УДК 532.595

І. Ю. Семенова[1], к. ф.-м. н.

Нелінійні коливання рідини в параболічному резервуарі при наявності пружного закріплення.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Semenova I.Yu.[1], phD.

Nonlinear liquid sloshing in a parabolic tank with elastic fixation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Розглянуто задачу про нелінійні коливання рідини в рухомому резервуарі параболічної форми при наявності пружного закріплення. Сумісні коливання такої механічної системи мають власні частоти, які значно відрізняються від парціальних частот коливань. Показано, що резонансні властивості системи суттєво проявляються на частотах, що пов'язані з домінуванням пружних коливань резервуару.

Ключові слова: рідина, параболічний резервуар, резонанс, пружинне закріплення.

We consider a nonlinear problem of liquid sloshing dynamics in absolutely rigid parabolic reservoir, attached by spring to immovable point. The nonlinear oscillations of this system are studied for the case when an external harmonic force is applied to the movable reservoir. Mathematical model of combined motion of rigid parabolic tank, filled by liquid with a free surface and fixed by spring to immovable point, is constructed. Investigation is done on the basis of efficient nonlinear multimodal model, which considers combined motion of reservoir and free surface of the liquid. The problem is solved on the basis of variational algorithms, which are based on mathematical statement of the problem in the form of the Hamilton-Ostrogradskiy variational principle. The natural frequencies of mechanical system parabolic reservoir, partially filled with ideal liquid and fixed by spring to immovable point, were determined. Analysis showed that due to combined character of motion of system components normal frequencies of this system differ from partial frequencies. We investigate system behavior in different frequency ranges for confirmation of variation of system resonant properties. It is shown that resonance manifests sharply on resonant frequency, which corresponds to domination of elastic oscillations of tank.

Key Words: liquid, parabolic reservoir, resonance, elastic fixation.

Статтю представив д. ф.-м .н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Досліджується нелінійна задача коливань параболічного резервуара з рідиною із вільною поверхнею при наявності пружного закріплення до нерухомої точки. Сумісні коливання системи параболічний резервуар – рідина при наявності пружного закріплення мають власні частоти, які значно відрізняються від парціальних частот коливань. Метою статті є визначення характерних режимів розвитку коливань системи, рух якої обмежено пружним закріпленням.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Дискретна модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектору переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини базується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [1-2], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ V^1_{ir} + \sum_j a_j V^2_{irj} + \sum_{j,k} a_j a_k V^3_{irjk} \right\} +$$

$$+ \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{U}^1_r + \sum_i a_i \vec{U}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}^4_{rijk} \right\} =$$

$$= \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijkr}^{3*} + \qquad (1)$$

$$+ \dot{\varepsilon} \left\{ \sum_i \dot{a}_i \vec{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{U}_{irj}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{U}_{ijkr}^{4*} \right\} -$$

$$- g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijkr}^4 \right\}$$

$$\frac{\rho}{(M_{res}+M_{liq})} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_j a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\varepsilon} + c\varepsilon_y =$$

$$\frac{F}{(M_{res}+M_{liq})} - g\bar{z}_0 - \frac{\rho}{(M_{res}+M_{liq})} \sum_j \dot{a}_j \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ij}^2 + 2\sum_k a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}$$

(ρ – густина рідини, g – прискорення гравітаційних сил, M_{res} та M_{liq} – маси рідини та резервуару відповідно), c – коефіцієнт жорсткості пружини.

Власні частоти механічної системи "параболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружного закріплення до нерухомої точки визначаються відповідно до теорії механічних коливань за формулою [3]:

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \lambda_1 \lambda_2} \right), \quad (2)$$

де

$$\lambda_1 = \frac{U_1^1}{V_{11}^1}, \lambda_2 = \frac{\rho}{(M_{\mathrm{Res}} + M_{\mathrm{Liq}})} U_1^1, n_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}},$$

$n_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{1-\lambda_1\lambda_2}}$, n_1 та n_2 - парціальні частоти системи резервуар з рідиною та пружинної фіксації відповідно, ω_1 - частота головного тону коливань рідини, ω_2 - частота коливань резервуара з пружинним закріпленням $\omega_2 = \sqrt{c/(M_{\mathrm{Res}} + M_{\mathrm{Liq}})}$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Розглянемо резервуар у формі параболоїда обертання $r = \sqrt{z+H}$ з вертикальною віссю OZ, який здійснює поступальні рухи в горизонтальній площині. Відносна глибина заповнення рідини $H/R_0 = 1$, співвідношення мас резервуару та рідини $M_{\mathrm{Res}}/M_{Liq} = 0{,}5$. До стінки резервуара прикладена горизонтальна сила, що змінюється за гармонічним законом $F = A\cos pt$, початкове збурення вільної поверхні відсутнє. У всіх розглянутих в подальшому випадках амплітуда зовнішньої горизонтальної сили, що діє на бак, обирається так, щоби коливання вільної поверхні рідини знаходились у нелінійному діапазоні зміни амплітуд хвиль, тобто збурення вільної поверхні на стінках бака досягали величин $(0{,}2 \div 0{,}25)R$. На графіках амплітуди ξ представлені у безрозмірному вигляді відносно характерного розміру системи R_0 радіуса резервуару, час відносно періоду коливань $2\pi/\omega_1$ першої антисиметричної форми вільної поверхні ($\omega_1 = 2.7521$ Гц). Крок чисельного інтегрування обирався на основі периоду коливань вищої гармоніки спектру і приймався $\Delta t = 0{,}04$ с.

Для системи з такими характеристиками парціальна частота рідини $1{,}4349\omega_1$ Гц та завжди є постійною величиною, а парціальна частота резервуару з пружиною збільшується при збільшенні жорсткості пружини та має мінімальне значення 0 Гц при відсутності пружинного закріплення.

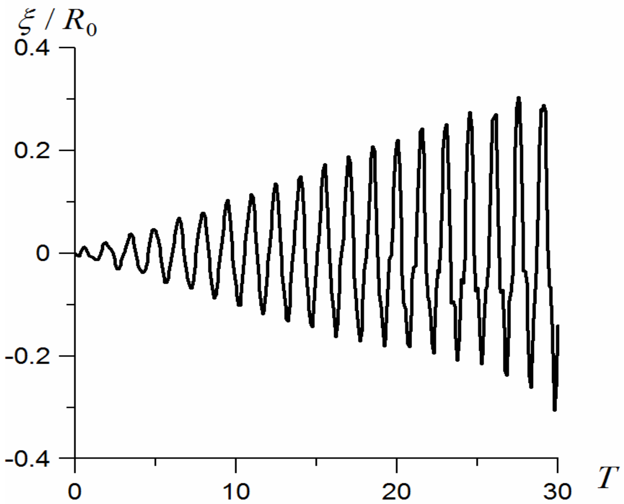

Рис. 1 Зміна збурень вільної поверхні для $F_x = 0{,}04\cos 0{,}6643\omega_1 t$.

Розглянемо коливальний рух системи для коефіцієнта жорсткості C=22148 Н/м у випадку дії гармонічної сили з частотою, близької до власної частоти ω_I, яка пов'язана з домінуванням пружних коливань резервуара $F_x = 0{,}01\cos 0{,}6643\omega_1 t$ (Рис. 1,2). Спостерігається суттєвий вплив вищих гармонік. Починаючи з 20 - го періоду коливань різко зростають амплітуди першої осе симетричної форми та вищих гармонік. Зростає і повна енергія системи (Рис.3). В системі спостерігається резонансний режим. Це підтверджує і структура частотного спектру (Рис. 2), коли домінуючі гармоніки зосереджені в околі частоти зовнішньої сили ($0{,}6643\omega_1$). При збільшенні амплітуди зовнішньої сили період амплітудної модуляції зменшується.

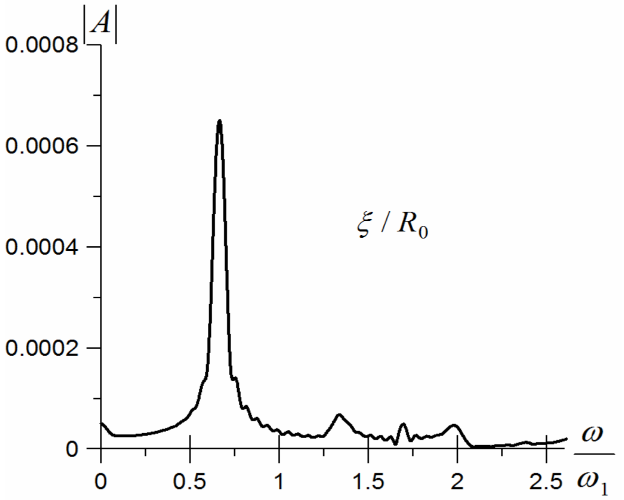

Рис. 2 Частотний спектр при збуренні руху системи $F_x = 0{,}04\cos 0{,}6643\omega_1 t$.

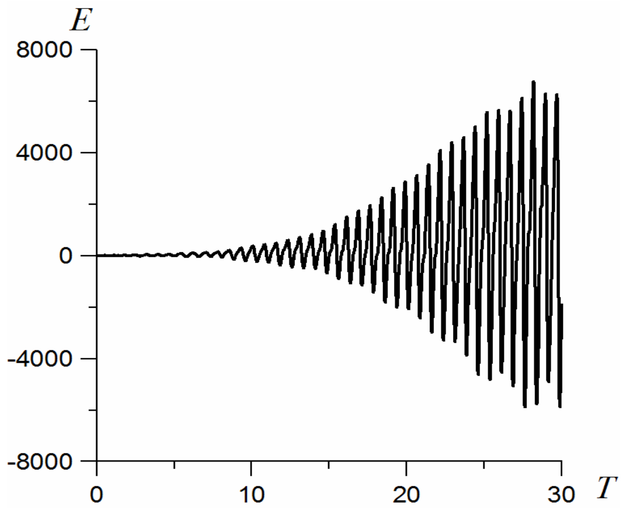

Рис. 3 Зміна повної енергії системи для $F_x = 0{,}04\cos 0{,}6643\omega_1 t$.

При зменшенні або збільшенні частоти зовнішньої сили на 10 відсотків резонансні ефекти не проявляються. Висота хвиль на поверхні взагалі не виходить в нелінійний діапазон. Коливальний рух вільної поверхні для зовнішньої сили $F_x = 0{,}04\cos 0{,}6\omega_1 t$ і $F_x = 0{,}04\cos 0{,}72\omega_1 t$ відбуваються із вираженою амплітудною модуляцією і значним дрейфом середнього значення. При збільшенні частоти зовнішнього навантаження картина хвиле утворення на вільній поверхні схожа, відмінність полягає лише у збільшенні періоду амплітудної модуляції. Якщо на систему с заданими параметрами діяти гармонічною силою $F_x = 0{,}04\cos \omega_1 t$ із частотою збурень в околі парціальної частоти вільної поверхні, то резонансні ефекти також не спостерігаються і рівень збурень вільної поверхні знаходиться в лінійному діапазоні.

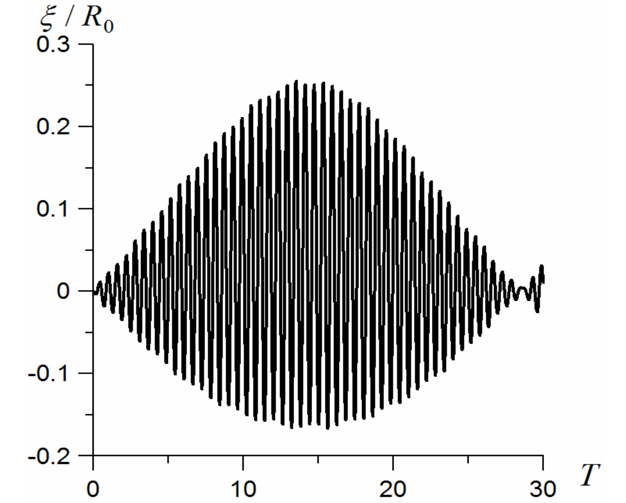

Рис. 4 Зміна збурень вільної поверхні для $F_x = 0{,}04\cos 1{,}7016\omega_1 t$.

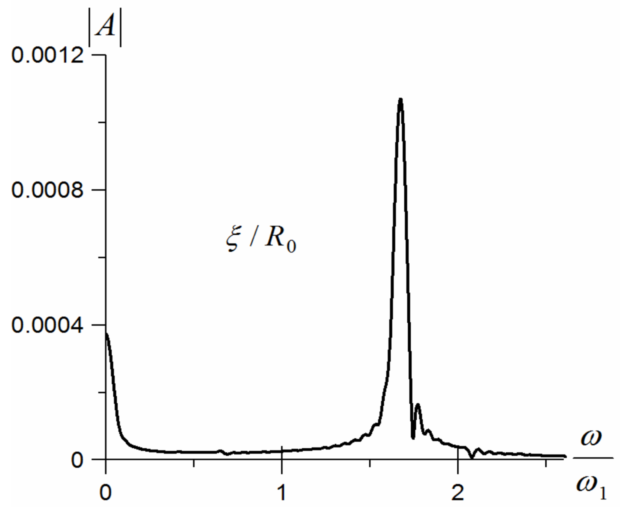

Рис. 5 Частотний спектр при збуренні руху системи $F_x = 0{,}04\cos 1{,}7016\omega_1 t$.

Розглянемо коливальний рух системи для коефіцієнта жорсткості C=22148 Н/м у випадку дії гармонічної сили з частотою, близької до власної частоти ω_{II}, яка пов'язана з домінуванням коливань вільної поверхні $F_x = 0{,}04\cos 1{,}7016\omega_1 t$ (Рис. 4,5). Висота горбів хвиль більша за глибину впадин, що є характерним для нелінійних коливань. Із Рис. 4 бачимо, що коливання рідини характеризуються чітко вираженою амплітудною модуляцією та зміною у часі середнього. Це підтверджує і структура частотного спектру (Рис. 5), коли домінуючі гармоніки зосереджені в околі частоти зовнішньої сили ($1{,}7016\omega_1$), а гармоніки на низьких частотах ($\omega \le 0{,}3\omega_1$) у 5 разів менше домінуючих гармонік. Для коливального руху системи з такими параметрами характерне явище антирезонансу (Рис. 6), коли амплітуда збурень вільної поверхні на деякому проміжку часу спадає до рівня $\xi = (0{,}01 \div 0{,}03)R$, тобто значення амплітуди падає в десять разів і тримається на інтервалі 3 періодів коливань за першою антисиметричною формою.

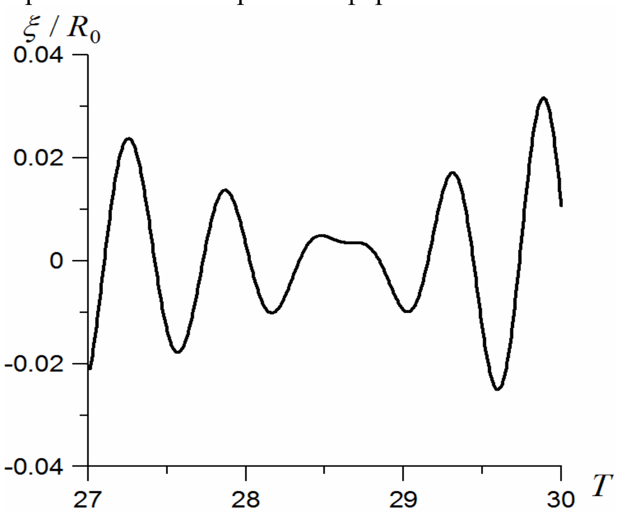

Рис. 6 Явище антирезонансу при збуренні руху системи $F_x = 0{,}04\cos 1{,}7016\omega_1 t$.

При зменшенні або збільшенні ($1{,}87\omega_1$) частоти зовнішньої сили на 10 відсотків збурення вільної поверхні не перевищують 0,04R. Для такого руху характерна наявність модуляції та зміна середнього значення у часі. Резонансні ефекти у системі з такими параметрами не з'являються.

4. Висновки

Проведено дослідження сумісного руху механічної системи параболічний резервуар – рідина при наявності пружного закріплення під дією зовнішнього періодичного навантаження. Нелінійні коливання при врахуванні сумісності руху і наявності пружини мають власні частоти, які значно відрізняються від парціальних частот коливань. Резонансні властивості системи суттєво проявляються на частотах, що пов'язані з домінуванням пружних коливань, а не на частотах, які відповідають домінуванню коливань вільної поверхні рідини. Для нелінійних коливань на домінуючих частотах рідини характерні наявність ефектів амплітудної модуляції, зміна у часі середнього значення, вплив вищих форм коливань.

Список використаних джерел

1. *Limarchenko O.,* Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid / – O. Limarchenko, G. Matarazzo, V. Yasinsky – Kyiv: FADA, 2003. – 286 p.
2. *Limarchenko O.,* Forced oscillations of liquid in a reservoir of paraboloidal shape/ *Limarchenko O.,Semenova I.//* - Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології 2013, вип. 18, С. 106-112
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем /*Болотин В.В.*– Москва, 1956. – 600 *с*.

References

1. LIMARCHENKO, O., MATARAZZO, G., YASINSKI, V. (2003) *Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid.* Kyiv.
2. *LIMARCHENKO O, SEMENOVA, I. (2013) Forced oscillations of liquid in a reservoir of paraboloidal shape.* – Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 18. – p.106-112
3. *BOLOTIN, V. (*1956*) Dynamic stability of elastic systems.* – M:GITTL

Надійшла до редколегії 25.09.15