УДК 004.42:510.69

Шкільняк С. С., д. ф.-м. н., проф.,
Волковицький Д. Б., аспірант.

Безкванторно-функціональні логіки часткових квазіарних предикатів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

S.S. Shkilniak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
D.B. Volkovytskyi, Postgraduate Student

Free-quantifier functional logics of partial quasi-ary predicates

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Досліджено безкванторно-функціональні логіки часткових квазіарних предикатів. Описано семантичні моделі та мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Розглянуто нормальні форми термів та формул, запропоновано кодування нормальних термів. Введено поняття S-субтавтології, показано збіжність класів S-субтавтологій та неспростовних формул. Доведено розв’язність проблем виконуваності та неспростовності формул мови безкванторно-функціональної логіки.

Ключові слова: логіка, предикат, суперпозиція, формула, терм.

In thise paper we study new classes of program-oriented logical formalisms – logics of partial quasi-ary predicates of free-quantifier level. This logics occupy intermediate position between propositional logic and first-order composition-nominative logics. We consider three classes of this logics: free-quantifier functional logics, free-quantifier functional logics with composition of weak equality = and free-quantifier functional logics with composition of strong equality ≡. The focus of the paper is devoted to research of free-quantifier functional logics. Properties of the composition superposition are described. We define semantic models and languages of the introduced logics and consider their semantic properties. We consider normal forms of terms and formulas, we introduced the concept of S-subtautology. Coding of normal terms are proposed. Using this coding we build the refutable interpretation for each formula that is not S-subtautology. It is proved on this basis that the class of S-subtautology is matched with the class of irrefutable formulas. It concequently we received the solvability of problems of irrefutability and of satisfiability of the formulas of free-quantifier functional logics.

Key words: logic, predicate, superposition, formula, term.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розвиток інформаційних технологій і програмування зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Розроблено низку різноманітних логічних систем, які з великим успіхом використовуються для розв’язання різноманітних задач інформатики й програмування. В основі таких систем зазвичай лежить класична логіка предикатів. Водночас класична логіка має (див. [1, 2]) низку обмежень. Тому набуває актуальності проблема побудови логічних формалізмів, орієнтованих на потреби програмування. Побудову програмно-орієнтованих логічних формалізмів доцільно проводити на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Логіки, збудовані на його основі, названо композиційно-номінативними (КНЛ).

Метою даної роботи є дослідження нових класів КНЛ – безкванторних логік квазіарних предикатів. В таких логіках, що засвідчує їх назва, не використовуються композиції квантифікації, характерні для першопорядкових логік. Безкванторні логіки займають проміжне становище між пропозиційною та першопорядковими логіками.

На безкванторному рівні виділимо підрівні:

– реномінативний (РНЛ);
– реномінативний з слабкою рівністю (РНЛР);
– реномінативний з строгою рівністю (РНЛРС);
– безкванторно-функціональний (БКФЛ);
– безкванторно-функціональний з слабкою рівністю (БКФЛР);
– безкванторно-функціональний з строгою рівністю (БКФЛРС).

Найабстрактнішим з цих підрівнів є реномінативний. Реномінативні логіки добре досліджені (див., напр., [1, 2]), започатковано [3] вивчення реномінативних логік з рівністю. В даній роботі основна увага приділена вивченню безкванторних логік функціонального рівня (БКФЛ).

Поняття, які в роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [1, 2].

1. Основні поняття і визначення

На безкванторно-функціональних рівнях функції та предикати – квазіарні, вони задаються на іменних множинах.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d:V\to A$.

Множину всіх V-A-ІМ будемо позначати ${}^VA$.

Функцію $asn:{}^VA\to 2^V$ вводимо так:

$$asn(d) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in d \text{ для деякого } a\in A\}.$$

Операцію $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із множини $X\subseteq V$ задаємо так:

$$d\|_{-X} = \{v\mapsto a\in d \mid v\notin X\}.$$

Замість $d\|_{-\{v_1,\ldots,v_n\}}$ та $d\|_{-\{x\}}$ будемо також скорочено писати $d\|_{-v_1,\ldots,v_n}$ та $d\|_{-x}$.

Задамо операцію ∇ накладки ІМ d_2 на ІМ d_1:

$$d_1\nabla d_2 = d_1\|_{-asn(d_2)}\cup d_2.$$

Параметричну операцію реномінації (перейменування) $\mathrm{r}^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}:{}^VA\to{}^VA$ задаємо так:

$$\mathrm{r}^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(d) = d\,\nabla\,[v_1\mapsto d(x_1),\ldots,v_n\mapsto d(x_n)].$$

Введемо для $y_1,\ldots,y_n$ скорочене позначення $\bar{y}$.

Тоді замість $\mathrm{r}^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}$ також пишемо $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Виділимо наступні класи квазіарних функцій.

Функції вигляду ${}^VA\to A$ назвемо V-A-квазіарними функціями.

Клас таких функцій позначимо Fn^A.

Функції вигляду ${}^VA\to\{T, F\}$ назвемо V-A-квазіарними предикатами.

Клас таких предикатів позначимо Pr^A.

Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

В цій роботі вважаємо, що функції й предикати – часткові однозначні.

Для однозначних квазіарних функцій та предикатів будемо писати:

$g(d)\downarrow$, якщо значення $g(d)$ визначене;

$g(d)\uparrow$, якщо $g(d)$ невизначене.

Область істинності та *область хибності* V-A-квазіарного предиката P – це множини

$$T(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d) = T\};$$
$$F(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d) = F\}.$$

Предикат $P:{}^VA\to\{T, F\}$ назвемо:

– неспростовним (частково істинним), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $T(P) \neq \varnothing$.

Предметне ім'я $x\in V$ (строго) неістотне для квазіарної функції (предиката) g, якщо

$$d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \;\Rightarrow\; g(d_1) = g(d_2)$$

Квазіарна функція (предикат) g еквітонна, якщо

$$g(d_1)\downarrow \text{ та } d_1\subseteq d_2 \;\Rightarrow\; g(d_2)\downarrow = g(d_1).$$

2. Рівні безкванторних логік

Рівень РНЛ. Тут можна перейменовувати компоненти вхідних даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації. Базові композиції РНЛ: логічні зв'язки $\neg$, $\vee$ та реномінація $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Дамо визначення цих композицій через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$$T(\neg P) = F(P);$$
$$F(\neg P) = T(P);$$
$$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q);$$
$$F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q);$$
$$T(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d)\in T(P)\};$$
$$F(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d)\in F(P)\}.$$

На рівнях РНЛР та РНЛРС додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Можна розглядати дві різновидності цих предикатів: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$. Звідси отримуємо відповідні рівні реномінативних логік з рівністю.

Рівень РНЛР. Базові композиції:

$$\neg,\ \vee,\ \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}},\ =_{xy}.$$

Рівень РНЛРС. Базові композиції:

$$\neg,\ \vee,\ \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}},\ \equiv_{xy}.$$

Предикати $\equiv_{xy}$ та $=_{xy}$ задаються їх областями істинності й хибності наступним чином:

$$T(\equiv_{xy}) = \{d\in {}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\} \cup$$
$$\cup\,\{d\in {}^VA \mid d(x)\uparrow \text{ та } d(y)\uparrow\},$$
$$F(\equiv_{xy}) = \{d\in {}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\} \cup$$
$$\cup\,\{d\in {}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\uparrow \text{ або } d(x)\uparrow,\ d(y)\downarrow\};$$
$$T(=_{xy}) = \{d\in {}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\},$$
$$F(=_{xy}) = \{d\in {}^VA \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\}.$$

На функціональних рівнях можна формувати нові базові значення для вхідних даних. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції.

Нехай F^A – клас квазіарних функцій вигляду $f:{}^VA\to R$.

Параметрична композиція суперпозиції $S^{v_1,...v_n}: F^A \times (Fn^A)^n \to F^A$ функціям $f, g_1, ..., g_n$ зіставляє функцію $S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)$, значення якої для кожного $d \in {}^V A$ обчислюється так:

$$S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d) =$$
$$= f(d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d),..., v_n \mapsto g_n(d)]) .$$

Виділення V-A-квазіарних функцій та V-A-квазіарних предикатів індукує виділення суперпозицій двох типів:

– суперпозиції вигляду $(Fn^A)^{n+1} \to Fn^A$ функцій у функції (результатом є функція);

– суперпозиції вигляду $Pr^A \times (Fn^A)^n \to Pr^A$ функцій у предикати (результатом є предикат).

Для роботи з окремими компонентами даних введемо спеціальні 0-арні композиції – функції деномінації (розіменування) $'v$, де $v \in V$.

Ці функції задаємо так: $'v(d) = d(v)$.

При наявності функцій деномінації композиції реномінації можна промоделювати за допомогою композицій суперпозиції.

Справді, для кожної $f \in Fn^A \cup Pr^A$ маємо

$$R^{u_1,...,u_n}_{v_1,...,v_n}(f) = S^{u_1,...,u_n}(f, 'v_1,..., 'v_n) .$$

Композиції = та ≡ задаються так.

Для кожних $f, g \in Fn^A$ та $d \in {}^V A$

$$=(f,g)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } f(d)\downarrow, g(d)\downarrow, f(d) = g(d), \\ F, \text{ якщо } f(d)\downarrow, g(d)\downarrow, f(d) \neq g(d), \\ \text{невизначене, якщо } f(d)\uparrow \text{ або } g(d)\uparrow; \end{cases}$$

$$\equiv(f,g)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } f(d)\downarrow, g(d)\downarrow, f(d) = g(d) \\ \quad \text{або } f(d)\uparrow, g(d)\uparrow; \\ F, \text{ якщо } f(d)\downarrow, g(d)\downarrow, f(d) \neq g(d) \\ \quad \text{або } f(d)\downarrow, g(d)\uparrow \\ \quad \text{або } f(d)\uparrow, g(d)\downarrow. \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо наступні рівні безкванторно-функціональних логік.

Рівень БКФЛ. Базові композиції:

$\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'v$.

Рівень БКФЛР. Базові композиції:

$\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'v, =$.

Рівень БКФЛРС. Базові композиції:

$\neg, \vee, S^{\bar{x}}, 'v, \equiv$.

3. Властивості композицій суперпозиції та рівності

Теорема 1. Композиції $S^{\bar{v}}$ та = зберігають еквітонність V-A-квазіарних функцій і предикатів.

Доведення. Нехай $f, g_1,..., g_n$ еквітонні, $d, d' \in {}^V A$, $d' \supseteq d$. Нехай $S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d)\downarrow$, тобто маємо $S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d) = f(d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d),..., v_n \mapsto g_n(d)])\downarrow$. За еквітонністю $g_1,..., g_n$ та з умови $d' \supseteq d$ для всіх $i \in \{1,...,n\}$ маємо: якщо $g_i(d)\downarrow$, то $g_i(d')\downarrow = g_i(d)$. Звідси отримуємо $d' \nabla [v_1 \mapsto g_1(d'),..., v_n \mapsto g_n(d')] \supseteq$ $\supseteq d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d),..., v_n \mapsto g_n(d)]$. За еквітонністю f тоді отримуємо $f(d' \nabla [v_1 \mapsto g_1(d'),..., v_n \mapsto g_n(d')])\downarrow =$ $= f(d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d),..., v_n \mapsto g_n(d)]$, тобто $S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d')\downarrow = S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d)$.

Доводимо для =. Нехай f, g еквітонні, $d, d' \in {}^V A$, $d' \supseteq d$. Нехай $=(f, g)(d)\downarrow$. Тоді $=(f, g)(d) = T$ або $=(f, g)(d) = F$. В першому випадку $f(d)\downarrow = g(d)\downarrow$, в другому випадку $f(d)\downarrow \neq g(d)\downarrow$. За еквітонністю f та g маємо $f(d')\downarrow = f(d)\downarrow$ та $g(d')\downarrow = g(d)\downarrow$. В першому випадку $f(d')\downarrow = g(d')\downarrow$, звідки $=(f, g)(d') = T$, в другому випадку $f(d')\downarrow \neq g(d')\downarrow$, звідки маємо $=(f, g)(d') = F$. Отже, $=(f, g)(d')\downarrow = =(f, g)(d)\downarrow$.

Твердження 1. Композиція ≡ еквітонність не зберігає.

Нехай f, g еквітонні, $d' \supseteq d$, $f(d)\uparrow$, $g(d)\uparrow$ та $f(d)\downarrow \neq g(d)\downarrow$. Тоді $\equiv(f, g)(d) = T$ та $\equiv(f, g)(d') = F$.

Таким чином, на рівні БКФЛРС логіки еквітонних предикатів не розглядаємо.

Розглянемо основні властивості композицій суперпозиції.

S¬) Дистрибутивність суперпозиції щодо ¬:

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) .$$

S∨) Дистрибутивність суперпозиції щодо ∨:

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f}) .$$

SS) Згортка суперпозицій: (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$, введені позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ для $u_1,...,u_n$; $t_1,...,t_n$; $x_1,..., x_k$; $r_1,...,r_k$; $w_1,...,w_k$; $v_1,...,v_m$; $s_1,...,s_m$):

$$S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) = S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}),$$
$$..., S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}),..., S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})) .$$

CN) Згортка імен (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1,...,x_m, v_1,..., v_n}(\varphi, 'x_1,..., 'x_m, g_1,..., g_n) =$$
$$= S^{v_1,..., v_n}(\varphi, g_1,..., g_n) .$$

Зокрема, маємо $S^{x_1,...,x_m}(\varphi, 'x_1,..., 'x_m) = \varphi$.

SDD) Згортка неістотних імен для функцій $'x$:

$$S^{v_1,..., v_n}('x, g_1,..., g_n) = 'x \text{ за умови } x \notin \{\bar{v}\} .$$

SDF) Спрощення для функцій $'x$:

$$S^{x, v_1,..., v_n}('x, f, g_1,..., g_n) = f .$$

Зокрема, $S^x('x, f) = f$.

CU) Згортка за неістотним іменем (тут маємо $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$, x неістотне для φ):

$$S^{x, v_1,..., v_n}(\varphi, f, g_1,..., g_n) = S^{v_1,..., v_n}(\varphi, g_1,..., g_n) .$$

Зокрема, $S^x(\varphi, f) = \varphi$, якщо x неістотне для φ.

Зауважимо, що властивості SS, CN, CU формулюються для квазіарних функцій та предикатів, а властивості SDD, SDF – лише для квазіарних функцій.

4. Мови та семантичні моделі БКФЛ

Семантичними моделями БКФЛ є композиційні системи V-квазіарних функцій і предикатів. Це трійки вигляду CS = (A, $Fn^A \cup Pr^A$, C), де Fn^A та Pr^A – множини V-A-квазіарних функцій та V-A-квазіарних предикатів, C – множина композицій над $Fn^A \cup Pr^A$, яка задається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, 'v.

Композиційна система (A, $Fn^A \cup Pr^A$, C) визначає композиційну алгебру V-A-квазіарних функцій і предикатів ($Fn^A \cup Pr^A$, C) та алгебру (алгебраїчну систему) даних (A, $Fn^A \cup Pr^A$).

Надалі будемо розглядати БКФЛ, розширені шляхом виділення підмножини $U \subseteq V$ тотально неістотних предметних імен, тобто імен, неістотних для всіх базових функцій та предикатів. Будемо вважати, що така U розв’язна відносно V.

Побудова композиційної алгебри дає змогу визначити мову БКФЛ. Алфавіт мови:

– множини предметних імен (змінних) V та тотально неістотних предметних імен $U \subseteq V$;

– множина $Dns = \{'v \mid v \in V\}$ деномінаційних символів (ДНС), тобто імен функцій розіменування;

– множини Fns та Ps функціональних (ФНС) та предикатних символів (ПС);

– множина $\{\neg, \vee, S^{\bar{v}}, 'v\}$ символів базових композицій.

Множину $\sigma = Fns \cup Ps$ назвемо сигнатурою мови БКФЛ.

При зафіксованій множині базових композицій мови БКФЛ істотно відрізняються множинами Fns та Ps (сигнатурою). Неістотні відмінності мов – це способи запису термів і формул мови. При визначенні термів і формул будемо використовувати префіксну (польську) форму запису.

Множини термів Tr і формул Fr вводимо так.

T0. Кожний ФНС та кожний ДНС є термом, такі терми – атомарні.

T1. Нехай $\tau, t_1,..., t_n \in Tr$; тоді $S^{v_1,...v_n}\tau t_1...t_n \in Tr$.

Ф0. Кожний ПС є формулою (атомарною).

Ф1. Нехай $\Phi, \Psi \in Fr$, $t_1,..., t_n \in Tr$; тоді $S^{v_1,...v_n}\Phi t_1...t_n \in Fr$, $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$.

Для бінарних композицій звичніше використовувати не префіксну, а інфіксну форму, коли символ композиції записується між аргументами.

Надалі використовуємо також інфіксну форму та допоміжні символи – коми й дужки "(" і ")". Використовуємо також символи похідних композицій &, $\to$. Наприклад, формули $\vee\Phi\Psi$, $\vee\neg\Phi\Psi$, $\neg\vee\neg\Phi\neg\Psi$ будемо позначати $\Phi\vee\Psi$ $\Phi\to\Psi$, $\Phi\&\Psi$. Подібні записи термів та формул будемо також називати термами та формулами.

Позначаємо $fs(\varphi)$ множину всіх тих ФНС, які входять до складу терма φ.

Позначимо $nm(\varphi)$ множину всіх $v \in V$, які фігурують у символах суперпозиції, що входять до складу терма чи формули φ.

Позначимо $dnm(\varphi)$ множину всіх імен, які відповідні деномінаційним символам, що входять до складу терма чи формули φ.

Множину $nm(\varphi) \cup dnm(\varphi)$ позначимо $ndn(\varphi)$ і назвемо *множиною імен* терма чи формули φ.

Інтерпретуємо мови БКФЛ на композиційних системах квазіарних функцій та предикатів.

Символи Fns та Ps позначають (виділяють) базові функції та базові предикати в множинах Fn^A та Pr^A, зокрема, символи $'v$ позначають відповідні функції деномінації 'v. Для опису такого позначення задаємо тотальне однозначне відображення $I : Dns \cup Fns \cup Ps \to Fn^A \cup Pr^A$. При цьому $I('v) = {}'\mathrm{v}$ для кожного $'v \in Dns$, кожне $z \in U$ неістотне для кожного $g \in I(Fns \cup Ps)$.

Далі продовжимо I до відображення інтерпретації $I : Tr \cup Fr \to Fn^A \cup Pr^A$ згідно побудови термів та формул із простіших за допомогою символів композицій:

ІТ) $I(S^{v_1,...v_n}\tau t_1...t_n) = \mathrm{S}^{v_1,...v_n}(I(\tau), I(t_1),..., I(t_n))$;

ІФ) $I(S^{v_1,...v_n}\Phi t_1...t_n) = \mathrm{S}^{v_1,...v_n}(I(\Phi), I(t_1),..., I(t_n))$;

$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$.

Трійку $\boldsymbol{J}$ = (CS, σ, I) назвемо *інтерпретацією* мови БКФЛ сигнатури σ.

Скорочено інтерпретації мови також позначаємо як (A, σ, I) чи (A, I).

Предикат $I(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, позначаємо Φ_J.

Функцію $I(t)$, яка є значенням терма t при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, позначаємо t_J.

Ім'я $x \in V$ неістотне для терма t, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для функції t_J.

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначаємо $\boldsymbol{J} \models \Phi$, якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна (частково істинна), що позначаємо $\models \Phi$, якщо Φ є неспростовною при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

Формула Ф виконувана при інтерпретації ***J***, якщо предикат Φ_J – виконувананий.

Формула Ф виконувана, якщо Ф виконувана при деякій інтерпретації ***J***.

Формула Ψ є логічним наслідком формули Ф, що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо формула $\Phi \to \Psi$ неспростовна. Це означає: при кожній інтерпретації ***J*** маємо $T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$.

Формули Ф та Ψ логічно еквівалентні, що позначаємо $\Phi \sim \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Формули Ф та Ψ логічно строго еквівалентні, що позначаємо $\Phi \sim_{TF} \Psi$, якщо при кожній інтерпретації ***J*** маємо $T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$, тобто предикати Φ_J та Ψ_J цілком збігаються.

5. Семантичні властивості БКФЛ

Виділення підмножини $U \subseteq V$ тотально неістотних предметних імен дає змогу визначити для кожного терма чи формули g множину $\nu(g)$ імен, які гарантовано неістотні.

Для кожного $g \in Fns \cup Ps$ маємо $\nu(g) = U$.

Для кожного $'x \in Dns$ задамо $\nu('x) = V \setminus \{x\}$.

Далі визначаємо:

$$\nu(S^{x_1,\dots x_n} \tau t_1 \dots t_n) = (\nu(\tau) \cup \{x_1,\dots,x_n\}) \cap \bigcap_{\{i \mid v_i \notin \nu(\tau)\}} \nu(t_i);$$

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi)$;

$$\nu(S^{x_1,\dots x_n} \Phi t_1 \dots t_n) = (\nu(\Phi) \cup \{x_1,\dots,x_n\}) \cap \bigcap_{\{i \mid v_i \notin \nu(\Phi)\}} \nu(t_i).$$

Теорема 2. $x \in \nu(\tau) \Rightarrow x$ неістотне для терма τ; $x \in \nu(\Phi) \Rightarrow x$ неістотне для формули Ф.

Доведення теореми проводиться індукцією за побудовою формули.

Семантичні властивості формул БКФЛ індуковані відповідними властивостями композицій та записуються аналогічно. При цьому замість рівності предикатів фігурує строга еквівалентність формул, які позначають ці предикати.

Властивості дистрибутивності суперпозиції та логічних зв'язок:

$S\neg$) $S^{\bar{v}}(\neg\Phi, \bar{t}) \sim_{TF} \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t})$;

$S\vee$) $S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}) \sim_{TF} S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t})$.

Властивості SS, CN, CU формулюються для функцій та предикатів. Для формул вони індукують наступні властивості.

SSФ) Згортка суперпозицій для формул:

$$S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \sim_{TF} S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\varphi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})).$$

Тут позначення: $\bar{u}$ для $u_1,\dots,u_n$; $\bar{t}$ для $t_1,\dots,t_n$; $\bar{x}$ для $x_1,\dots,x_k$; $\bar{r}$ для $r_1,\dots,r_k$; $\bar{w}$ для $w_1,\dots,w_k$; $\bar{v}$ для $v_1,\dots,v_m$; $\bar{s}$ для $s_1,\dots,s_m$.

CNФ) Згортка імен для формул:

$$S^{x_1,\dots,x_m,v_1,\dots,v_n}(\Phi, 'x_1,\dots,'x_m, t_1,\dots,t_n) \sim_{TF} S^{v_1,\dots v_n}(\Phi, t_1,\dots,t_n).$$

Зокрема, $S^{x_1,\dots,x_m}(\Phi, 'x_1,\dots,'x_m) \sim_{TF} \Phi$.

CUФ) Згортка за неістотним іменем для формул:

$$S^{x,v_1,\dots v_n}(\Phi, t, t_1,\dots,t_n) \sim_{TF} S^{v_1,\dots v_n}(\Phi, t_1,\dots,t_n)$$

за умови, що x неістотне для Ф.

Зокрема, якщо x неістотне для Ф, то

$$S^{x}(\Phi, t) \sim_{TF} \Phi,$$

Властивості SS, CN, CU для функцій та властивості SDD, SDF, які формулюються лише для функцій, індукують для термів відповідні властивості, які подаємо у вигляді наступної теореми (таке громіздке формулювання вимушене відсутністю на рівні БКФЛ композицій рівності).

Теорема 3. Нехай формула Ψ отримана з формули Ф заміною входжень термів:

1) $S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w})$ на $S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$;

2) $S^{\bar{x},\bar{v}}(\tau, '\bar{x}, \bar{t})$ на $S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t})$, $S^{\bar{x}}(\tau, '\bar{x})$ *на* τ;

3) $S^{\bar{v}}('x, \bar{t})$ на $'x$;

4) $S^{x,\bar{v}}('x, t, \bar{t})$ на t,

5) $S^{x,\bar{v}}(\tau, t, \bar{t})$ на $S^{\bar{v}}(\tau, \bar{t})$, де x неістотне для τ.

Тоді $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

Тут пп.1, 2, 3, 4, 5 теореми відповідають властивостям SS, CN, SDD, SDF, CU для функцій.

Основою еквівалентних перетворень формул БКФЛ є теорема еквівалентності.

Теорема 4. Нехай Ф' отримано з формули Ф заміною деяких входжень $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 \sim_{TF} \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi \sim_{TF} \Phi'$.

Теорема доводиться індукцією за побудовою формули.

6. Нормальні форми

Розглянемо нормальні форми для термів та формул мови БКФЛ.

Терм назвемо *нормальним*, якщо

– в усіх його символах суперпозиції (якщо вони є) згорнуті неістотні імена й виконані спрощення згідно з теоремою 3;

– всі його символи суперпозиції (якщо вони є) застосовані тільки до ФНС.

Формула Ψ знаходиться в *нормальній формі*, або Ψ є *нормальною формулою*, якщо для Ψ виконується умова:

– в усіх її символах суперпозиції (якщо вони є) згорнуті неістотні імена й виконані спрощення згідно з SSФ, ZФ, ZUФ та теоремою 3;

– усі символи суперпозиції формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ФНС чи ПС.

Таким чином, формула Φ нормальна, якщо всі її терми нормальні та в усіх її символах суперпозиції згорнуті неістотні імена й виконані спрощення згідно з ZΦ та ZUΦ.

Формула *елементарна*, якщо вона атомарна або має вигляд $S^{\overline{v}}\,p\overline{t}$, де $p\in Ps$

Елементарна формула *примітивна*, якщо вона атомарна або має вигляд $S^{\overline{v}}\,p\overline{t}$, де усі її терми нормальні та $\{\overline{v}\}\cap U=\varnothing$.

Кожна нормальна формула Φ утворена з примітивних формул за допомогою символів пропозиційних композицій. Такі примітивні підформули назвемо P-компонентами формули Φ.

Теорема 5. Для кожної формули Φ можна збудувати нормальну формулу Ψ таку: $\Phi\sim_{TF}\Psi$.

Доведення. Зведення формули Φ до нормальної форми виконуємо так. Використовуючи властивості $S\neg$ та $S\vee$, просуваємо символи суперпозиції вглиб формули. Використовуючи SSΦ та теорему 5, згортаємо символи суперпозиції. При появі відповідної ситуації виконуємо спрощення згідно з ZΦ, ZUΦ, теоремою 5.

Згідно з теоремою еквівалентності, після виконання кожного з таких перетворень отримуємо формулу ϕ у нормальній формі таку, що $\Phi\sim_{TF}\phi$.

Нормальну формулу Ψ, отриману із Φ так, як описано, назвемо *нормалізантою* формули Φ.

7. Кодування нормальних термів

Нехай Φ – нормальна формула;
нехай $X = ndn(\Phi)$, $Y = fs(\Phi)$.
Занумеруємо множини X та Y:
$X=\{v_0,v_1,...,v_m\}$, $Y=\{f_0,f_1,...,f_h\}$.
Символи суперпозиції будемо подавати так:
$S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}$, де $i_1<i_2<...<i_n$.
Нормальні терми будемо подавати так:
$S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}f_j\,t_1...\,t_n$, де $i_1<i_2<...<i_n$.
Примітивні формули будемо подавати так:
$S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}p\;t_1...\,t_n$, де $i_1<i_2<...<i_n$.
Задамо кодування κ нормальних термів:
$\kappa('v_i) = 3\cdot i$,
$\kappa(f_i) = 3\cdot i+1$
$\kappa(S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}f_j\,t_1,...,t_n)=3\cdot C^3(C^n(C(i_1,b_1),$
$C(i_2-i_1-1,b_2),...,C(i_n-i_{n-1}-1,b_n)),j,n-1)+2,$
де $b_1=\kappa(t_1),\ b_2=\kappa(t_2),...,\ b_n=\kappa(t_n)$.

Для нормальних термів таке кодування гарантує: $\tau_1\neq\tau_2\ \Rightarrow\ \kappa(\tau_1)\neq\kappa(\tau_2)$.

З іншого боку, за кожним числом як кодом можна однозначно відновити терм і перевірити його нормальність (в декодованому термі можливі тотожні пари вигляду $S^{...v_i...}f_j\,...'v_i...$, але цю ситуацію можна усунути, ускладнивши кодування).

Для кожних інтерпретації $\boldsymbol{J}=(A,I)$ та $d\in{}^VA$ тоді маємо:

$$(S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}f_j\,t_1...\,t_n)_J(d)=$$
$$=f_j\,(d\,\|\!\llcorner_{v_{i_1},...,v_{i_n}}+v_{i_1}\mapsto t_{1J}(d)+...+v_{i_n}\mapsto t_{nJ}(d))$$

Задамо інтерпретацію $\boldsymbol{J}=(N,I)$ таким чином.
Візьмемо $d=[v_0\mapsto 0,\ v_1\mapsto 3,...,v_m\mapsto 3\cdot m]$.
Задамо на d значення функцій, які описуються термами формули Φ.

Якщо ρ – це $'v_k$, то маємо
$\rho_J(d) = ('v_k)_J(d) =$
$=('v_k)_J([v_0\mapsto 0,...,v_m\mapsto 3\cdot m])=3\cdot k=\kappa('v_k)$.

Якщо ρ – це f_k, то задамо
$\rho_J(d) = (f_k)_J(d) = 3\cdot k+1 = \kappa(f_k)$

Нехай ρ – це $S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}f_j\,t_1,...,t_n$,
нехай $b_1=\kappa(t_1),\ b_2=\kappa(t_2),...,\ b_n=\kappa(t_n)$.

Тоді задамо $\rho_J(d)=(S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}f_j\,t_1...\,t_n)_J(d)=$
$=f_j\,(d\,\|\!\llcorner_{v_{i_1},...,v_{i_n}}+v_{i_1}\mapsto t_{1J}(d)+...+v_{i_n}\mapsto t_{nJ}(d))$
$=f_j\,(d\,\|\!\llcorner_{v_{i_1},...,v_{i_n}}+v_{i_1}\mapsto b_1+...+v_{i_n}\mapsto b_n)=\kappa(\rho)$.

Умова $\tau_1\neq\tau_2\ \Rightarrow\ \kappa(\tau_1)\neq\kappa(\tau_2)$ гарантує коректність такого визначення $(f_k)_J(\delta)$ на даних $\delta\in N^X$ зазначеного вище вигляду.

Отже, для кожної терма ρ формули Φ маємо $\rho_J(d) = \kappa(\rho)$.

Нехай маємо *різні* P-компоненти формули Φ із одним і тим же $p\in Ps$: $S^{v_{i_1},...,v_{i_n}}p\;t_1...\,t_n$ та $S^{v_{l_1},...,v_{l_k}}p\;s_1...\,s_k$. Тоді $\{(v_{i_1},t_1),...,(v_{i_n},t_n)\}$ та $\{(v_{l_1},s_1),...,(v_{l_k},s_k)\}$ *різні*, звідки маємо:
$d_1=d\,\|\!\llcorner_{v_{i_1},...,v_{i_n}}+v_{i_1}\mapsto\kappa(t_1)+...+v_{i_n}\mapsto\kappa(t_n)\neq$
$\neq d_2=d\,\|\!\llcorner_{v_{l_1},...,v_{l_k}}+v_{l_1}\mapsto\kappa(s_1)+...+v_{l_k}\mapsto\kappa(s_k)$.

Отже, для цих P-компонент маємо на вході p_{kJ} *різні* дані $d_1\neq d_2$.

Таким чином, для кожної нормальної формули Φ існують інтерпретація $\boldsymbol{J}=(A,I)$ та $d\in{}^VA$ такі, що для різних P-компонент η та φ формули Φ із одним і тим же $p\in Ps$ тоді маємо $\eta_J(d) = p_J(d_1)$, $\varphi_J(d_2) = p_J(d_2)$ та $d_1\neq d_2$.

Отже, для кожної P-компоненти ψ формули Φ значення $\psi_J(d)$ можна задати так, як це потрібно, згідно конкретної істиннісної оцінки.

8. *S*-субтавтології та неспростовні формули

Формула *пропозиційно нерозкладна*, якщо вона атомарна або має вигляд $S^{\bar{v}}\Phi\bar{t}$.

Множину таких формул позначимо Fr_0.

Істиннісна оцінка мови – це довільне тотальне відображення $\tau : Fr_0 \to \{T, F\}$. Таке відображення продовжуємо до $\tau : Fr \to \{T, F\}$:

$\tau(\Phi) = T \Rightarrow \tau(\neg\Phi) = F$,

$\tau(\Phi) = F \Rightarrow \tau(\neg\Phi) = T$;

$\tau(\Phi) = T$ або $\tau(\Psi) = T \Rightarrow \tau(\vee\Phi\Psi) = T$,

$\tau(\Phi) = \tau(\Psi) = F \Rightarrow \tau(\vee\Phi\Psi) = F$.

Формула Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ.

Формулу Φ мови БКФЛ назвемо *S-субтавтологією*, якщо її нормалізанта – тавтологія.

Теорема 6. Формула Φ – *S*-субтавтологія ⇔ Φ неспростовна.

Доведення. Нехай Φ – *S*-субтавтологія, Ψ – нормалізанта формули Φ. Тоді Ψ є тавтологія, звідки Ψ неспростовна. Згідно $\Phi \sim_{TF} \Psi$ формула Φ теж неспростовна.

Нехай тепер Φ неспростовна. Покажемо, що Φ – *S*-субтавтологія. Припустимо супротивне: нормалізанта Ψ формули Φ – не тавтологія. Якщо Ψ – не тавтологія, то існує істиннісна оцінка мови τ така, що $\tau(\Psi) = F$. Нехай $X = ndn(\Psi)$.

Задамо інтерпретацію $\boldsymbol{J} = (N, I)$ і $d \in N^X$ так, як описано вище. Тоді для різних *P*-компонент η та φ формули Ψ із одним і тим же $p \in Ps$ маємо $\eta_J(d) = p_J(d_1)$, $\varphi_J(d_2) = p_J(d_2)$ та $d_1 \neq d_2$. Тепер для кожної *P*-компоненти ψ формули Ψ значення $\psi_J(d)$ задаємо так: $\psi_J(d) = \tau(\psi)$. Звідси отримуємо $\Psi_J(d) = \tau(\Psi) = F$, що суперечить неспростовності Ψ, тому й неспростовності Φ.

Таким чином, клас *S*-субтавтологій збігається з класом неспростовних формул мови БКФЛ.

Наслідок. Формула Φ виконувана ⇔ ¬Φ не є *S*-субтавтологією.

Справді, Φ виконувана ⇔ ¬Φ спростовна ⇔ ¬Φ – не є *S*-субтавтологією.

Отже, для встановлення того, що формула Φ мови БКФЛ неспростовна, треба з'ясувати, чи Φ є *S*-субтавтологією. Для цього збудуємо нормалізанту формули Φ та з'ясуємо, чи вона тавтологія.

Для встановлення того, що формула Φ мови БКФЛ виконувана, достатньо з'ясувати, чи формула ¬Φ не є *S*-субтавтологією.

Таким чином, отримуємо:

Теорема 7. Проблема виконуваності та проблема неспростовності формул мови БКФЛ алгоритмічно розв'язні.

Висновки

Досліджено безкванторні композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів функціональних рівнів. Виділено три різновиди таких логік: без виділення композицій рівності, із композиціями слабкої (з точністю до визначеності) рівності та строгої рівності. Описано семантичні моделі та мови безкванторно-функціональних логік, досліджено їх семантичні властивості. Розглянуто нормальні форми термів і формул, введено поняття *S*-субтавтології. Запропоновано кодування нормальних термів, на цій основі для кожної формули, що не є S-субтавтологією, збудована інтерпретація, яка спростовує цю формулу. Доведено збіжність класів S-субтавтологій та неспростовних формул. Звідси отримано розв'язність проблем виконуваності та неспростовності формул.

Список використаних джерел

1. *Нікітченко М.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. *Нікітченко М.С.* Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. Шкільняк С.С. Реномінативні композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 195–202.

References

1. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Matematycna lohika ta teoria alhorytmiv*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Prykladna lohika*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2014). Renominative composition-nominative logics with predicates of equality. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* No3. P. 195–202.

Надійшла до редколегії 15.09.15