УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., пров.інж.

Дослідження динаміки однієї математичної моделі популяції при малих щільностях популяції жертви

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, senior researcher

Investigation dynamics of mathematical model of the of population with low densities of prey

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

Розглядається система рівнянь динаміки популяцій при малій щільності популяції жертви. Вона має вигляд системи двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, що визначають швидкість розмноження популяції жертви у відсутності хижака, питомої швидкості споживання популяцією хижака жертви при одиничній щільності, природної смертності хижака, величини, зворотної щільності популяції жертви. Визначаються положення рівноваги системи. Проведено дослідження стійкості ненульового положення рівноваги.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання.

The research of stability of the zero position of the equilibrium of a mathematical model describing the dynamics of populations, taking into account the low density of the prey population. The model is a system of two ordinary differential equations with a constant delay. The linear part of the system is a phase coordinate with the corresponding coefficient, nonlinear is a rational vector function. The system has two equilibrium positions. The first is a zero solution and corresponds to the absence of two populations. The second is a stationary point in the first quadrant. A study conducted by the linearization of the system near the non-zero equilibrium position. It is shown that a non-zero equilibrium position is asymptotically stable. Given the time of maturation of individuals, it is believed that a more adequate mathematical model of a system with aftereffect delay type. The initial system is written in the form of quasi-linear, where the coefficients of the linear part of the phase coordinates are dependent on the prehistory. The stability of the equilibrium position of non-zero delay. To study again used the device linearization in the neighborhood of the point. In contrast to the original system, the characteristic equation of the multiplier includes exhibitor delay. The conditions of the asymptotic stability.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay.

Стататтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Вступ

У запропонованій роботі продовжено дослідження математичних моделей динаміки популяцій типу «хижак-жертва», раніше опублікованих у статтях [3-5]. Однією з перших робіт з дослідження математичних моделей динаміки популяцій відносять до [1]. В подальших роботах було складено ряд математичних моделей взаємодіючих популяцій типу «хижак-жертва». Моделі описувались системами двох звичайних диференціальних рівнянь. Більш складні моделі наведені в [2]. Особливістю наведеної роботи є врахування ефекту «запізнення», обумовленого часом «статевого дозрівання популяції».

1. Система без запізнення

Система диференціальних рівнянь динаміки популяцій при малих щільностях популяції жертви має вигляд [2, стор. 53-54]

$$\dot{x}(t) = \left[a - \frac{bx(t)y(t)}{1+Px(t)} \right] x(t),$$

$$\dot{y}(t) = -\left[c - \frac{dx^2(t)}{1+Px(t)} \right] y(t). \qquad (1)$$

Тут a – швидкість росту популяції жертви в умовах відсутності хижака, b – питома швидкість споживання популяцією хижака жертви при одиничній щільності, c – природня смертність хижака, P – величина, зворотня до щільності популяції жертви.

Стани рівноваги системи (1) визначаються системою рівнянь

$$\left[a-\frac{bx(t)y(t)}{1+Px(t)}\right]x(t)=0\,,\ \left[c-\frac{dx^2(t)}{1+Px(t)}\right]y(t)=0\,.$$

Вони є двома особливими точками системи (1) і мають вигляд

$$O(0,0),\ O_1(x_1,y_1),\ x_1=\frac{Pc+\sqrt{P^2c^2+4cd}}{2d}\,,$$

$$y_1=a\frac{Pc+\sqrt{P^2c^2+4cd}}{2bc}\,. \qquad (2)$$

Перша особлива точка являє собою відсутність популяції і не має интересу. Проведемо дослідження другої особливої точки. Система лінійного наближення в околі цієї особливої точки має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=P_x(x,y)\big|_{(x_1,y_1)}(x(t)-x_1)+\\&\quad+P_y(x,y)\big|_{(x_1,y_1)}(y(t)-y_1)\,,\\\dot{y}(t)&=Q_x(x,y)\big|_{(x_1,y_1)}(x(t)-x_1)+\\&\quad+Q_y(x,y)\big|_{(x_1,y_1)}(y(t)-y_1)\,,\end{aligned} \qquad (3)$$

де

$$P(x,y)=\left[a-\frac{bxy}{1+Px}\right]x\,,\ Q(x,y)=-\left[c-\frac{dx^2}{1+Px}\right]y\,.$$

Обчисливши похідні, отримаємо

$$\dot{x}(t)=\left[a-b\left(\frac{1}{(1+Px_1)^2}+\frac{1}{1+P_1}\right)x_1y_1\right](x(t)-x_1)-$$
$$-\frac{bx_1^2}{1+Px_1}(y(t)-y_1)\,.$$

Позначимо

$$a_{11}=a-b\frac{x_1y_1}{1+Px_1}\,,\ a_{22}=-c+d\frac{x_1^2}{1+Px_1}\,,$$
$$b_{11}=-b\frac{x_1y_1}{(1+Px_1)^2}\,,\ b_{12}=-b\frac{x_1^2}{(1+Px_1)^2}\,,$$

$$b_{21}=d\left(\frac{1}{(1+Px_1)^2}+\frac{1}{1+Px_1}\right)x_1y_1\,. \qquad (4)$$

Тоді система лінійного наближення буде мати вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(a_{11}+b_{11})(x(t)-x_1)+b_{12}(y(t)-y_1)\,,\\\dot{y}(t)&=b_{21}(x(t)-x_1)+a_{22}(y(t)-y_1)\,.\end{aligned} \qquad (5)$$

Або у векторно-матричному вигляді

$$\dot{z}(t)=(A+B)z(t),\ \ A=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&0\end{pmatrix},\ z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння системи (5) в зміщеній точці $O_1(x_1,y_1)$ буде мати вигляд

$$\lambda^2+2\sigma\lambda+\Delta=0\,,$$

де

$$\sigma=-\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+b_{11})\,,$$
$$\Delta=[(a_{11}+b_{11})a_{22}-b_{12}b_{21}]\,,$$

Необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості стану рівноваги, згідно критерію Гурвіца для двовимірних систем, буде додатність коефіцієнтів, тобто

$$a_{11}+a_{22}+b_{11}<0\,,\ (a_{11}+b_{11})a_{22}-b_{12}b_{21}>0\,.$$

Підставивши вихідні значення, отримаємо наступні нерівності

$$a-c+x_1\frac{dx_1-by_1}{1+Px_1}-\frac{bx_1y_1}{(1+Px_1)^2}<0\,,$$

$$\left[a-bx_1y_1\frac{x_1y_1}{1+Px_1}\left(1+\frac{1}{1+Px_1}\right)\right]\left(-c+d\frac{x_1^2}{1+Px_1}\right)-$$
$$+bd\frac{x_1^3y_1}{(1+Px_1)^3}\left(1+\frac{1}{1+Px_1}\right)>0\,. \qquad (6)$$

І при виконанні умов (6) другий стан рівноваги є асимптотично стійким.

2. Система з післядією

В роботах [3-5] було запропоновано розглядати вплив запізнення, обумовленого часом дозрівання особи. Диференціальні рівняння (1) в цьому випадку мають вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[a - \frac{bx(t-\tau)y(t-\tau)}{1+Px(t-\tau)}\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t) = -\left[c - \frac{dx^2(t-\tau)}{1+Px(t-\tau)}\right]y(t). \qquad (5)$$

Система рівнянь із запізненням має ті ж стани рівноваги, що і система без запізнення. Дослідження їх будемо проводити з використанням методу лінійного наближения в околі кожної з особливих точок. Особливих точек, як і для системи без запізнення, дві. Ними також є точки $O(0,0)$ і $O_1(x_1, y_1)$.

Знову розглянемо другу точку особливу $O_1(x_1, y_1)$. Система двох рівнянь з запізненням має вигляд

$$\dot{x}(t) = P(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)),$$

$$\dot{y}(t) = Q(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)).$$

Система лінійного наближения в околі другої особливої точки буде мати вигляд

$$\dot{x}(t) = P_{x(t)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(x(t) - x_1) + P_{y(t)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(y(t) - y_1) + P_{x(t-\tau)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(x(t-\tau) - x_1) + P_{y(t-\tau)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(y(t-\tau) - y_1),$$

$$\dot{y}(t) = Q_{x(t)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(x(t) - x_1) + Q_{y(t)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(y(t) - y_1) + Q_{x(t-\tau)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(x(t-\tau) - x_1) + Q_{y(t-\tau)}(x_1, y_1, x_1, y_1)(y(t-\tau) - y_1).$$

Або у вигляді

$$\dot{x}(t) = \left(a - b\frac{x_1 y_1}{1+Px_1}\right)(x(t) - x_1) - b\frac{x_1 y_{11}}{(1+Px_1)^2}(x(t-\tau) - x_1) - b\frac{x_1^2}{(1+Px_1)}(y(t-\tau) - y_1),$$

$$\dot{y}(t) = \left(-c + d\frac{x_1^2}{1+Px_1}\right)(y(t) - y_1) + \left(\frac{1}{(1+Px_1)^2} + \frac{1}{1+Px_1}\right)(x(t-\tau) - x_1)$$

Або у векторно-матричному вигляді

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau). \qquad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},\ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$z(t-\tau) = \begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix},$$

з коефіцієнтами, що обчислені вище в (4).

Характеристичне рівняння системи з запізненням (6) має вигляд

$$\det\left(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} a_{11} + e^{-\lambda\tau}b_{11} - \lambda & e^{-\lambda\tau}b_{12} \\ e^{-\lambda\tau}b_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + \left[(a_{11} + a_{22}) + b_{11}e^{-\lambda\tau}\right]\lambda + \left(a_{11}a_{22} + a_{22}b_{11}e^{-\lambda\tau} - b_{11}b_{21}e^{-2\lambda\tau}\right) = 0.$$

Якщо корені характеристичного рівняння системи без запізнення мають лище від'ємні дійсні частини, то, в силу неперервності, ця властивість зберігається і для систем з запізненням. Тобто, існує $\tau_0 > 0$, що при $0 < \tau < \tau_0$ стаціонарний розв'зок системи з запізнюванням також буде асимптотично стійкий.

Нехай умови асимптотичної стійкості (6) виконуються. Для обчислення «гарантованої» величини запізнення будемо робити наступним чином. Перепишемо характеристичне рівняння у вигляді

$$\lambda^2 - \left[(a_{11} + a_{22}) + b_{11}\right]\lambda + \left(a_{11}a_{22} + a_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}\right) + b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right)\lambda + a_{22}b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right) - b_{11}b_{21}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right) = 0.$$

Позначимо

$$F(\lambda,\tau) = \lambda^2 - \left[(a_{11} + a_{22}) + b_{11}\right]\lambda + \left(a_{11}a_{22} + a_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}\right) + b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right)\lambda + a_{22}b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right) - b_{11}b_{21}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right),$$

$$F(\lambda,0) = \lambda^2 - \left[(a_{11} + a_{22}) + b_{11}\right]\lambda + \left(a_{11}a_{22} + a_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}\right).$$

Тоді

$$F(\lambda,\tau) = F(\lambda,0) + b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right)\lambda +$$
$$+ a_{22}b_{11}\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right) - b_{11}b_{21}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right).$$

Функція $F(\lambda,0)$ за змінною λ являє собою параболу, опуклу вниз. Оскільки умови асимптотичної стійкості (6) виконуються, то корені мають від'ємні дійсні частини. Нехай, для зручності, корені λ_1, λ_2 дійсні, різні від'ємні. Тоді

$$F(\lambda_1,0) = F(\lambda_2,0) = 0.$$

А для довільного λ, що знаходиться між ними

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < 0$$

Буде виконуватись

$$F(\lambda,0) < 0.$$

Взявши $\overline{\lambda} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ отримаємо

$$F(\overline{\lambda},0) < 0, \ F(0,0) > 0.$$

А тоді, в силу неперервності функції $F(\lambda,\tau)$, ця нерівність буде зберігатись і при деякому $0 < \tau < \tau_0$, тобто

$$F(\overline{\lambda},\tau) < 0, \ F(0,) > 0.$$

Це означає, що «збуреним коренем» характеристичного рівняння буде від'ємне число і асимптотична стійкість зберігається і для системи з запізненням.

Список використаних джерел

1. *Malthus T.R.* An Essay on the Principle of Population / T.R. Maltus.- London: Johnson, 1798. – 134 с.
2. *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяцій / А.Д. Базыкин. – Москва: Наука, 1985. – 181 с.
3. *Гаркуша Н.І.* Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. - №4. – С. 135-138.
4. *Гаркуша Н.І.* Динаміка однієї екологічної моделі «хижак-жертва» без врахування вікової структури / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія кібернетика. – 2014. - №14. – С. 22-24.
5. *Гаркуша Н.І.* Отримання оцінки області стійкості положення рівноваги моделі популяції з післядією / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015. - №2. – С. 123-127.

References

1. MALTHUS, T. (1798) *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers.* London: Johnson.
2. BAZYKIN, A. (1985) *Mathematical Biophysics of Interacting Populations.* Moskva: Nauka.
3. GARKUSHA, N. (2014) About One Mathematical Model of the Dynamics of Interacting Population. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №4.– p.135-138.
4. GARKUSHA, N. (2014) The Dynamics of the Ecological Model "Predator-Prey" without Age Structure. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Cybernetics*, №14. - p. 22-24.
5. GARKUSHA, N. (2015) Obtaining the estimation of the stability area of equilibrium in the model of population with aftereffect. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №2.– p.123-127.

Надійшло до редколегії 10.08.2015 р.