УДК 517.9

Репета Б. В.[1], аспірант.

## Аналог біфуркації Андронова–Гопфа у системі з кривою положень рівноваги

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: bogdan.repeta@gmail.com

B. V. Repeta[1], graduate student.

## A counterpart of the Andronov–Hopf bifurcation in a system with a curve of equilibria

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: bogdan.repeta@gmail.com

*У статті розглянуто динамічний аналог біфуркації Андронова–Гопфа у системі з швидкими та повільними змінними, в якій різниця часових масштабів їх еволюції зумовлена характером нелінійності правих частин в околі одновимірного многовиду положень рівноваги. Показано, що в одночастотній системі під час втрати властивості стійкості цим многовидом внаслідок повільної еволюції параметра відбувається перехід від затухаючих коливань до періодичного коливального режиму.*
*Ключові слова: динамічні біфуркації, біфуркація Гопфа, перехідні процеси.*

*In this paper we consider a dynamical counterpart of the Andronov–Hopf bifurcation in a system with fast and slow variables in which the time scale difference of their evolution is due to the non-linear nature of the right-hand sides. By means of the normal forms method, we show that while the trivial invariant manifold loses its stability property as the parameter slowly evolves there occurs a transition from damping oscillations to a periodic oscillatory regime in a mono-frequency system. Such a transition is not as straightforward as in case of a singularly perturbed system. In particular, here the trivial invariant manifold is a curve of equilibria. Moreover, the phase space can be split into two regions with the following properties. The forward trajectories which start from the first region approach the trivial invariant manifold, i. e. the oscillations amplitude decays, whereas the forward trajectories starting form the second region approach an asymptotically stable cycle. Thus, the aforementioned transition is only observable if the initial point of a trajectory does not lie too close to the curve of equilibria before the stability change takes place.*
*Key Words: dynamical bifurcations, Hopf bifurcation, transitional processes.*

Статтю представив акад. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Перестюк М. О.

### Вступ

Під час моделювання фізичних явищ часто виникає ситуація, коли спостережувані змінні еволюціонують у різних часових масштабах і доводиться мати справу із системами зі швидкими та повільними змінними. Як правило такі системи записують у вигляді

$$\dot{x} = f(x,u,\varepsilon), \quad \dot{u} = \varepsilon g(x,u,\varepsilon),$$

де $\varepsilon$ є малим статичним параметром, а $x$ та $u$ — швидкими та повільними змінними відповідно. Значний інтерес при цьому становить вивчення ефектів, пов'язаних із поведінкою розв'язків поблизу повільного многовиду $f(x,u,0)=0$, а саме різких стрибків за межі його околу, виникнення релаксаційних коливань, тощо.

Всебічний розвиток власне динамічних біфуркацій, зумовлених проходженням повільними змінними своїх критичних значень, розпочався із появою робіт [1–3]. Серед найбільш вагомих здобутків у даному напрямі варто відзначити результати, що стосуються явища втрати стійкості з запізненням [2, 4] та теорії розв'язків-«качок» сингулярно збурених систем [5–7]. Зокрема у [6] також наведено опис динамічної біфуркації Гопфа двовимірної системи з повільним часом.

Ми в свою чергу пропонуємо у цій статті розглянути випадок, коли різниця масштабів часу еволюції змінних спричинена не наявністю малого множника у відповідній підсистемі, а характером нелінійності правих частин. Так у системі

$$\dot{x} = f(x,u,\varepsilon), \quad \dot{u} = g(x,u,\varepsilon) \qquad (1)$$

із функціями $f(x,u,\varepsilon) = O(\|x\|)$ та $g(x,u,\varepsilon) = = o(\|x\|)$ при $x \to 0$ в околі тривіального інваріантного многовиду $x = 0$ різниця часових масштабів еволюції змінних виникає за рахунок відмінності порядків мализни відповідних функцій. А отже, для такої системи постає питання про аналогію між її динамікою та поведінкою розв'язків сингулярно збурених систем. У першу чергу нас цікавить динамічна біфуркація, що відбувається під час втрати тривіальним інваріантним многовидом властивості стійкості, коли повільно змінний параметр проходить певне критичного значення.

Поверховий опис підходів для систематичного вивчення біфуркацій такого типу та їх локальний аналіз можна знайти у [8], де цей феномен відомий під назвою біфуркації без параметрів. А у статті [9] також окреслено зв'язок між класичною та динамічною біфуркаціями Гопфа. Окрім цього вона дає інформацію про поведінку розв'язків на часових інтервалах величини $O(\varepsilon^{-1})$ та про їх асимптотичне запізнення. Однак тверджень стосовно існування граничного циклу автори не наводять.

Ми в свою чергу ставимо собі за мету надати, наскільки це можливо, повний опис динамічної біфуркації Андронова–Гопфа у системі (1). Спираючись на результати [10], зокрема щодо побудови нормальних форм, ми розглянемо випадок існування періодичного розв'язку одночастотної системи зі скалярним повільно змінним параметром та покажемо, що за певних природних умов, цей цикл притягує усі інші розв'язки в малому околі многовиду $x = 0$.

## Основні припущення

Будемо розглядати диференціальну систему (1) у якій $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, і $\varepsilon \in \mathbb{R}$ є малим статичним параметром, за таких припущень.

**H1.** Праві частини системи (1) $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ мають обмежені похідні усіх порядків.

**H2.** Система має інваріантний многовид, заданий рівнянням $x = 0$, і при цьому $f(0,u,\varepsilon) = 0$, $g(0,u,\varepsilon) = 0$, $g'_x(0,u,\varepsilon) = 0$ для всіх $(u,\varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**H3.** При всіх $u$ із деякого інтервалу $I \subset \mathbb{R}$ оператор $f'_x(0,u,0)$ має суто уявні власні числа $\pm i\omega(u)$, причому $\inf\{\omega(u) : u \in I\} > 0$.

Відзначимо, що забезпечити додаткову умову $g'_x(0,u,\varepsilon) = 0$ можна виконанням заміни $u \mapsto u + g'_x(0,u,\varepsilon)[f'_x(0,u,\varepsilon)]^{-1}$. Тоді за припущенням H2 праві частини системи (1) мають різні порядки мализни щодо $x$. Тобто поблизу інваріантного многовиду, заданого рівнянням $x = 0$, що повністю складається із положень рівноваги, змінну $u$ природно вважати повільними у порівнянні зі змінними $x$. Останні відіграватимуть роль основних спостережуваних змінних, у той час як $u$ будемо інтерпретувати як параметр, що повільно еволюціонує.

Щоб дослідити систему (1), зведемо її до більш зручного вигляду, застосувавши метод нормальних форм, описаний у [10]. Будемо вважати, що параметр $\varepsilon$ додатний. Тоді після здійснення відповідної процедури та переходу до змінних полярного типу, врешті-решт будемо мати систему виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 2\varepsilon\left[\alpha(v,\varepsilon) - A(v,\varepsilon)r\right]r + \varepsilon^2 R(r,v,\varphi,\varepsilon)r^2, \\ \dot{v} &= \varepsilon c(v,\varepsilon)r + \varepsilon^2 C(r,v,\varphi,\varepsilon)r^2, \\ \dot{\varphi} &= \omega(v,\varepsilon) + \varepsilon b(v,\varepsilon)r + \varepsilon^2 \Phi(r,v,\varphi,\varepsilon)r^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

з гладкими обмеженими функціями $\alpha, A, c, \omega$ та $b$ на множині $\mathrm{V} \times [0,\varepsilon_0]$, а також гладкими функціями $R, C$ і $\Phi$ на множині $[0,\mathrm{c}] \times \mathrm{V} \times \mathrm{S} \times [0,\varepsilon_0]$ для деякого $\mathrm{c} > 0$, такого що $\mathrm{c} \ll 1$, коли $\varepsilon_0 \ll 1$, та відрізка $\mathrm{V} \subset I$. При цьому ми будемо природнім чином ототожнювати будь-які дві точки $(0,v,\varphi_1)$ та $(0,v,\varphi_2)$ і розглядати задану у такий спосіб множину I, визначену рівнянням $r = 0$, що є представленням многовиду $x = 0$ у полярних координатах.

Уведемо також позначення $\alpha(v) = \alpha(v,0)$, $A(v) = A(v,0)$, $c(v) = c(v,0)$ та зробимо додаткові припущення стосовно коефіцієнтів системи (2).

**H4.** Відрізок V містить внутрішні точки $v_* < v^*$ такі, що мають місце співвідношення

$$c(v) > 0 \quad \forall v \in \mathrm{V} \cap \{v < v^*\}, \quad c(v^*) = 0, \quad c'(v^*) < 0,$$
$$\{v \in \mathrm{V} : \alpha(v) = 0\} = \{v_*\}, \quad \alpha'(v_*) > 0,$$
$$\inf_{v \in \mathrm{V}} A(v) > 0.$$

За цих умов з теореми про неявну функцію випливає таке твердження.

**Твердження 1.** При всіх достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ існують гладкі функції $v_*(\varepsilon)$ і $v^*(\varepsilon)$ такі, що $\operatorname{sgn}\alpha(v,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(v - v_*(\varepsilon))$ для всіх $v \in \mathrm{V}$ та $c(v^*(\varepsilon),\varepsilon) = 0$.

Визначимо тепер значення $\sigma > 0$ так, щоб $v^* + \sigma < \max \mathrm{V}$ і для деякого щ $> 0$ при всіх $v \in [v^* - \sigma, v^* + \sigma] \subset \mathrm{V}$ справджувалась оцінка $c'(v) < -$щ . Також виберемо додатні числа c та $\varepsilon_0$ настільки великим та малим відповідно, щоб

$$2[\alpha(v,\varepsilon)-A(v,\varepsilon)\mathrm{c}]+\varepsilon\mathrm{c}\bar{R}<0$$
$$\forall(v,\varepsilon)\in \mathrm{V}\times[0,\varepsilon_0],$$
$$c(\min \mathrm{V},\varepsilon)-\varepsilon\bar{\zeta}>0, \quad c(v^*+\sigma,\varepsilon)+\varepsilon\bar{\zeta}<0$$
$$\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_0],$$

де

$$\bar{R}=\{R(r,v,\varphi,\varepsilon):(r,v,\varphi,\varepsilon)\in[0,\mathrm{c}]\times\mathrm{V}\times\mathrm{S}\times[0,\varepsilon_0]\},$$
$$\bar{\zeta}=\{rC(r,v,\varphi,\varepsilon):(r,v,\varphi,\varepsilon)\in[0,\mathrm{c}]\times\mathrm{V}\times\mathrm{S}\times[0,\varepsilon_0]\}.$$

У такому разі можна розглядати траєкторії системи (2), що лежать у додатно напівінваріантній множині $\mathrm{R}_{\sigma,\varepsilon}\times\mathrm{S}$, де $\mathrm{R}_{\sigma,\varepsilon}=(0,\mathrm{c})\times\times(\mathrm{V}\cap\{v<v^*+\sigma\})$, яка має таку структуру.

**Твердження 2.** Множина $\mathrm{R}_{\sigma,\varepsilon}\times\mathrm{S}$ розкладається на дві непорожні підмножини $\mathrm{D}_\varepsilon^-$ та $\mathrm{D}_\varepsilon^+$ з такими властивостями:
1) додатна півтраєкторія, що стартує з $\mathrm{D}_\varepsilon^-$, прямує при $t\to\infty$ до нерухомої точки, що належить I та має координату $v\le v_*(\varepsilon)$;
2) додатна півтраєкторія, що стартує з $\mathrm{D}_\varepsilon^+$, не має $\omega$-граничних точок на I, причому, якщо $v_0<v_*(\varepsilon)$, то така траєкторія в певний момент часу перетне площину $v=v_*(\varepsilon)$.

*Доведення.* Виключивши у системі (2) час, вважаючи $v$ незалежною змінною, будемо мати рівняння

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}=\left[-\frac{2A(v,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)}+\varepsilon P(r,v,\varphi,\varepsilon)\right]r+\frac{2\alpha(v,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)},$$

де $P(r,v,\varphi,\varepsilon)$ визначається як

$$\frac{c(v,\varepsilon)R(r,v,\varphi,\varepsilon)-2[\alpha(v,\varepsilon)-A(v,\varepsilon)r]C(r,v,\varphi,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)[c(v,\varepsilon)+\varepsilon C(r,v,\varphi,\varepsilon)r]}.$$

Позначивши

$$m(v,\varepsilon)=\min_{(r,\varphi)\in[0,\mathrm{c}]\times\mathrm{S}}P(r,v,\varphi,\varepsilon),$$

та розв’язавши диференціальну нерівність

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\ge\left[-\frac{2A(v,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)}+\varepsilon m(v,\varepsilon)\right]r+\frac{2\alpha(v,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)}$$

прийдемо до висновку, що множина тих $(r_0,v_0,\varphi_0)\in\mathrm{R}_{\sigma,\varepsilon}\times\mathrm{S}$, для яких $v<v_*(\varepsilon)$ та

$$r_0\ge-\int_{v_0}^{v_*(\varepsilon)}\frac{2\alpha(v,\varepsilon)}{c(v,\varepsilon)}\exp\int_s^{v_*(\varepsilon)}\left(\varepsilon m(v,\varepsilon)-\frac{2A(\tau,\varepsilon)}{c(\tau,\varepsilon)}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

є непорожньою підмножиною множини $\mathrm{D}_\varepsilon^+$. Непорожність $\mathrm{D}_\varepsilon^-$ доводиться аналогічно. □

**Існування асимптотично стійкого циклу**

Нехай $(r_0,v_0,\varphi_0)\in\mathrm{D}_\varepsilon^+$ є початковою точкою розв'язку $(r_t,v_t,\varphi_t)$ системи (2). За побудовою множини $\mathrm{D}_\varepsilon^+$ настане такий момент $t_*>0$, що $v_{t*}=v_*(\varepsilon)$. При цьому яким би малим не було $\delta\in(0,\mathrm{c})$, існує підобласть $\mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+\subset\mathrm{D}_\varepsilon^+$ така, що для $(r_0,v_0,\varphi_0)\in\mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+$ будемо мати $r_{t*}\in(0,\delta)$. Множина $\mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+$ є непорожньою, що випливає із тих самих міркувань, що й у доведенні твердження 2, та має таку властивість.

**Твердження 3.** Якщо $\varepsilon>0$ є достатньо малим та $(r_0,v_0,\varphi_0)\in\mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+$, то радіальна компонента розв'язку $r_t$ спадає з експоненціальною швидкістю на проміжку $t\in(0,\tau)$ для довільного $\tau<t_*$.

*Доведення.* Зменшимо в разі потреби значення $\varepsilon_0>0$ настільки, щоб для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ і $v\in[v_0,v_*(\varepsilon)]$ справджувались співвідношення

$$\varepsilon\bar{R}-2A(v,\varepsilon)<0,$$
$$\vartheta(v,\varepsilon):=c(v,\varepsilon)+\varepsilon\bar{\zeta}>0.$$

Тоді на проміжку $t\in(0,\tau)$ компоненти $r_t$ та $v_t$ розв'язку системи (2) задовольняють пару диференціальних нерівностей

$$\dot{r}\le2\varepsilon\alpha(v,\varepsilon)r, \quad \dot{v}\ge\varepsilon\vartheta(v,\varepsilon)r.$$

Права частина другої нерівності є додатною, тобто $v_t$ зростає від початкового значення $v_0$ до $v_\tau<v_*(\varepsilon)$. А отже, має місце оцінка $r_t\le r_0\exp(2\bar{\alpha}(\varepsilon)\tau)$, де число $\bar{\alpha}(\varepsilon)=\max\{\alpha(v,\varepsilon): v\in[v_0,v_\tau]\}$ є від'ємним за припущенням H4. □

Далі, з нерівності $c'(v^*)<0$ випливає існування та єдиність для всіх достатньо малих $\varepsilon>0$ розв'язків $v_-^*(\varepsilon)$ і $v_+^*(\varepsilon)$ рівнянь $c(v,\varepsilon)=\varepsilon(\bar{\zeta}+1)$ та $c(v,\varepsilon)=-\varepsilon(\bar{\zeta}+1)$ відповідно. При цьому $v_-^*(\varepsilon)<v^*(\varepsilon)<v_+^*(\varepsilon)$ і $|v_\pm^*(\varepsilon)-v^*(\varepsilon)|=O(\varepsilon)$, коли $\varepsilon\to0+$. Це дає змогу охарактеризувати поведінку розв'язку після моменту $t_*$.

**Твердження 4.** Нехай числа $\varepsilon>0$ та $\varsigma>0$ достатньо малі. Тоді множина

$$\mathrm{G}_\varepsilon=\{(r,v,\varphi):r\in(0,\mathrm{c}),v\in(v_-^*(\varepsilon),v_+^*(\varepsilon)),\varphi\in\mathrm{S}\}$$

є додатно напівінваріантною. Причому для точки $(r_0,v_0,\varphi_0)\in\mathrm{D}_\varepsilon^+$ знайдеться момент $t^*>t_*$ такий, що при всіх $t>t^*$ розв'язок $(r_t,v_t,\varphi_t)$ належить до множини $\mathrm{G}_\varepsilon$ та справджується нерівність $r_t\ge\rho_{\varepsilon,\varsigma}$, у якій $\rho_{\varepsilon,\varsigma}=\min\{r_{t*},\varsigma\}$.

*Доведення.* З оцінок

$$0 < \vartheta(v,\varepsilon) \le c(v,\varepsilon) + \varepsilon C(r,v,\varphi,\varepsilon) r \quad \forall v \in [v_0, v_-^*(\varepsilon)],$$
$$c(v_+^*(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon C(r, v_+^*(\varepsilon),\varphi,\varepsilon) r \le$$
$$\le c(v_+^*(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon \overline{\zeta} = -\varepsilon < 0$$

випливає додатна напівінваріантність області $G_\varepsilon$ та існування вказаного моменту $t^*$. А якщо вважати числа $\varepsilon_0 > 0$ і $\varsigma > 0$ настільки малими, що

$$2[\alpha(v,\varepsilon) - A(v,\varepsilon)\varsigma] - \varepsilon\varsigma \overline{R} > \varepsilon$$
$$\forall (v,\varepsilon) \in [v_-^*(\varepsilon), v_+^*(\varepsilon)] \times [0,\varepsilon_0],$$

то дістанемо нерівність

$$\dot{r}_t \ge \varepsilon^2 r_t \quad \forall t \in \{t \ge t^* : r_t \in (0,\varsigma]\},$$

звідки $r_t \ge \min\{r_{t^*}, \varsigma\}$. □

Оскільки за малих $\varepsilon > 0$ похідна компоненти $\varphi_t$ є додатною, ми можемо перейти до незалежної змінної $\varphi$, виключивши час у системі (2), після чого отримаємо систему

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \varepsilon r\left[\beta(v) - B(v) r + \varepsilon p(r,v,\varphi,\varepsilon)\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \varepsilon r\left[\gamma(v) + \varepsilon q(r,v,\varphi,\varepsilon)\right], \tag{3}$$

у якій

$$\beta(v) = \frac{2\alpha(v)}{\omega(v)}, \quad B(v) = \frac{2A(v)}{\omega(v)}, \quad \gamma(v) = \frac{c(v)}{\omega(v)},$$

а функції $p(r,v,\varphi,\varepsilon)$ та $q(r,v,\varphi,\varepsilon)$ визначаються як

$$\frac{\hat{R}(r,v,\varphi,\varepsilon)\omega(v) r - 2[\alpha(v) - A(v) r]\hat{\Phi}(r,v,\varphi,\varepsilon)}{\omega(v)[\omega(v) + \varepsilon\hat{\Phi}(r,v,\varphi,\varepsilon)]}$$

та

$$\frac{\hat{C}(r,v,\varphi,\varepsilon)\omega(v) r - c(v)\hat{\Phi}(r,v,\varphi,\varepsilon)}{\omega(v)[\omega(v) + \varepsilon\hat{\Phi}(r,v,\varphi,\varepsilon)]}$$

відповідно, де

$$\hat{R}(r,v,\varphi,\varepsilon) = 2\varepsilon^{-1}\left[\alpha(v,\varepsilon) - \alpha(v) - \right.$$
$$\left. - A(v,\varepsilon) r + A(v) r\right] r + R(r,v,\varphi,\varepsilon) r^2,$$

$$\hat{C}(r,v,\varphi,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\left[c(v,\varepsilon) - c(v)\right] r + C(r,v,\varphi,\varepsilon) r^2,$$

$$\hat{\Phi}(r,v,\varphi,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\left[\omega(v,\varepsilon) - \omega(v)\right] r +$$
$$+ b(v,\varepsilon) r + \varepsilon\Phi(r,v,\varphi,\varepsilon) r^2.$$

Як наслідок із попередніх міркувань, якщо для розв'язку $(r(\varphi), v(\varphi))$ системи (3) мають місце рівності

$$\varphi_* = \varphi_{t^*}, \quad r(\varphi_*) = r_{t^*}, \quad v(\varphi_*) = v_{t^*},$$

то для нього виконуватимуться співвідношення

$$\rho_{\varepsilon,\varsigma} \le r(\varphi) < \mathrm{c}, \quad v_-^*(\varepsilon) < v(\varphi) < v_+^*(\varepsilon) \quad \forall \varphi > \varphi_*.$$

Будемо вважати, що $\varepsilon_0$ настільки мале, що при всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$

$$[v_-^*(\varepsilon), v_+^*(\varepsilon)] \subset [v^* - \sigma, v^* + \sigma].$$

Позначимо $r^* = \alpha(v^*) / A(v^*)$ та

$$W(r,v) = \frac{(r - r^*)^2}{\eta^2} + \frac{(v - v^*)^2}{\sigma^2},$$

де $\eta$ є настільки великим, що

$$\max\left\{\frac{[r^*]^2}{\eta^2}, \frac{[\mathrm{c} - r^*]^2}{\eta^2}\right\} < \frac{3}{4}.$$

Тоді, вважаючи що $\mathrm{c} > r^*$, еліпс $W(r,v) = 1$ лежатиме у смузі $v \in [v^* - \sigma, v^* + \sigma]$ та міститиме прямокутник $[0,\mathrm{c}] \times [v^* - \sigma, v^* + \sigma]$.

**Твердження 5.** Знайдеться таке $L > 0$, що кожен розв'язок $(r(\varphi), v(\varphi))$ системи (3), який проходить через область $G_\varepsilon$, увійде до множини

$$E_\varepsilon = \{(r,v) : W(r,v) \le \varepsilon L\}$$

та буде залишатися у ній. При цьому для всіх досить малих $\varepsilon > 0$ множина $E_\varepsilon$ буде лежати всередині $(0,\mathrm{c}) \times (v^* - \sigma, v^* + \sigma)$.

*Доведення.* Позначимо $w(\varphi) = W(r(\varphi), v(\varphi))$. Тоді беручи до уваги, що $\beta(v^*) - B(v^*) r^* = 0$ та $\gamma(v^*) = 0$, вздовж розв'язку $r = r(\varphi), v = v(\varphi)$ справджується нерівність

$$\frac{w'(\varphi)}{2\varepsilon} = \frac{r(r - r^*)}{\eta^2}\Big[\beta(v) - \beta(v^*) - B(v) r +$$
$$+ B(v^*) r^* + \varepsilon p(r,v,\varphi,\varepsilon)\Big] +$$
$$+ \frac{r(v - v^*)}{\sigma^2}\Big[\gamma(v) - \gamma(v^*) + \varepsilon q(r,v,\varphi,\varepsilon)\Big] \le$$
$$\le r\left[-\frac{B(v^*)}{\eta^2}(r - r^*)^2 + \frac{M_{\beta,B}}{\eta^2}|r - r^*||v - v^*| - \right.$$
$$\left. - \frac{\text{щ}}{\sigma^2}(v - v^*)^2 + \varepsilon M_{p,q}\right]$$

із відповідним чином вибраними додатними сталими $M_{\beta,B}$ та $M_{p,q}$. Якщо за потреби збільшити значення $\eta$ настільки, щоб виконувалась нерівність $\eta^2 > \sigma^2 M_{\beta,B}^2 / [4B(v^*)щ]$, то знайдеться $\lambda > 0$ таке, що

$$w'(\varphi) \le -2\varepsilon\rho_{\varepsilon,\varsigma}\left[\lambda w(\varphi) - \varepsilon M_{p,q}\right] \quad \forall \varphi > \varphi_*.$$

А отже, існує таке $\varphi^* \ge \varphi_*$, що $w(\varphi) < \varepsilon L$ при всіх $\varphi > \varphi^*$, якщо покласти $L = 2\varepsilon M_{p,q} / \lambda$. □

**Твердження 6.** Множина $\mathrm{E}_\varepsilon$ містить періодичний розв'язок $(\tilde{r}(\varphi), \tilde{v}(\varphi))$ системи (3), що притягує кожен інший розв'язок, який при деякому $\varphi'$ потрапляє в $\mathrm{E}_\varepsilon$.

*Доведення.* Позначимо $\xi = (r - r^*, v - v^*)$ та $S = \mathrm{diag}\{\eta^{-2}, \sigma^{-2}\}$. Тоді $W(r,v) = \langle S\xi, \xi\rangle$, а система (3) набуде вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi} = \varepsilon X(\xi) + \varepsilon^2 \bar{X}(\xi, \varphi, \varepsilon)$$

із

$$X(\xi) = \begin{pmatrix} \left[\beta(v) - B(v) r\right] r \\ \gamma(v) r \end{pmatrix},$$

$$\bar{X}(\xi, \varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} p(r, v, \varphi, \varepsilon) \\ q(r, v, \varphi, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Оскільки за умови достатньої мализни $\varepsilon_0$ при всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ множина $\mathrm{E}_\varepsilon$ лежить вище прямої $r = r^*$, то, як випливає із попереднього твердження, для кожного $\xi \in \mathbb{R}^2$ має місце нерівність

$$2\langle Sz\xi, X(z\xi)\rangle \le -\lambda r^* \langle Sz\xi, z\xi\rangle.$$

Звідси, спрямувавши $z \to 0$, отримаємо таке співвідношення

$$2\langle S\xi, X'(0)\xi\rangle \le -\lambda r^* \langle S\xi, \xi\rangle.$$

Виберемо тепер довільну пару розв'язків $\xi_1(\varphi), \xi_2(\varphi)$ таких, що $\langle S\xi_i(\varphi'), \xi_i(\varphi')\rangle \le \varepsilon L$, $i = 1, 2$, для деякого $\varphi'$. Зменшивши у разі потреби $\varepsilon_0 > 0$, можна досягти якої завгодно мализни при всіх $\varphi > \varphi'$ значення

$$\varepsilon \int_0^1 \left[X'(\xi) - X'(0) + \varepsilon \bar{X}'(\xi, \varphi, \varepsilon)\right]_{\xi = s\xi_1(\varphi) + (1-s)\xi_2(\varphi)} \mathrm{d}s,$$

а отже, справедливість нерівностей

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left\langle S\left[\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right], \xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right\rangle \le$$
$$\le \left\langle S\left[\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right], \varepsilon X'(0)\left[\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right]\right\rangle \le$$
$$\le -\frac{\varepsilon\lambda r^*}{2}\left\langle S\left[\xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right], \xi_1(\varphi) - \xi_2(\varphi)\right\rangle \quad \forall \varphi > \varphi'.$$

Таким чином маємо властивість конвергентності системи (3) всередині $\mathrm{E}_\varepsilon$. □

Підсумовуючи все вище сказане, сформулюємо тепер основний результат даної статті.

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови H4, значення $\mathrm{c} > r^*$, а число $\varepsilon_0 > 0$ є достатньо малим. Тоді при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (2) має асимптотично стійкий цикл $\mathrm{C}_\varepsilon$, розташований всередині множини $\mathrm{E}_\varepsilon \times \mathrm{S}$ і який приятгує усі додатні півтраєкторії, що починаються в $\mathrm{D}_\varepsilon^+$. При цьому, яким би малим не було $\delta \in (0, \mathrm{c})$, існує підобласть $\mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+ \subset \mathrm{D}_\varepsilon^+$, що розв'язок $(r_t, v_t, \varphi_t)$ із початковими даними $(r_0, v_0, \varphi_0) \in \mathrm{D}_{\varepsilon,\delta}^+$ поводить себе у такий спосіб. Спочатку впродовж деякого часу $t \in [0, t_*]$ компонента $v_t$ зростає, в той час як $r_t$ спадає з експоненціальною швидкістю, демонструючи затухачі коливання. Після цього відбувається перехід до усталеного коливального режиму, і починаючи з деякого моменту $t^* > t_*$ розв'язок потрапляє в множину $\mathrm{E}_\varepsilon \times \mathrm{S}$ та притягується циклом $\mathrm{C}_\varepsilon$.

## Висновки

Ми розглянули одночастотну динамічну систему зі швидкими та повільними змінними $x \in \mathbb{R}^2$ та $u \in \mathbb{R}$ відповідно, що демонструє перехідний процес схожий на явище біфуркації народження граничного цикла. На відміну від сингулярно збурених систем, різниця у часових масштабах в околі тривіального інваріантного многовиду $x = 0$ була зумовлена характером нелінійності підсистеми для повільного параметра $u$: відповідні праві частини мали порядок $o(\|x\|)$ при $x \to 0$, в той час як лінійна частина підсистеми для швидких змінних $x$ була невироджена.

Ми показали, що вищезгадана система має у своєму фазовому просторі пару непорожніх множин $\mathrm{D}_\varepsilon^-$ та $\mathrm{D}_\varepsilon^+$ з такими властивостями. Траєкторії з першої множини ілюструють затухаючі коливання, в той час як траєкторії з другої спочатку впродовж деякого часу наближаються до інваріантного многовиду $x = 0$, після чого прямують до асимптотично стійкого граничного циклу. Многовид $x = 0$ при цьому складається повністю із положень рівноваги.

**Список використаних джерел**

1. *Нейштадт А. И.* Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось / А. И. Нейштадт // Успехи мат. наук. – 1985. – **40,** №5. – С. 300–301.
2. *Нейштадт А. И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях / А. И. Нейштадт // Дифференц. уравн. – 1987. – **23,** №12. – С. 2060–2067; 1988. – **24,** №2. – С. 226–233.
3. *Шишкова М. А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных / М. А. Шишкова // Докл. АН СССР. – 1973. – **209,** №3. – С. 576–579.
4. *Аносова О. Д.* Инвариантные многообразия и динамические бифуркации / О. Д. Аносова // Успехи мат. наук. – 2005. – **60,** №1. – С. 157–158.
5. *Картье П.* Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ / П. Картье // Успехи мат. наук. – 1984. – **39,** №2. – С. 57–76.
6. *Butuzov V. F.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities / V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider // J. Math. Sci. – 2004. – **121,** №1. – P. 1973–2079.
7. Dynamic bifurcations / È. Benoît // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag,1991. – **1493.** – 219 p.
8. *Liebscher S.* Bifurcation without Parameters / S. Liebscher // Lect. Notes Math. – Springer International Publishing, 2015. – **2117.** – 142 p.
9. *Rachinskii D.* Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlienear terms / D. Rachinskii, K. Schneider // J. Different. Equat. – 2005. – **210,** №1. – P. 65–86.
10. *Самойленко А. М.* Динамічна біфуркація багаточастотних коливань у швидко-повільній системі / А. М. Самойленко, І. О. Парасюк, Б. В. Репета // Укр. мат. журн. – 2015. – **67,** №7. – P. 890–915.

**References**

1. NEISHTADT, A. I. (1985) Asimptoticheskoe issledovanie poteri ustoichivosti ravnovesiia pri medlennom prokhozhdenii pary sobstvennykh chisel cherez mnimuiu os. *Uspekhi mat. nauk.* 40 (5). p. 300–301.
2. NEISHTADT, A. I. (1987) O zatiagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurcatsyiakh. *Differenz. uravn.* 23 (12). p. 2060–2067; (1988) 24 (2). p. 226–233.
3. SHISHKOVA, M. A. (1973) Rassmotreniie odnoi sistemy differenzyalnykh uravnenii s malym parametrom pri vysshykh proizvodnykh. *Dokl. AN SSSR.* 209 (3). p. 576–579.
4. ANOSOVA, O. D. (2005) Invariantnye mnogoobrazia i dinamicheskie bifurkatsyi. *Uspekhi mat. nauk.* 60 (1). p. 157–158.
5. KARTIE, P. (1984) Singuliarnye vozmushcheniia obyknovennykh differenzyalnykh uravnenii I nestandartnyi analiz. *Uspekhi mat. nauk.* 39 (2). p. 57–76.
6. BUTUZOV, V. F. & NEFEDOV, N. N. & SCHNEIDER, K. R. (2004) Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities. *J. Math. Sci.* 121 (1). p. 1973–2079.
7. BENOÎT, È. (ed.) (1991) *Dynamic bifurcations.* Berlin: Springer-Verlag.
8. LIEBSCHER, S. (2015) *Bifurcation without parameters.* Lect. Notes Math. Springer International Publishing.
9. RACHINSKII, D. & SCHNEIDER, K. (2005) Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms. *J. Different. Equat.* 210 (1). p. 65–86.
10. SAMOILENKO, A. M. & PARASIUK, I. O. & REPETA, B. V. (2015) Dynamichna bifurkatsiia bahatochastotnykh kolyvan u shvydko-povilnii systemi. *Ukr. mat. zhurn.* 67 (7). p. 890–915.


Надійшла до редколегії 15.09.15