$

$$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

Побудову чисельного алгоритму знаходження розв'язку задачі масоперенесення солей з врахуванням вологоперенесення (6)-(10) в області неповного насичення ґрунту здійснено аналогічно попередній задачі з використанням ЛОС [6]. Рівняння вологоперенесення представимо у вигляді двох одновимірних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} = 0,5 \frac{\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = 0,5 \frac{\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (23)$$

Для знаходження розв'язку задач (22), (23) застосовано неявну різницеву схему та метод прогонки. В результаті чого знайдено розв'язок (22) у наступному вигляді:

$$H_{2i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j} H_{2i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j}, \quad (24)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j} = \frac{b_5}{c_5 - \alpha_{i,j} a_5}, \quad \beta_{i+1,j} = \frac{a_5 \beta_{i,j} + f_5}{c_5 - \alpha_{i,j} a_5}, \quad \alpha_{i,j} = 0$$

$$\beta_{i,j} = H_{0,j}^{k+1/2}, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

Загальний розв'язок задачі вологоперенесення для (23) знаходимо у вигляді

$$H_{2i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1} H_{2i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}, \quad (25)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j+1} = \frac{b_6}{c_6 - \alpha_{i,j} a_6}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{a_6 \beta_{i,j} + f_6}{c_6 - \alpha_{i,j} a_6}, \quad \alpha_{0,i} = 0,$$

$$\beta_{i,0} = H_{2,i,0}^{k+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

В результаті знаходження розв'язку задачі вологоперенесення, знайдено розв'язок задачі масоперенесення солей в даній області водонасичення. Для цього модифікуємо ЛОС для задачі масоперенесення солей при вологоперенесенні (6), (8), (10).

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - \frac{v_x(c_2)}{D_2(c_2)} \frac{\partial c_2}{\partial x} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} (c_2 - C^*) = 0,5\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (26)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}; \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} - \frac{v_y(c_2)}{D_2(c_2)} \frac{\partial c_2}{\partial y} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} (c_2 - C^*) = 0,5\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (28)$$

$$v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y}. \quad (29)$$

при відповідних крайових умовах, заданих на межі області неповного насичення.

Чисельний розв'язок задач (26)-(29) знайдено з використанням монотонної різницевої схеми аналогічно розв'язуванню задач (16), (18) в області повного насичення.

Компоненти швидкості фільтрації знаходимо в результаті апроксимації рівнянь (17), (19), (27), (29). Алгоритм розрахунку вузлів вільної поверхні *EF* побудовано на основі роботи [2], що дає можливість отримати розв'язок задачі в обох підобластях насичено-ненасиченої області.

Програмна реалізація та результати чисельних експериментів. Програмна реалізація і чисельні експерименти проводилися в середовищі візуально-подійного, об'єктно-орієнтованого програмування Microsoft Visual Studio 2012 на мові C# при сталих початкових і граничних умовах з такими вихідними даними:

$$T = 360 \text{ діб}, \quad l_1 = 10 \text{ м}, \quad l_2 = 5 \text{ м}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0,4,$$

$$H_1 = 5 \text{ м}, \quad H_2 = 0,3 \text{ м}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,0065,$$

$$C^* = 350 \text{ г/літр}, \quad \tilde{C}_1 = 10 \text{ г/літр}, \quad \tilde{C}_2 = 40 \text{ г/літр},$$

$$k(c) = 0,0002c^6 - 0,00088c^5 + 0,162c^4 - 1,3194c^3 +$$

$$+ 3,9229c^2 + 0,0223c + 18,187,$$

$c \in [0;1]$ - безрозмірна величина [4].

В результаті програмної реалізації побудованого обчислювального алгоритму розв'язування задачі нестационарної фільтрації та вологоперенесення у відповідних областях отримали поле розподілу напорів рідини в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві (рис. 2).

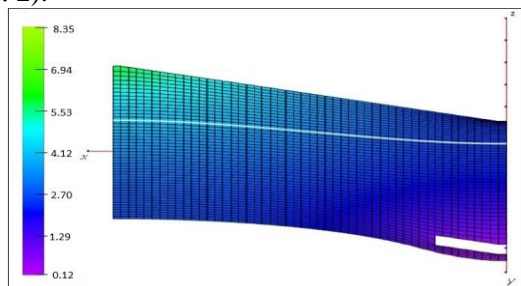


Рис. 2 Розподіл поля напорів рідини в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві

Результат сумісного розв'язування задачі масоперенесення солей в областях повного і неповного насичення зображено на рис. 3.

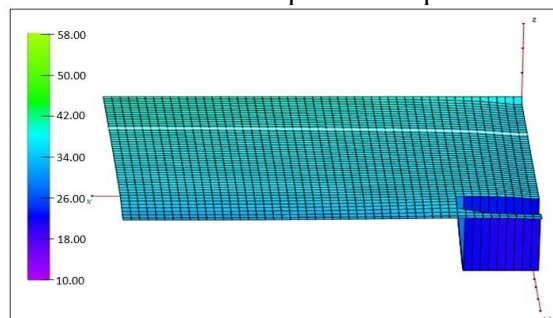


Рис. 3 Графік розподілу концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого ґрунту

В якості чисельного експерименту для встановлення впливу нестационарної фільтрації на процес масоперенесення солей знайдено розв'язок задачі стаціонарної фільтрації. Порівняльні графіки розподілу напорів рідини та концентрації солей мають вигляд (рис. 5, 6)

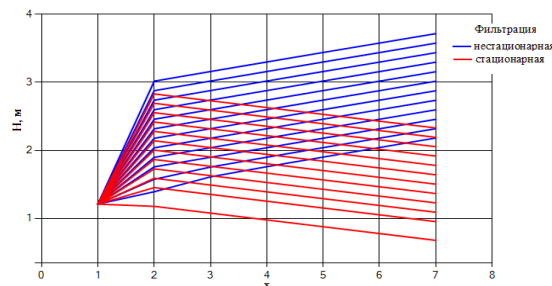


Рис. 5 Графік порівняння розподілу п'єзометричних напорів для задач нестационарної та стаціонарної фільтрації

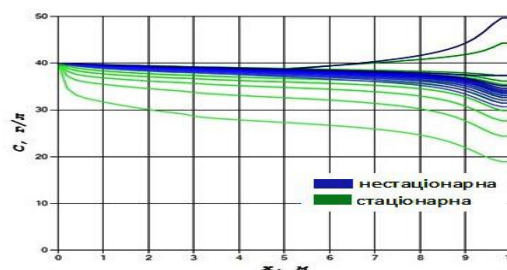


Рис. 6 Графік порівняння розподілу концентрації солей при нестационарній та стаціонарній фільтрації

На основі отриманих результатів програмної реалізації та чисельних експериментів встановлено наступне: в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища розподіл напорів рідини спадає з часом та глибиною (рис. 2); розподіл концентрації солей монотонно спадає з часом та глибиною під дією процесу фільтрації та вимиванням сольових розчинів

через дренаж (рис. 3). Під дією фільтраційних процесів вільна поверхня рухається вниз і її положення змінилося на 40% (рис. 4), що потрібно враховувати при використанні дренажних систем в якості елемента осушувальної системи. В результаті порівняння результатів розв'язків задачі фільтрації встановлено збільшення значень напорів рідини (10-20%) та концентрації солей (10%) при нестационарній фільтрації (рис. 5, 6), що слід враховувати при математичному моделюванні фільтраційних процесів.

6. Висновки. В роботі проведено математичне моделювання процесу масоперенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому

грунтовому середовищі в двовимірному нелінійному випадку. Чисельний розв'язок задачі знайдено методом скінченних різниць з використанням модифікованої ЛОС на випадок нелінійної крайової задачі. В результаті чого встановлено монотонне спадання концентрації сольових розчинів з глибиною по всій області насичено-ненасиченого ґрунту під дією фільтраційного потоку, що обумовлено вимиванням сольових розчинів з пористого середовища через дренаж. При врахуванні нестационарної фільтрації напори рідини зростають інтенсивніше, що призводить до більш швидкого вимивання сольових розчинів з пористого середовища.

Список використаних джерел

1. Веригин Н.Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967). – М.: Наука, 1969. – С. 237-313.
2. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах // И. В.Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Ляшко И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий – К.: Наук. думка, 1991. – 262 с.
4. Власюк А.П. Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і неповного насичення / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Вісник Київськ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 137-144.
5. Власюк А.П. Математичне моделювання процесу солепереносу при фільтрації та вологопереносі в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при наявності рухомої вільної поверхні / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Наук. жур. Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту. – 2014. - №2 (74). – С. 219-233.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

References

1. VERIGIN, N.N. and SHERZHUKOV B.S. (1969) "Diffusion and mass exchange during filtration of liquids in porous media", *Razvitie issledovaniy po teorii filtratsii v SSSR (1917 – 1967)*, Nauka, Moscow, Russia, pp. 237-313.
2. SERGIENKO, I.V., SKOPETSKII, V.V. and DEINEKA, V.S. (1991) *Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie protsessov v neodnorodnykh sredah* [Mathematical Modeling and Investigation of Processes in Inhomogeneous Media], Naukova dumka, Kiev, Ukraine
3. LYASHKO, I.I., DEMCHENKO, L.I. and MISTETSKII G. E. (1991) *Chislennoe reshenie zadach teplo- i massoperenosa v poristyykh sredah* [Numerical Solution of Problems of Heat and Mass Transfer in Porous Media], Naukova dumka, 1991, Kiev, Ukraine
4. VLASYUK, A.P. and TSVETKOVA, T.P. (2012) "Mathematical model of the mass transfer during the filtration and the moisture transfer of salt solutions in full and partial saturation soils", *Visnyk KNU imeni T. Shevchenka, Seriya: fizyko-matematychni nauky*, vol 1, pp. 137-144.
5. VLASYUK, A.P. and TSVETKOVA, T.P. (2014) "Mathematical modelling of process of salt transfer under filtration and moisture transfer in saturated and non-saturated soil mass with available mobile free surface", *Visnyk Ternopil's'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu*, vol. 2 (74), pp. 219-233.
6. SAMARSKII, A.A. (1989) *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, Russia

Надійшла до редколегії 18.09.15