

УДК 539.3

Опанасович¹ В. К., д.ф.-м.н., доц.,
Слободян¹ М. С., к.ф.-м.н., доц.,
Бедрій¹ В. Я., аспірант

**Двовісний згин ізотропної пластини з
прямокутною жорсткою шайбою та
прямолінійною наскрізною тріщиною з
урахуванням ширини області контакту
її берегів**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,
79000, Україна, e-mail: slob@yandex.ua

Opanasovich¹ V. K., Dr. Sci., Assoc. Prof.,
Slobodyan¹ M. S., PhD, Assoc. Prof.,
Bedriy¹ V. Y., graduate student

**Biaxial bending of an isotropic plate with
rectangular rigid washer and rectilinear
cross-cutting crack with account of width of
contact area between it's edges**

¹Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine,
email: slob@yandex.ua

Сформульовано і розв'язано задачу про двосторонній згин нескінченної ізотропної пластини, що містить прямокутне жорстке включення та наскрізну прямолінійну тріщину, береги якої контактують по області постійної ширини. Зроблено аналіз впливу навантаження, взаємного розташування включення та тріщини на коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль, критичне навантаження та контактне зусилля між берегами тріщини.

Ключові слова: прямолінійна тріщина, шайба, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, контакт берегів, контактне зусилля.

The problem of bending of isotropic plates with rigid rectangular inclusion and crack is solved with taking account of width of contact area between edges. Solution of the problem is presented as the combination of solutions of two auxiliary problems: (i) elastic plane stress problem and (ii) bending problem, which is attacked with the making use of classical theory of bending plates. To construct the solution of both the plane problem and bending problem, the complex potentials are introduced as a sum of correspondent complex potentials for inclusion and crack. Having used the known expressions that determine the stress-strain state of the plate through the complex potentials and satisfying the boundary conditions for both crack and inclusion, the singular integral equations are obtained. Making the unknown functions and variables dimensionless, the final system of singular integral equations with unknown complex functions and constants is derived. The resulting system of singular integral equations is reduced to a system of linear algebraic equations by the quadrature method based on complex function values. The system is solved numerically. Analysis of the contact force between the crack edges, intensity factors and critical loads for different values of parameters are performed.

Key words: linear crack, inclusion, bending, isotropic plate, complex potentials, contact shores, the contact force.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У процесі виготовлення чи експлуатації пластин в них виникати дефекти типу тріщин та з конструктивних міркувань вони можуть містити прямокутні включення значно жорсткіші за саму пластину. Виникає питання про вплив жорсткого включення та тріщин на напружено-деформований стан пластини. Методи визначення напружено-деформованого стану у вершинах тріщин у тонких пластинах наведено в

роботах [1-5]. Згин пластини з абсолютно жорстким круговим включенням та тріщиною, береги якої контактують, розглянуто в роботі [6].

2. Формулювання задачі

Дослідимо задачу про двовісний згин безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$ та жорсткою прямокутною шайбою розмірами $2a \times 2b$. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\bar{y}$ з

початком у центрі включення, направивши вісь Ox паралельно до однієї з сторін прямокутника вздовж тріщини, а вісь Oz – перпендикулярно до серединної площини пластини. На нескінченності пластина згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ , завдяки яким береги тріщини приходять у гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини по області сталої ширини h_1 . Через контакт берегів тріщини задачу розбиваємо на дві взаємозв’язані задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням класичної теорії. Лінію осі Ox , на якій розміщена тріщина, позначимо через L , а контур прямокутного жорсткого включення – через L_1 (див. рис. 1).

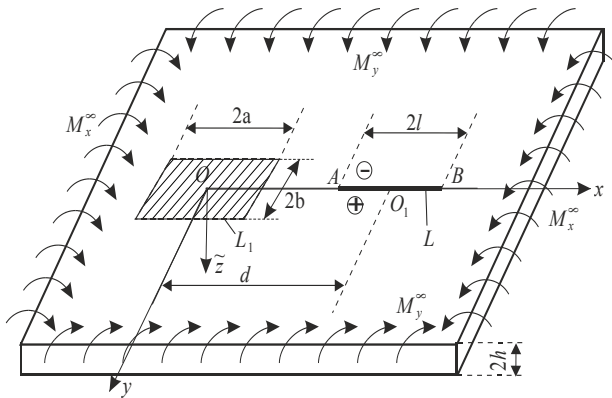


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Задача розв’язана за таких крайових умов: на тріщині [7]

$$M_y = \beta h N, \partial_x [v] + \alpha h [\partial_{xy}^2 w] = 0, x \in L,$$

$$\sigma_{yy}^\pm = -N / (2h), \sigma_{xy}^\pm = 0, P^\pm = 0, M_y^\pm = M_y, x \in L; \quad (1)$$

на межі прямокутної жорсткої шайби

$$u = 0, v = 0, w = 0, \partial w / \partial n = 0, s \in L_1; \quad (2)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини, σ_{yy} і σ_{xy} – нормальні і дотичні напруження, u, v – компоненти вектора переміщення відповідно по осі Ox та Oy у плоскій задачі; M_y – згинальний момент, P – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, w – прогин пластини у задачі згину, $[f] = f^+ - f^-$, знаками “+” і “-” позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$, $\alpha = (1 + (1 - \gamma)^2) / 2$, $\beta = 1 - \gamma / 3$, $\gamma = h_1 / h$.

3. Розв’язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [1] та задачі згину [2], розв’язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $Q(u)$, $Q_1(u)$, $G(u)$, $G_1(u)$ та дійсної сталої C'_0 :

$$\text{Im} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_L \frac{Q(u) du}{u-x} + \int_{L_1} (K_1(u,x) Q_1(u) du + K_2(u,x) \overline{Q_1(u) d\bar{u}}) \right\} = 0, \text{Im} \left\{ a_1 \int_L \frac{G(u) du}{u-x} + \int_{L_1} (K_3(u,x) G_1(u) du + K_4(u,x) \overline{G_1(u) d\bar{u}}) \right\} = C'_0, x \in L,$$

$$a_2 + a_1 \int_L \frac{G(u) du}{u-x} + \int_{L_1} (K_3(u,x) G_1(u) du + K_4(u,x) \overline{G_1(u) d\bar{u}}) = -\beta h \left\{ \frac{2}{\pi} \int_L \frac{Q(u) du}{u-x} + \int_{L_1} (K_1(u,x) Q_1(u) du + K_2(u,x) \overline{Q_1(u) d\bar{u}}) \right\}, x \in L,$$

$$\text{Re} Q(x) + \tilde{\alpha} \text{Re} G(x) = 0, x \in L, \quad (3)$$

$$\int_L [L_1(u,t) Q(u) + L_2(u,t) \overline{Q(u)}] du + \int_{L_1} [M_1(u,t) Q_1(u) du + M_2(u,t) \overline{Q_1(u) d\bar{u}}] = 0,$$

$$\int_L [L_3(u,t) G(u) du + L_4(u,t) \overline{G(u) d\bar{u}}] + \int_{L_1} [M_3(u,t) G_1(u) du + M_4(u,t) \overline{G_1(u) d\bar{u}}] = -\tilde{D}, t \in L_1,$$

$$\int_L Q(u) du = 0, \int_L G(u) du = 0, \text{Im} \left\{ \int_L u G(u) du \right\} = 0,$$

$$M_1(u,t) = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{1}{u-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{1}{\bar{u}-\bar{t}} \right),$$

$$M_2(u,t) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{\bar{u}-\bar{t}} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{t-u}{(\bar{u}-\bar{t})^2} \right),$$

$$L_1(u,t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{u-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{1}{u-\bar{t}} \right), \tilde{D} = 2\tilde{\Gamma} + \frac{\bar{d}t}{dt} \tilde{\Gamma}',$$

$$L_2(u,t) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{u-\bar{t}} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{t-u}{(u-\bar{t})^2} \right),$$

$$M_4(u,t) = -M_2(u,t), L_4(u,t) = -L_2(u,t),$$

$$M_3(u, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{u-t} + \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{1}{\bar{u}-\bar{t}} \right),$$

$$L_3(u, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{u-t} - \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{\tilde{k}}{u-\bar{t}} \right), \quad a_1 = \frac{m\tilde{k}}{\pi},$$

$$K_1(u, x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{u-x} - \frac{k}{\bar{u}-x} \right), \quad K_2(u, x) = \frac{\bar{u}-u}{\pi(\bar{u}-x)^2},$$

$$K_3(u, x) = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{\tilde{k}}{u-x} - \frac{1}{\bar{u}-x} \right), \quad \tilde{k} = \frac{3+\nu}{1-\nu},$$

$$K_4(u, x) = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{u-\bar{u}}{(\bar{u}-x)^2} \right), \quad k = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad i^2 = -1,$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad m = -D(1-\nu),$$

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2D(1-\nu)}, \quad \tilde{\alpha} = 2\mu\alpha h \frac{1+\nu}{1-\nu},$$

$$a_2 = m(\tilde{\Gamma}(\tilde{k}-1) - \tilde{\Gamma}'), \quad Q(x) = -\frac{2i\mu}{1+k} \partial_x [u+iv],$$

$$G(x) = -i(1+\tilde{k})^{-1} [\partial_x (\partial_x w + i\partial_y w)],$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [3]

$$k^\pm = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)Q(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)/l},$$

$$K^\pm = \mp 4Eh^3 (3+\nu)(3(1-\nu^2))^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)G(x)).$$

Критичний момент \tilde{M} старту росту тріщини в нашому випадку визначимо за формулою [6]

$$\tilde{M} = \frac{M_y^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \frac{(3+\nu) \min\{K_1\}^{-1}}{\sqrt{3(1+\nu)(3\alpha^2(1+\nu)+3+\nu)}},$$

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу пластини.

4. Числовий аналіз

Числовий аналіз проведено при $\gamma = 0,13$ [7], $\nu = 0,3$.

Систему сингулярних інтегральних рівнянь (3) розв'язуємо за допомогою методу механічних квадратур [5], скориставшись конформним відображенням зовнішності прямокутника на зовнішність одиничного кола

$$z = x + iy = \omega(\varepsilon) = R \left(\varepsilon + \sum_{k=1}^n c_k \varepsilon^{-k} \right), \quad c_{2l} = 0, \quad R > 0,$$

$$a = R \left(1 + \sum_{k=1}^n c_{2k-1} \right), \quad b = R \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k c_{2k-1} \right), \quad (4)$$

$$\frac{a}{l} = \frac{R}{l} \left(1 + \sum_{k=1}^n c_{2k-1} \right), \quad \varepsilon = e^{i\theta}, \quad R > 0,$$

де R – дійсне число, c_k – відомі сталі, значення яких наведено в [4].

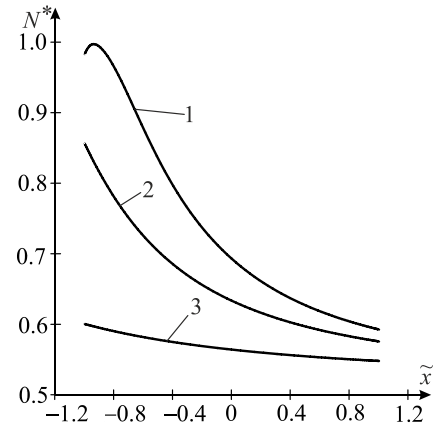


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактної зусилля при різних $\tilde{x} = d/l$

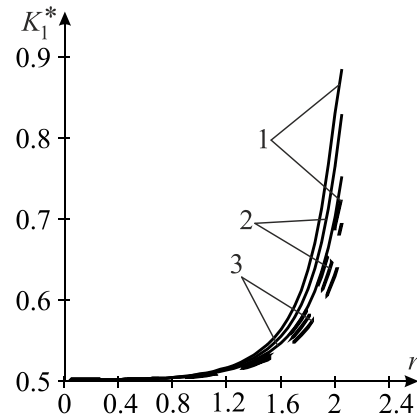


Рис. 3. Графічна залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів від $r = R/l$

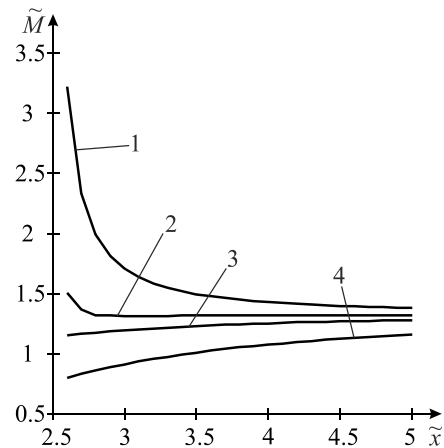


Рис. 4. Графічна залежність критичного моменту від $\tilde{x} = d/l$

На рис. 2 подано графічну залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x/l$ при $\chi = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, $a/b = 2$, $a/l = 2$, причому кривим 1, 2, 3 відповідає відповідно $\tilde{x} = d/l = 2; 2,5; 4$. Величина зведеного контактного зусилля N^* в ближній вершині A ($\xi = -1$) є більшою, ніж у дальній вершині B ($\xi = 1$).

На рис. 3 наведено графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_1^* = K_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$ в залежності від відносного розміру включення $r = R/l$ при $a/b = 7$, $\chi = 1$. Криві 1-3 побудовані при $\tilde{x} = d/l = 8,1; 8,5; 9$ відповідно, причому суцільні лінії відповідають КІМ у ближній до включення вершині тріщини, штрихові – у дальній. Як видно з рис. 3 КІМ у ближній вершині більший ніж у дальній.

Список використаних джерел

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н. И. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
2. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / Прусов И. А. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.
4. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами / Космодамианский А.С.. – К.: Выща школа, 1975. – 228 с.
5. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. Опанасович В. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують / Опанасович В., Слободян М. // Вісник Львів. держ. аграр. ун-ту. – 2007. – № 8. – с. 75-87.
7. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.

На рис. 4 зображено графічні залежності критичного моменту $\tilde{M} = M_y^\infty \sqrt{\pi l / (2\gamma_* E)} / (2h^2)$ в залежності від $\tilde{x} = d/l$ при $a/b = 5$, $a/l = 1,5$. Криві 1-4 побудовані при відношенні згинальних моментів на нескінченності $\chi = M_x^\infty/M_y^\infty$ рівним 0,44; 0,7; 1,2 відповідно. Числовий аналіз показав, що при $\chi < 0,7$ \tilde{M} спадає із збільшенням відносної відстані \tilde{x} , а при $\chi > 0,7$ \tilde{M} зростає із збільшенням \tilde{x} . Крім того, коли \tilde{x} прямує до безмежності, тобто коли тріщина знаходиться далеко від шайби, \tilde{M} прямують до 1,326 (випадок однієї ізольованої тріщини).

На основі числового аналізу встановлено, що при віддаленні тріщини від жорсткого включення, контактне зусилля, зведені КІМ та критичний момент виходить на сталі значення для однієї тріщини [7].

References

1. MUSHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotorie osnovnie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moscow: Nauka.
2. PRUSOV, I.A. (1975) *Metod sopragenia v teorii плит*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta.
3. SAVRUK, M.P. (1981) *Dvumerniye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami*. Kyiv: Naukova Dumka.
4. KOSMODAMIANSKIY, A.S. (1975) *Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, virezami, vystupami*. Kyiv: Vishcha shkola.
5. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P., DATSISHIN, A.P. (1976) *Raspredeleniye napragniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka.
6. OPANASOVYCH, V.K., SLOBODYAN, M.S. (2007) *Dvovishiy zgin bezmegnoyi plastini z absolutno gorstkoyu shayboyu i trishchinju, beregi yakoyi kontaktuyut*. *Visnyk Lvivskogo dergavnogo agrarnogo universitetu*. Vol. 8, pp. 75-87.
7. OPANASOVYCH, V.K. (2007) *Zgin plastini z naskriznoyu trishchinoyu z urahuvanniam shirini oblasti kontaktu yiyi poverhon*. *Naukovi notatki Lutskogo tehnichnogo universitetu*. № 20 (2). pp. 123–127.

Надійшла до редколегії 29.09.2015