УДК 004.42:510.69

Шкільняк О.С., к. ф.-м. н., доцент

Модальні логіки немонотонних часткових предикатів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: me.oksana@gmail.com

O.S. Shkilniak, PhD, Associate Professor.

Modal logics of non-monotone partial predicates

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: me.oksana@gmail.com

Досліджено нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові транзиційні модальні логіки часткових немонотонних предикатів. Описано властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для модальних логік немонотонних предикатів запропоновано числення секвенційного типу. Вказано умови замкнeності секвенцій, описано різновиди таких числень, наведено відповідні секвенційні форми.

Ключові слова: модальна логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

Modal logics have many applications in various fields such as theoretical and applied computer science, philosophy and linguistics. They are usually based on classical predicate logic. However, classical logic has some fundamental restrictions which don't allow taking into account sufficiently incompleteness and partiality of information. Composition-nominative modal logics of partial quasiary predicates is a program-oriented logical formalism based on wide classes of partial mappings over nominative data combined with modal logics. Modal transitional logics (MTL) of partial quasiary predicates are its important variant. In this paper we consider MTL of partial predicates without monotonicity restriction. We study semantic properties of MTL of non-monotone predicates. Depending on restrictions on the transition relation, a number of different classes of MTL can be distinguished. We describe properties of logical consequence relations for sets of formulas specified with states. Then, basing on the defined properties of logical consequence relations, we construct corresponding sequent calculi. We specify various classes of sequent calculi of MTL of non-monotone predicates and reproduce the sequent forms.

Key words: modal logic, predicate, logical sequence, sequent calculus.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Апарат математичної логіки є основою сучасних інформаційних і програмних систем Для опису й моделювання різноманітних предметних областей, специфікації та верифікації програм, для опису інформаційних та експертних систем в останній час успішно використовуються поняття і засоби модальних логік. Традиційні модальні логіки (див., напр., [1]). базуються на класичній логіці предикатів. Проте ця логіка має (див. [2]) принципові обмеження, що ускладнює її застосування в інформатиці й програмуванні. Це зумовлює необхідність побудови програмно-орієнтованих класів логічних формалізмів. Такими формалізмами модального типу є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), які синтезують можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [2]. Важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. В даній роботі вивчаються ТМЛ часткових квазіарних предикатів без обмеження монотонності. Такі логіки запропоновано в [3], семантичні аспекти цих логік розглянуто в [3, 4].

Метою даної роботи є дослідження семантичних властивостей чистих першопорядкових ТМЛ немонотонних часткових предикатів та побудова для цих логік числень секвенційного типу. Основою такої побудови є властивості відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Описано різновиди цих числень, наведено відповідні секвенційні форми.

Поняття, які не визначаються в даній статті, тлумачимо в сенсі робіт [2–4].

© О.С. Шкільняк, 2015

1. Транзиційні модальні системи

Поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) є центральним поняттям КНМЛ. Важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС).

ТМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Im)$, де $Cms = (S, R, Pr, C)$ – композиційна модальна система (вона задає семантичні аспекти світу), Fm – множина формул мови КНМЛ, Im – відображення інтерпретації формул на станах світу. Тут S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\mathrm{R} \subseteq S\times S$ (трактуємо їх як відношення переходу на станах), Pr – множина предикатів на станах, C – множина композицій на Pr.

Ми розглядаємо чисті першопорядкові ТМС. Для них S – це множина алгебр (алгебраїчних систем) вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^VA_\alpha \to \{T, F\}$, $A = \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу. Предикати із Pr_α назвемо *предикатами стану* α. Предикати вигляду ${}^VA \to \{T, F\}$ – *глобальні*.

Для чистих першопорядкових КНМЛ множина композицій задається базовими загальнологічними композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та базовими модальними композиціями.

Нагадаємо, що *V*-*A*-квазіарний предикат – це функція вигляду ${}^VA\to\{T, F\}$, де ${}^VA$ – множина всіх *V*-*A*-іменних множин (ІМ).

Для ІМ задаємо (див. [2]) операції $\|_{-x}$, ∇, $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Квазіарний предикат P еквітонний (монотонний), якщо: $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d' \Rightarrow P(d')\downarrow = P(d)$.

Кожний предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ визначається областю істинності та областю хибності, які предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ задаються так:

$T(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d) = T\}$,

$F(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d) = F\}$.

Предикат $P : {}^VA \to \{T,F\}$ (частково) істинний, або неспростовний, якщо $F(P) = \varnothing$.

Композиції $\neg$ та $\vee$ задамо через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$, $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$, $F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q)$.

Композиція реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ визначається так:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)(d) = f(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Мультимодальні ТМС (ММС) – це ТМС із $R = \{\rhd_i \mid i\in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i, $i\in I$, де кожному $\rhd_i \in R$ зіставлено K_i.

ТМС, в яких $R = \{\rhd\}$, а базова модальна композиція – це $\Box$ (необхідно), названо *загальними*. Загальні ТМС є окремим випадком ММС.

Темпоральні ТМС (ТмМС) – це ТМС, у яких $R = \{\rhd\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box_\uparrow$ (завжди буде) та $\Box_\downarrow$ (завжди було).

Опишемо мову ТМС. Алфавіт мови: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів (сигнатура мови); символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множину Fm формул мови визначаємо індуктивно. Маємо $Ps \subseteq Fm$; а далі задаємо:

$\Phi, \Psi\in Fm \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi\in Fm$;

$\Phi\in Fm$ та $\text{⌘}\in Ms \Rightarrow \text{⌘}\Phi\in Fm$.

Тип КНМС задається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із R для кожного $\text{⌘}\in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності [2].

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах $Im : Ps\times S \to Pr$. При цьому має бути $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$ (базові предикати є предикатами станів). Продовжимо Im до відображення $Im : Fm\times S \to Pr$ інтерпретації формул на станах:

$Im(\neg, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha))$;

$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha))$;

$Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha))$;

$Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо існує } a\in A_\alpha\text{: } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a) = T, \\ F, \text{ якщо } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a) = F \text{ для всіх } a\in A_\alpha, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовуються символи із Ms), належать до предикатів станів.

Визначення Im для формул вигляду $\text{⌘}\Phi$ конкретизуємо залежно від різновидності ТМС.

Розглядаємо випадки загальних ТМС і ТмМС.

Для кожних $\alpha\in S$ і $d\in {}^VA$ задамо:

$Im(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$Im(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S: \alpha\rhd\delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \alpha\rhd\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$Im(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S: \delta\rhd\alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S: \delta\rhd\alpha \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує такого β, що $\alpha\rhd\beta$, то для кожного $d\in {}^VA$ вважаємо $Im(\Box\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ та $Im(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d)\uparrow$.

Якщо для $\alpha \in S$ не існує такого β, що $\beta \triangleright \alpha$, то для кожного $d \in {}^{V}A$ вважаємо $Im(\Box_{\downarrow}\Phi, \alpha)(d)\uparrow$.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

Формула Φ *істинна в ТМС* $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо Φ_{α} неспростовний для всіх $\alpha \in S$. Формула Φ *неспростовна* (*частково* істинна), що позн. $\models \Phi$, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Залежно від умов, накладених на відношення переходу, можна визначати різні класи ТМС. Традиційно розглядають випадки, коли ці відношення рефлексивні, симетричні чи транзитивні.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень переходу назвемо *епістемічними*, або ММС епістемічного типу. Загальні ТМС можна трактувати як окремий випадок епістемічних.

Якщо всі відношення переходу рефлексивні, то в назві ТМС пишемо *R*; якщо транзитивні, то пишемо *T*; якщо симетричні, то пишемо *S*.

Маємо такі типи загальних ТМС, ММС, ТмМС:

R-ТМС, *T*-ТМС, *S*-ТМС, *RT*-ТМС, *RS*-ТМС, *TS*-ТМС, *RTS*-ТМС;
R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС;
R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Розглянемо взаємодію в ТМС модальних композицій із реномінаціями та кванторами.

Символи модальних композицій можна проносити [3] через реномінації.

Теорема 1. Для кожних $\maltese \in Ms$, $\Phi \in Fm$, $d \in {}^{V}A$ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \maltese \Phi(d) = \maltese R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi(d)$.

Звідси отримуємо, що кожна формула вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \maltese \Phi \leftrightarrow \maltese R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ неспростовна (частково істинна).

Для ТМЛ еквітонних предикатів формули вигляду $\maltese \forall x \Phi \to \forall x \maltese \Phi$ та $\exists x \maltese \Phi \to \maltese \exists x \Phi$ неспростовні. Це не так для загального випадку ТМЛ немонотонних (нееквітонних) предикатів.

Зокрема, в [3, 4] для формул $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$ побудовані контрмоделі – ТМС, в яких ці формули спростовуються.

Водночас [3] формули $\Box\exists x\Phi \to \exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi \to \Box\forall x\Phi$ спростовуються вже для ТМЛ еквітонних предикатів. Отже, формули вигляду $\forall x \maltese \Phi \to \maltese \forall x \Phi$ і $\maltese \exists x \Phi \to \exists x \maltese \Phi$ не є істинними.

2. Відношення логічного наслідку

Специфіковані станом формули мають вигляд Φ^{α}, де Φ – формула мови, α – її специфікація (відмітка). Тут $\alpha \in \mathrm{S}$, де S – множина імен станів.

Нехай M – ТМС із множиною станів світу S, Γ – множина специфікованих станами формул.

Нехай ці специфікації утворюють множину S.

Γ *узгоджена* із M, якщо задана ін'єкція S у S.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул.

Δ є логічним наслідком Γ в узгодженій із ними ТМС M (позн. $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^{V}A$ маємо: із того, що $\Phi_{\alpha}(d) = T$ для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$, випливає, що неможливо $\Psi_{\beta}(d) = F$ для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$.

Надалі запис $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$ завжди означає узгодженість ТМС M із Γ та Δ.

Звідси випливає, що $\Gamma\,{}_{M}\!\not\models_{M} \Delta \Leftrightarrow$ існує $d \in {}^{V}A$:
для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ маємо $\Phi_{\alpha}(d) = T$ та
для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d) = F$.

Δ є логічним наслідком Γ (відносно ТМС певного типу), якщо $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$ для всіх ТМС M відповідного типу. Цей факт позначаємо $\Gamma \models \Delta$.

Звідси випливає: $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують узгоджена із Γ та Δ ТМС M та $d \in {}^{V}A$ такі, що для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ маємо $\Phi_{\alpha}(d) = T$ та для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d) = F$.

Наведемо властивості відношення наслідку для множин специфікованих станами формул в даній ТМС. Немодальні властивості фактично повторюють відповідні властивості наслідку для множин формул логіки квазіарних предикатів.

U) нехай $\Gamma \subseteq \Upsilon$, $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Rightarrow \Upsilon\,{}_{M}\!\models \Sigma$;

C) якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$.

Властивість C гарантує наявність наслідку.

$\neg_{\mathrm{L}}$) $\neg\Phi^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, \Phi^{\alpha}$;

$\neg_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, \neg\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\vee_{\mathrm{L}}$) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$ та $\Psi^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\vee_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, \Phi\vee\Psi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, \Phi^{\alpha}, \Psi^{\alpha}$;

$\mathrm{RI_L}$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\mathrm{RI_R}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$;

$\mathrm{RU_L}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\mathrm{RU_R}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$.

Для $\mathrm{RU_L}$ та $\mathrm{RU_R}$ умова $y \in \nu(\Phi)$.

$\mathrm{R}\neg_{\mathrm{L}}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\mathrm{R}\neg_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$;

$\mathrm{R}\vee_{\mathrm{L}}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\mathrm{R}\vee_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^{\alpha}$;

$\mathrm{RR_L}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta$;

$\mathrm{RR_R}$) $\Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^{\alpha} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma\,{}_{M}\!\models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)^{\alpha}$.

R$\exists_L$) $R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$;

R$\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)^\alpha$.

Для R$\exists_L$ та R$\exists_R$ умова $y \notin \{\bar v, \bar x\}$.

R$\exists\exists_L$) $R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar x}^{\bar v} \circ_z^y (\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$;

R$\exists\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{\bar x}^{\bar v} \circ_z^y (\Phi)^\alpha$.

Для R$\exists\exists_L$ та R$\exists\exists_R$ умова $z \in V_T$, $z \notin nm(R_{\bar x}^{\bar v}(\exists x\Phi))$.

Для опису елімінації кванторів ТМЛ немонотонних предикатів використаємо спеціальні предикати-індикатори εz наявності значення для імені (змінної) $z \in V$. Предикати εz задаємо так:

$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$, $F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$.

Наведемо властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \varepsilon z$ за умови $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists$v$_R$) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y$.

Допоміжні властивості ε-розподілу та первісного означення:

εd) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$ та $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \varepsilon y^\alpha$;

εv) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon z^\alpha$, де $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta)$.

Наведемо властивості, пов'язані з модальними композиціями (тут $⌘ \in Ms$):

R⌘$_L$) $\Gamma, R_{\bar x}^{\bar v}(⌘\Phi)^\alpha\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow \Gamma, ⌘R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)^\alpha\ {}_M{\models} \Delta$;

R⌘$_R$) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, R_{\bar x}^{\bar v}(⌘\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, ⌘R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)^\alpha$.

Зокрема, для ММС маємо властивості R$К_{i\,L}$ та R$К_{i\,R}$, де $К_i \in Ms$; для загальних ТМС – R$\Box_L$ та R$\Box_R$; для ТмМС – R$\Box_{\uparrow L}$, R$\Box_{\downarrow L}$, R$\Box_{\uparrow R}$ та R$\Box_{\downarrow R}$.

Тепер властивості елімінації модальностей.

У випадку загальних ТМС маємо:

$\Box_L$) $\Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$;

$\Box_R$) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

У випадку ТмМС $\Box_L$ та $\Box_R$ розщеплюються:

$\Box_{\uparrow L}$) $\Box_\uparrow\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$;

$\Box_{\uparrow R}$) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box_\uparrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$;

$\Box_{\downarrow L}$) $\Box_\downarrow\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$;

$\Box_{\downarrow R}$) $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box_\downarrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\beta \rhd \alpha$.

Для ММС маємо аналогічні до $\Box_L$ та $\Box_R$ властивості $К_{i\,L}$ та $К_{i\,R}$ (тут $К_i \in Ms$).

Доведемо для прикладу властивості $\Box_L$ та $\Box_R$.

Доводимо $\Rightarrow$ для $\Box_L$:

$\Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Rightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$.

Припустимо супротивне: $\Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$ та $\{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta$. Тоді із останнього для деякого $d \in {}^V\!A$ маємо: $\Phi_\beta(d) = T$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, $\vartheta_\gamma(d) = T$ для всіх $\vartheta^\gamma \in \Gamma$, $\Psi_\gamma(d) = F$ для всіх $\Psi^\gamma \in \Delta$. Із умови $\Phi_\beta(d) = T$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $\Box\Phi_\alpha(d) = T$. Тоді $\Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta$ – суперечність.

Доводимо $\Leftarrow$ для $\Box_L$:

$\{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\models} \Delta \Rightarrow \Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\models} \Delta$.

Припустимо супротивне: $\{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\models}_T \Delta$ та $\Box\Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\not\models}_T \Delta$. Останнє означає, що для деякого $d \in {}^V\!A$ маємо: $\Box\Phi_\alpha(d) = T$, $\vartheta_\gamma(d) = T$ для всіх $\vartheta^\gamma \in \Gamma$, $\Psi_\gamma(d) = F$ для всіх $\Psi^\gamma \in \Delta$. Із умови $\Box\Phi_\alpha(d) = T$ маємо $\Phi_\beta(d) = T$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$. Тоді $\{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta$ – суперечність.

Доводимо $\Rightarrow$ для $\Box_R$: $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

Нехай супротивне: $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha$ та $\Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Phi^\beta$ для деякого β такого, що $\alpha \rhd \beta$. Останнє означає, що для деякого $d \in {}^V\!A$ маємо: $\vartheta_\gamma(d) = T$ для всіх $\vartheta^\gamma \in \Gamma$, $\Psi_\gamma(d) = F$ для всіх $\Psi^\gamma \in \Delta$, $\Phi_\beta(d) = F$. Проте із умови $\Phi_\beta(d) = F$ для β такого, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $\Box\Phi_\alpha(d) = F$, звідки $\Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha$ – суперечність.

Доводимо $\Leftarrow$ для $\Box_R$: $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta \Rightarrow \Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha$.

Припустимо супротивне: $\Gamma\ {}_M{\models} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$, проте $\Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha$. Останнє означає, що для деякого $d \in {}^V\!A$ маємо: $\vartheta_\gamma(d) = T$ для всіх $\vartheta^\gamma \in \Gamma$, $\Psi_\gamma(d) = F$ для всіх $\Psi^\gamma \in \Delta$, $\Box\Phi_\alpha(d) = F$. Із $\Box\Phi_\alpha(d) = F$ випливає, що $\Phi_\beta(d) = F$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$, звідки $\Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Phi^\beta$ – суперечність.

В подальшому викладі обмежимось розглядом загальних ТМС.

Властивості відношення наслідку для множин формул в даній ТМС індукують аналогічні властивості відношення *логічного* наслідку для множин формул (пишемо $\models$ замість ${}_M{\models}$).

При побудові виведення в секвенційному численні ми фактично перевіряємо *відсутність* логічного наслідку. Тому для розглянутих властивостей відношення ${}_M{\models}$ доцільно вказати відповідні *дуальні* властивості відношення ${}_M{\not\models}$. Враховуючи, що P $\Leftrightarrow$ Q рівносильне $\neg$P $\Leftrightarrow$ $\neg$Q, майже для всіх властивостей відношення ${}_M{\models}$ відповідні властивості відношення ${}_M{\not\models}$ отримуємо заміною ${}_M{\models}$ на ${}_M{\not\models}$, лише для $\vee_L$ та властивостей вигляду ⌘$_R$ дуальні властивості задаємо інакше.

${}_L\vee$) $\Phi\vee\Psi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta$ або $\Psi^\alpha, \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta$;

${}_R\Box$) $\Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Box\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma\ {}_M{\not\models} \Delta, \Phi^\beta$ для деякого $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$.

При наявності додаткових властивостей відношень досяжності відповідним чином модифікуються властивості елімінації модальностей.

Розглянемо традиційні випадки, коли відношення досяжності можуть бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними.

1. $\rhd$ *рефлексивне.* Маємо $\alpha \rhd \alpha$, тому для властивості ${}_L\Box$ маємо $\Phi^{\alpha} \in \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}$. Властивість ${}_R\Box$ записується аналогічно загальному випадку.

2. $\rhd$ *симетричне.* Маємо $\alpha \rhd \beta \Leftrightarrow \beta \rhd \alpha$. тому властивості ${}_L\Box$ та ${}_R\Box$ записуємо в такому вигляді:

${}_L\Box$S) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma_M \not\models \Delta \ \Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\} \cup \cup \Gamma_M \not\models \Delta$.

${}_R\Box$S) $\Gamma_M \not\models \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \ \Leftrightarrow\ \Gamma_M \not\models \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha$.

3. $\rhd$ *рефлексивне й симетричне.* Маємо ${}_R\Box$S та

${}_L\Box$RS) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma_M \not\models \Delta \ \Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\} \cup \cup \Gamma_M \not\models \Delta$, причому $\Phi^{\alpha} \in \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\}$;

4. $\rhd$ *транзитивне.* Тоді маємо ${}_R\Box$ та

${}_L\Box$T) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma_M \not\models \Delta \ \Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \cup \{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma_M \not\models \Delta$.

Наявність $\{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma$ тут необхідна через транзитивність відношення $\rhd$.

5. $\rhd$ *транзитивне та рефлексивне.* У цьому випадку маємо ${}_R\Box$ та ${}_L\Box$T, причому в силу $\alpha \rhd \alpha$ для властивості ${}_L\Box$T необхідно $\Phi^{\alpha} \in \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\}$.

6. $\rhd$ *транзитивне та симетричне.* У цьому випадку маємо ${}_R\Box$S та

${}_L\Box$TS) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma_M \not\models \Delta \ \Leftrightarrow\ \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\} \cup \cup \{\Box\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma_M \not\models \Delta$.

7. $\rhd$ *транзитивне, рефлексивне й симетричне.* Маємо ${}_R\Box$S та ${}_L\Box$TS, причому в силу $\alpha \rhd \alpha$ для ${}_L\Box$TS необхідно $\Phi^{\alpha} \in \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta$ чи $\beta \rhd \alpha\}$.

3. Секвенційні числення

Семантичною основою побудови для ТМЛ числень секвенційного типу є властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Специфікації мають вигляд $\alpha\vdash$ чи $\alpha\dashv$, де α – ім'я стану Секвенції трактуємо як множини таких формул. Виділяючи $\vdash$-формули та та $\dashv$-формули, секвенції позначаємо як ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Секвенції збагачуємо збудованими на момент виведення множинами відношень на станах. Нехай *M* – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів. Збагачені секвенції записуємо $\Sigma // M$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Для замкненої секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ має виконуватись умова $\Gamma \models \Delta$.

Un$_{\alpha}$-*unv*-еквівалентність формул ТМЛ визначаємо подібно *Un*-*unv*-еквівалентності формул логік квазіарних предикатів (див., напр., [5]).

Нехай $Un_{\alpha} = \{u \in V \mid {}_{\alpha\vdash}\varepsilon u \in \Sigma\}$ – множина неозначених імен стану α.

Нехай Ψ – формула $R^{r_1,\ldots,r_k,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m}_{s_1,\ldots,s_k,y_1,\ldots,y_n,v_1,\ldots,v_m}\Phi$ така:

$\{r_1,\ldots,r_k, s,\ldots,s_k, y_1,\ldots,y_n\} \subseteq Un$,
$\{x_1,\ldots,x_n, v_1,\ldots,v_m\} \cap Un = \varnothing$.

Un$_{\alpha}$-*unv*-формою формули Ψ назвемо вираз $R^{x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m}_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,v_1,\ldots,v_m}\Phi$, де ε – невизначене значення.

Формули Ψ та Ξ *Un*$_{\alpha}$-*unv*-еквівалентні, якщо Ψ та Ξ мають однакові *Un*$_{\alpha}$-*unv*-форми.

Секвенція Σ замкнена, якщо існують префікс стану α та *Un*$_{\alpha}$-*unv*-еквівалентні специфіковані *R*-формули ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi$ такі: ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi \in \Sigma$;

зокрема, якщо існують префікс стану α та формула Φ така: ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево (всі листи замкнені) з коренем Σ.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношень $\models$.

Наведемо базові секвенційні форми числень чистих першопорядкових загальних ТМЛ.

Базові загальнологічні форми.

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Phi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\neg\Phi, \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Phi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\neg\Phi, \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Phi, \Sigma\ //\ M \qquad {}_{\alpha\vdash}\Psi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\Phi \vee \Psi, \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Phi, {}_{\alpha\dashv}\Psi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\Phi \vee \Psi, \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}; \quad {}_{\dashv}\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}; \quad {}_{\dashv}\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}.$$

Для форм ${}_{\vdash}$RU і ${}_{\dashv}$RU умова: $y \in \nu(\Phi)$.

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ {}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ {}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M}; \quad {}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Sigma\ //\ M \qquad {}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma\ //\ M};$$

$_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \dfrac{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\ _{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma\ //M}$;

$_{\vdash}\mathrm{R}\exists\ \dfrac{_{\alpha\vdash}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma\ //M}$; $_{\dashv}\mathrm{R}\exists\ \dfrac{_{\alpha\dashv}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma\ //M}$.

Для форм $_{\vdash}\mathrm{R}\exists$ і $_{\dashv}\mathrm{R}\exists$ умова: $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists\ \dfrac{_{\alpha\vdash}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma\ //M}$;

$_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists\ \dfrac{_{\alpha\dashv}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Sigma\ //M}$.

Для $_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists$ і $_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists$ умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Форми елімінації кванторів:

$_{\vdash}\exists\ \dfrac{_{\alpha\vdash}R_z^x(\Phi),\ _{\alpha\dashv}\varepsilon z,\Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}\exists x\Phi,\Sigma\ //M}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma,\exists x\Phi)$;

$_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \dfrac{_{\alpha\dashv}\exists x\Phi,\ _{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi),\ _{\alpha\dashv}\varepsilon y,\Sigma\ //M}{_{\alpha\dashv}\exists x\Phi,\ _{\alpha\dashv}\varepsilon y,\Sigma\ //M}$.

Форми ε-розподілу:

$\varepsilon\mathrm{d}\ \dfrac{_{\alpha\vdash}\varepsilon x,\ \Sigma\ //M\qquad _{\alpha\vdash}\varepsilon x,\ \Sigma\ //M}{\Sigma}$, де $_{\alpha\vdash}\varepsilon x,\ _{\alpha\vdash}\varepsilon x\notin\Sigma$;

$_{\vdash}\mathrm{R}\Box\ \dfrac{_{\alpha\vdash}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi),\Sigma\ //M}$; $_{\dashv}\mathrm{R}\Box\ \dfrac{_{\alpha\dashv}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma\ //M}{_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi),\Sigma\ //M}$.

Форми елімінації модальних операторів.

1. *На* $\rhd$ *не накладені додаткові умови*. Маємо *CGT*-числення.

Якщо для стану α в момент застосування форми елімінації маємо стани $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форму

$$_{\vdash}\Box\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\beta_1\vdash}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Phi,\ \Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\Sigma\ //M}.$$

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації немає γ таких, що $\alpha\rhd\gamma$, то застосовуємо форму (тут β – новий стан):

$$_{\vdash}\Box\mathrm{f}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\beta\vdash}\Phi,\Sigma\ //M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M}.$$

Форма елімінації, яка застосовується до $_{\alpha\dashv}\Box\Phi$:

$$_{\dashv}\Box\ \frac{_{\beta\dashv}\Phi,\Sigma\ //M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\dashv}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M},\ \beta\text{ – новий стан.}$$

2. $\rhd$ *рефлексивне*. Маємо *CGT_R*-числення.

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації маємо стани $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо форму:

$$_{\vdash}\Box\mathrm{R}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\alpha\vdash}\Phi,\ _{\beta_1\vdash}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Phi,\ \Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\Sigma\ //M}.$$

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації немає відмінних від α станів, досяжних із α, то застосовуємо форму:

$$_{\vdash}\Box\mathrm{fR}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\alpha\vdash}\Phi,\ \Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\Sigma\ //M}.$$

Форма, яка застосовується до $_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це $_{\dashv}\Box$.

3. $\rhd$ *симетричне*. Маємо *CGT_S*-числення.

Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$ та $\beta_1\rhd\alpha,\ldots,\beta_n\rhd\alpha$, то застосовуємо $_{\vdash}\Box$. Для наявних $\beta_1,\ldots,\beta_n$: $\alpha\rhd\beta_j$ чи $\beta_j\rhd\alpha$, пишемо $_{\beta_1\vdash}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Phi$.

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації немає γ таких, що $\alpha\rhd\gamma$, то застосовуємо форму (тут β – новий стан):

$$_{\vdash}\Box\mathrm{fS}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\beta\vdash}\Phi,\Sigma\ //M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M}.$$

До $_{\alpha\dashv}\Box\Phi$ застосовується форма

$$_{\dashv}\Box\mathrm{S}\ \frac{_{\beta\dashv}\Phi,\Sigma\ //M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha\dashv}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M},\ \beta\text{ – новий стан.}$$

4. $\rhd$ *рефлексивне та симетричне*. Отримуємо *CGT_RS*-числення.

Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$ та $\beta_1\rhd\alpha,\ldots,\beta_n\rhd\alpha$, то застосовуємо форму $_{\vdash}\Box\mathrm{R}$.

Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ для α немає відмінних від α станів, досяжних із α (тут завжди маємо $\alpha\rhd\alpha$), то застосовуємо $_{\vdash}\Box\mathrm{fR}$.

Форма, яка застосовується до $_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це $_{\dashv}\Box\mathrm{S}$.

5. $\rhd$ *транзитивне*. Маємо *CGT_T*-числення.

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації маємо стани $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо форму

$$_{\vdash}\Box\mathrm{T}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\beta_1\vdash}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Phi,\ _{\beta_1\vdash}\Box\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\Sigma\ //M}$$

Специфіковані $_{\beta_1\vdash}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Phi$ пишемо для всіх наявних $\beta_1,\ldots,\beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$. Через транзитивність $\rhd$ тут необхідні $_{\beta_1\vdash}\Box\Phi,\ldots,\ _{\beta_n\vdash}\Box\Phi$.

Якщо для стану α в момент застосування до $_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації немає γ таких, що $\alpha\rhd\gamma$, то застосовуємо форму (тут β – новий стан):

$$_{\vdash}\Box\mathrm{fT}\ \frac{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ _{\beta\vdash}\Phi,\ _{\beta\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //M}.$$

Форма, яка застосовується до $_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це $_{\dashv}\Box$.

6. $\rhd$ *транзитивне й рефлексивне*. Отримуємо *CGT_RT*-числення.

Якщо для стану α в момент застосування до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то застосовуємо форму

$$ {}_{\vdash}\Box\mathrm{TR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ {}_{\alpha\vdash}\Phi,\ {}_{\beta_1\vdash}\Phi, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\Phi,\ {}_{\beta_1\vdash}\Box\Phi, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\Box\Phi, \Sigma \mathbin{//} M}{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi, \Sigma \mathbin{//} M} $$

Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ для α немає відмінних від α станів, досяжних із α (тут завжди маємо $\alpha \rhd \alpha$), то застосовуємо ${}_{\vdash}\Box\mathrm{fR}$.

Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це ${}_{\dashv}\Box$.

7. $\rhd$ *транзитивне й симетричне*. Отримуємо *CGT_TS*-числення.

Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$ та $\beta_1 \rhd \alpha, \ldots, \beta_n \rhd \alpha$, то застосовуємо форму ${}_{\vdash}\Box\mathrm{T}$.

Якщо для стану α в момент застосування до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ форми елімінації немає γ таких, що $\alpha \rhd \gamma$, то застосовуємо форму (тут β – новий стан):

$$ {}_{\vdash}\Box\mathrm{fTS}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ {}_{\beta\vdash}\Phi,\ {}_{\beta\vdash}\Box\Phi, \Sigma \mathbin{//} M \cup \{\alpha \rhd \beta, \beta \rhd \alpha\}}{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma \mathbin{//} M}. $$

Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це ${}_{\dashv}\Box\mathrm{S}$.

8. $\rhd$ *транзитивне, рефлексивне й симетричне*. Отримуємо *CGT_RTS*-числення.

Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$ та $\beta_1 \rhd \alpha, \ldots, \beta_n \rhd \alpha$, то застосовуємо форму ${}_{\vdash}\Box\mathrm{TR}$.

Нехай в момент застосування форми до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ немає відмінних від α станів, досяжних із α.

Тоді до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ застосовуємо ${}_{\vdash}\Box\mathrm{fR}$.

Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$, – це ${}_{\dashv}\Box\mathrm{S}$.

Основну властивість секвенційних форм дає

Теорема2. Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \mathbin{//} \mathrm{M} \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z} \mathbin{//} \mathrm{M}}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \mathbin{//} \mathrm{M}}$ та $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \mathbin{//} \mathrm{M}}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \mathbin{//} \mathrm{M}}$ – базові секвенційні форми. Тоді:

1) $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$;
2) $\Lambda \models \mathrm{K} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$.

Висновки

Досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності (еквітонності). Описано семантичні властивості чистих першопорядкових ТМЛ, досліджено властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для ТМЛ немонотонних предикатів запропоновано числення секвенційного типу. Вказано умови замкненості секвенцій, описано різновиди таких числень та наведено відповідні секвенційні форми.

Побудова виведення (секвенційного дерева) для пропонованих числень ТМЛ та доведення для цих числень теорем коректності й повноти буде описано в наступних роботах.

Список використаних джерел

1. *Cocchiarella N.B.* Modal logic / N.B. Cocchiarella, M.A. Freund. – Oxford University Press, 2008. – 267 p
2. *Нікітченко М.С.* Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. *Шкільняк О.С.* Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів / О.С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2014. – Вып. 2. – С. 99–110.
4. *Шкільняк О.С.* Семантичні аспекти модальних логік часткових немонотонних предикатів / О.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія: фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 4. – С. 238–241.
5. *Шкільняк С.С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік / С.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2013. – № 3. – С. 22–37.

References

1. COCCHIARELLA, N. and FREUND, M. (2008). *Modal logic*. Oxford University Press.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. SHKILNIAK, O. (2014). Transitional modal logics of non-monotone quasiary predicates. In *Computer mathematics*. **2**, p. 99–110.
3. SHKILNIAK, O. (2014). Semantic aspects of modal logics of partial non-monotone predicates. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* No 4. P. 238–241.
5. SHKILNIAK, S. (2013). Spectrum of sequent calculi of first-order composition-nominative logics. In *Problems in progamming*. № 3, p. 22–37.

Надійшла до редколегії 23.09.2015