

УДК 539.3

Опанасович В. К., д.ф.-м.н., доц.,
Яцик І. М.

**Одновісний згин ізотропної півплощини
з тріщиною, перпендикулярною до її
межі, з урахуванням ширини області
контакту її берегів**

Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: IhorYatsyk@i.ua

Opanasovych V. K., Dr. Sci., Assoc. Prof.,
Yatsyk I. M., engineer

**Uniaxial bending of the isotropic half-plane
with a crack, which is perpendicular to its
boundary, accounting for the width of the
contact area of its faces**

Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
email: IhorYatsyk@i.ua

У роботі досліджено згин рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності однорідної ізотропної півплощини з тріщиною, перпендикулярною до її межі, береги якої гладко контактують по області постійної ширини. На основі методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщини та критичного навантаження при різних параметрах задачі. Для крайової тріщини зроблено порівняння з експериментальними даними та на їхній основі визначено ширину області контакту її берегів.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна півплощина, комплексні потенціали, контакт берегів тріщини, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

In this paper the stress-strain state of isotropic half-plane with a through-the-thickness crack perpendicular to its boundary, which faces are free from the external loading is investigated. The half-plane is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, which vectors are parallel to the axis of the crack. It is assumed that under external loading the crack faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the crack faces contact, solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the problem of the plane stress-strain theory, which is treated in the frame theory of elasticity, and the problem of plates bending, which is based on the equations of Kirchhoff-Love plate theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials, the singular integral equation is obtained which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically by the method of reduction with making use of Gauss technique with a choice of main entry. The numerical analysis of the problem for some parameter values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of crack and critical loading are constructed. In particular cases known in the scientific literature, results for Kirchhoff-Love plate bending appropriate problem are obtained considering the contact of crack faces along the line. For boundary crack, the comparison with experimental data is performed and, on their basis, the contact area width of its faces is determined.

Key Words: crack, bending, isotropic half-plane, complex potentials, crack faces contact, force and moment intensity factors.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від наявності в них тріщиноподібних дефектів, які є потужними

концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладено до пластини. Для визначення граничного навантаження, а також ресурсу експлуатації пластинчастого елемента, важливо знати вплив таких дефектів на розподіл полів напружень і деформацій у ньому.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження. Тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1–3], де контакт берегів тріщин не враховували, вважаючи тріщину щілиною. Однак зрозуміло, що у більшості випадків, незважаючи на істотне ускладнення формулювання задач згину пластини із тріщинами та розв'язування відповідних математичних задач, це все ж треба робити. У працях [4–14] вивчені різноманітні задачі, де у різний спосіб враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте відсутні дослідження, пов'язані зі згином півплощини з тріщиною, береги якої контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Кірхгофа-Лява. Зазначимо, що в роботі [9] досліджено двобічний згин кусково-однорідної пластини Кірхгофа-Лява з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинальними моментами на нескінченності за наявності перпендикулярної до межі поділу матеріалів тріщини, береги якої приходять у гладкий контакт уздовж лінії поблизу однієї з основ пластини.

Мета роботи – дослідити згин ізотропної півплощини Кірхгофа-Лява з тріщиною, перпендикулярною до її межі, з урахуванням ширини області контакту берегів тріщини. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур.

2. Формулювання задачі

Дослідимо напружено-деформований стан напівнескінченної однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею за наявності в ній наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки $2l$ за дії рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. До деформування пластини береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження та перпендикулярні до її прямолінійної межі. Під дією зовнішнього навантаження береги тріщини гладко

контактують уздовж усієї її довжини по області постійної ширини h_1 .

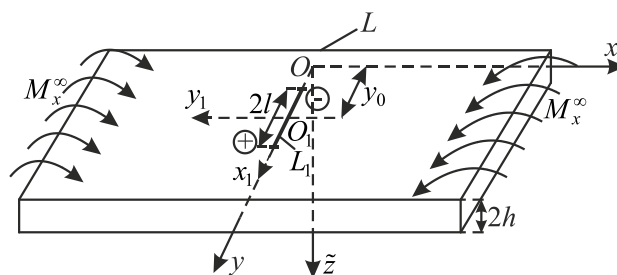


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

Виберемо глобальну декартову систему координат $Oxyz$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox уздовж її прямолінійної межі, а вісь Oy – уздовж тріщини (рис. 1). З тріщину зв'яжемо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат O_1 у центрі тріщини, направивши вісь O_1x_1 уздовж тріщини. Позначимо прямолінійну межу пластини через L , відрізок дійсної осі O_1x_1 , для якого $|x_1| \leq l$, позначимо через L_1 . y_0 – ордината центру тріщини у глобальній системі координат, Позначимо згинальні моменти на нескінченності через M_x^∞ .

Надалі дотримуємося таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ –

циліндрична жорсткість пластини, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$;

$$\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2D(1-\nu)}.$$

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подаємо у вигляді суперпозиції двох розв'язків: плоскої задачі теорії пружності і задачі згину, при чому користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови на прямолінійній межі пластини:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad M_y = P_y = 0, \quad x \in L \quad (1)$$

та на берегах тріщини [8]

$$\sigma_{y_1}^{\pm} = -\frac{N}{2h}, \quad \sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, \quad P_{y_1}^{\pm} = 0, \quad (2)$$

$$M_{y_1}^{\pm} = \beta h N, [v_1] + \alpha h \left[\frac{\partial w}{\partial y_1} \right] = 0, \quad x_1 \in L_1,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень у плоскій задачі; N – контактне зусилля між берегами тріщини, причому вважаємо, що $N > 0$; v_1 – компонента вектора переміщення у плоскій задачі на вісь $O_1 y_1$; M_y – згинальний момент; P_y – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; w – прогин пластини; квадратні дужки у формулі (2) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини $[f] = f^+ - f^-$; символами «+» і «-» позначено граничне значення відповідної функції при $y_1 \rightarrow \pm 0$; $\alpha = \frac{1+(1-\gamma)^2}{2}$, $\beta = 1 - \frac{\gamma}{3}$, а $\gamma = \frac{h_1}{h}$ – зведена ширина області контакту [8]; індекс «1» указує на прив'язку до системи координат $O_1 x_1 y_1$.

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини та встановити граничне навантаження руйнування пластини.

3. Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [15] та задачі згину [2], поступаючи аналогічно тому, як це зроблено у праці [9], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження на прямолінійній межі пластини і на тріщині та знайдено їхній аналітичний розв'язок. Крім того, на берегах тріщини отримано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомої функції стрибка кута повороту нормалі до серединної поверхні в задачі згину $X(t) = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right]$ на берегах тріщини

$$\int_{L_1} \{ \tilde{\beta} K(t, x_1) + N(t, x_1) \} X(t) dt = M_x^{\infty}, \quad (3)$$

$$x_1 \in L_1,$$

де

$$K(t, x_1) = -\frac{\beta h^2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t-x_1} + \frac{1}{t+x_1+2y_0} - \right.$$

$$\left. -\frac{4(t+y_0)}{(t+x_1+2y_0)^2} + \frac{8(x_1+y_0)(t+y_0)}{(t+x_1+2y_0)^3} \right\},$$

$$N(t, x_1) = \frac{1}{4\pi\tilde{\mu}} \left\{ \frac{2\tilde{\kappa}}{t-x_1} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{t+x_1+2y_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(t+y_0)}{(t+x_1+2y_0)^2} - \frac{8(x_1+y_0)(t+y_0)}{(t+x_1+2y_0)^3} \right\},$$

$$\tilde{\beta} = -\frac{\alpha h E}{1-\nu}.$$

Сингулярне інтегральне рівняння (3) доповнюємо додатковою умовою, що виражає собою однозначність кута повороту при обході контуру тріщини L_1

$$\int_{L_1} X(t) dt = 0. \quad (4)$$

Коефіцієнт інтенсивності моментів (КІМ) K_1 і зусиль (КІЗ) k_1 можна обчислити за формулами [3]

$$k_1^{\pm} = \mp \tilde{\beta} h \lim_{t \rightarrow \pm l} \{ f(t) X(t) \}, \quad f(t) = \sqrt{\frac{l^2 - t^2}{l}},$$

$$K_1^{\pm} = \mp 2D(3+\nu) \lim_{t \rightarrow \pm l} \{ f(t) X(t) \}.$$

Зауважимо, що у випадку крайової тріщини у ядрах сингулярного інтегрального рівняння (3) потрібно покласти $y_0 = l$. Крім того, оскільки для крайової тріщини КІМ та КІЗ у вершині, що виходить на межу пластини мають бути нульовими [3], то замість (4) має виконуватися умова

$$X(-l) = 0. \quad (5)$$

Звернемо увагу також, що між зведеними КІМ $K_1^{*\pm} = \frac{K_1^{\pm}}{M_x^{\infty} \sqrt{l}}$ та КІЗ $k_1^{*\pm} = \frac{hk_1^{\pm}}{M_x^{\infty} \sqrt{l}}$ виконується залежність $\frac{k_1^{*\pm}}{K_1^{*\pm}} = \frac{3\alpha(1+\nu)}{3+\nu}$.

4. Числовий аналіз і висновки

Отримане сингулярне інтегральне рівняння розв'язане числово за допомогою методу механічних квадратур [16, 17]. Числовий аналіз був проведений для пластинки з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$. Для випадку крайової тріщини було здійснено порівняння числових результатів з даними, отриманими експериментальним

шляхом [18], та встановлено, що результати співпадають при відносній ширині області контакту $0,3 \leq \gamma \leq 0,7$. Це узгоджується з даними статті [19], у якій на основі тривимірної теорії пружності із використанням числового методу скінченних елементів показано, що для нескінченної пластини завтовшки h відносна ширина області контакту берегів тріщини є постійною поблизу її вершин (0,342) і дещо відрізняється у центральній частині тріщини (0,3).

На рис. 2 і 3 суцільними лініями побудовані відповідні величини при $\gamma = 0,6$, штрихпунктирними – при $\gamma = 0$ (контакт по лінії), штриховими – без урахування контакту берегів тріщини.

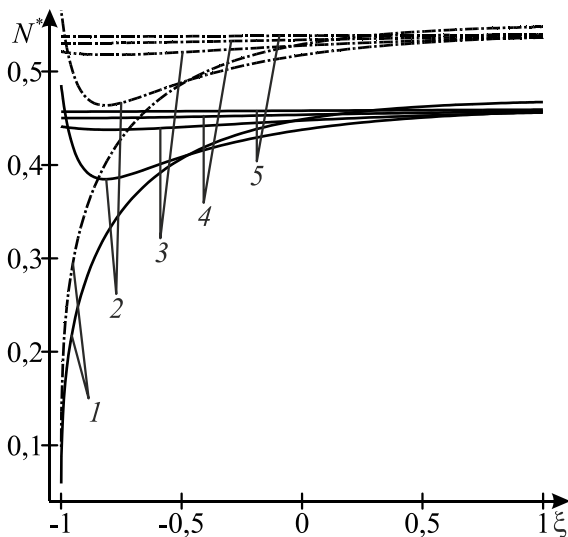


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* від безрозмірної координати ξ при різних значеннях \tilde{y} і γ .

На рис. 2 побудована графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^* = \frac{hN}{M_x^\infty}$ від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$. Криві 1 побудовані при $\tilde{y} = y_0/l = 1$ (випадок крайової тріщини), криві 2 при $\tilde{y} = 1,1$, криві 3 – при $\tilde{y} = 1,5$, криві 4 – при $\tilde{y} = 2$, криві 5 – при $\tilde{y} = 3$. При віддаленні тріщини від межі півплощини контактне зусилля у дальній вершині тріщини по відношенні до її межі зростає, а при зростанні області контакту берегів тріщини воно зменшується.

Для визначення критичного значення навантаження, коли пластина почне руйнуватися,

скористаємося енергетичним критерієм руйнування [20]

$$M^* = \frac{M_x^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \frac{3 + \nu}{K_1^* \sqrt{3(1 + \nu)\{3\alpha^2(1 + \nu) + 3 + \nu\}}}, \quad (6)$$

де $K_1^* = \max K_1^{*\pm}$ і γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

На рис. 3 побудовано графічну залежність зведеного критичного моменту M^* (6) від безрозмірної віддалі \tilde{y} . Із збільшенням відносної віддалі тріщини від межі пластини \tilde{y} або зменшенням ширини області контакту γ критичний момент M^* збільшується. Крім того, він збільшується у випадку урахування контакту берегів тріщини, порівняно з випадком, коли вони не контактують.

Для крайової тріщини $M^* = 0,777$ при $\gamma = 0,6$, $0,906$ – при $\gamma = 0$ і $0,648$ – при нехтуванні контактом берегів тріщини.

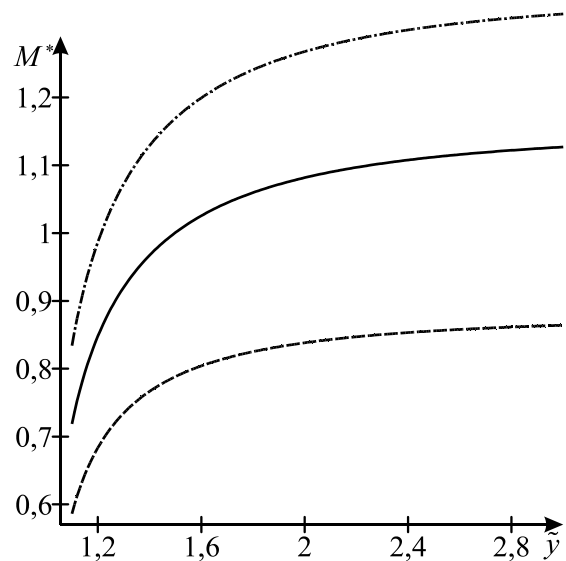


Рис. 3. Графічна залежність зведеного критичного моменту M^* від безрозмірної віддалі \tilde{y} при різних значеннях γ .

Звернемо увагу на те, що у випадку внутрішньої тріщини руйнування пластини розпочнеться з вершини, що знаходиться ближче до її межі.

Список використаних джерел

1. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / Прусов И.А. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.
4. Alwar R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Eng. Fracture Mech. – 1983. – 17, No. 4. – P. 323–333.
5. Heming, F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F.S. Jr. Heming // Int. J. Fracture. – 1980. – 16, No. 4. – P. 289–304.
6. Jones, D.P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate / D.P. Jones, J.L. Swedlow // Int. J. Fracture. – 1975. – 11, No. 6. – P. 897–914.
7. Williams, M.L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack / M.L. Williams // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – 28. – P. 78–82.
8. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
9. Опанасович В.К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Регіональний міжвузівський збірник наукових праць “Системні технології”. – 2002. – Вип. 4 (21). – С. 124–129.
10. Опанасович В.К. Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами, з урахуванням контакту їхніх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, І.М. Яцик // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. механіка. – 2007, № 2/2 – Вип. 11, том 2. – С. 141–148.
11. Опанасович В. Згин пластини Рейсснера з

References

1. BEREZHNIYSKIY, L.T., DELYAVSKIY, M.V. & PANASYUK, V.V. (1979) *Izhib tonkih plastin z defekami tipa treshchin*. Kiev: Nauk. Dumka. 400 p.
2. PRUSOV, I.A. (1975) *Metod sopragenia v teorii plit*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta. 256 p.
3. SAVRUK, M.P. (1981) *Dvumerniye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami*. Kyiv: Naukova Dumka. 324 p.
4. ALWAR, R.S., Ramachandran Nambissan, K.N. (1983) Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Eng. Fracture Mech.* Vol. 17, No. 4. pp. 323–333.
5. HEMING, F.S. Jr. (1980) Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. *Int. J. Fracture*. Vol. 16, No. 4. pp. 289–304.
6. JONES, D.P. & SWEDLOW, J.L. (1975) The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. *Int. J. Fracture*. Vol. 11, No. 6. pp. 897–914.
7. WILLIAMS, M.L. (1961) The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans ASME. J. Appl. Mech.* Vol 28. pp. 78–82.
8. OPANASOVYCH, V.K. (2007) Zhyin plastyny z naskriznoyu pramoliniynoyu trishchynoyu z urahuvannyam shyryny oblasti kontaktu yiyi poverhon. *Naukovi notatky Lutskogo tehničnogo universitetu*. Issue 20 (2). pp. 123–127.
9. OPANASOVYCH, V.K. & ZVIZLO, I.S. (2002) Zhyin kuskovo-odnorodnoyi izotropnoyi plastyny z trishchynoyu, perpendykulyarnoyu do liniyi podilu materialv z urahuvannyam kontaktu berehiv. *Rehionalnyy mizhvuzivskyy zbirnyk naukovykh prats “Systemni tehnolohiyi”*. Issue 4 (21). pp. 124–129.
10. OPANASOVYCH, V.K., ZVIZLO, I.S. & YATSYK, I.M. (2007) Dvovvisnyy zhyin kuskovo-odnorodnoyi izotropnoyi plastyny z pryamoliniynoyu mezheyu podilu materialv iz dvoma perpendykulyarnymi trishchynami, z urahuvannyam kontaktu yihnih berehiv. *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Ser. mehanika*. No. 2/2, Issue 11, Vol. 2. pp. 141–148.
11. OPANASOVYCH, V.K. & YATSYK, I.M. (2008) Zhyin plastyny Reyssnera z naskriznoyu trishchynoyu z urahuvannyam shyryny oblasti kontaktu yiyi berehiv. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Ser. meh.-mat.* Issue 69. pp. 125–135.

- наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
12. Опанасович В. Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій : наук. зб. ; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155-160.
13. Перепичка В.В. Контактное взаимодействие берегов краевых трещин в изгибаемой полуплоскости / В.В. Перепичка, И.П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – № 29. – С. 83–89.
14. Шацкий І.П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацкий, В.В. Перепичка // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – 28, № 2. – С. 54–58.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
16. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
17. Сулим Г.Т. Основы математической теории пружной равновесии деформированных твердых тел с тонкими включениями / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
18. Кальтгоф Дж.Ф. Экспериментальное подтверждение контакту берегов трещины при згині пластини / Дж.Ф. Кальтгоф, І.П. Шацкий, А. Бюргель // Мех. руйнув. матер. і міцн. конструкцій (вип. 2): Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 1. – С. 72–74.
19. Alwar R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, Ramachandran N.K.N. // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – 17, № 4. – P. 323–333.
20. Zehnder A.T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads / Zehnder A.T., Viz M.J. // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.
12. OPANASOVYCH, V.K. & YATSYK, I.M. (2009) Vyznachennya krytychnoho navantazhennya za zhyynu plastyny Reysnera z naskriznymy trishchynamy ta z urahuvanniam kontaktu yihnih berehiv. *Mehanika ruynuvannya materialiv i mitsnist konstruktsiy*. Scientific collection. Under Gen. Ed. V.V. Panasyuk. Lviv: Fyzyko-mehanichnyy instytut im. H.V. Karpenko NAN Ukrainy. pp. 155–160.
13. PEREPICHKA, V.V. & SHATSKYY, I.P. (1999) Kontaknoye vzayemodeystviye beregov krayevykh tryeshchin v izgibayemoy poluploskosti. *Teoret. i prikl. mehanika*. Vol. 29. pp. 83–89.
14. SHATSKYY, I.P. & PEREPICHKA, V.V. (1992) Zhyyn napivneskinchennoyi plastyny, oslablenoyi rozrizom z kontaktuyuchymy berehamy. *Fiz.-him. mehanika materialiv*. Vol. 28, No 2. pp. 54–58.
15. MUSHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teoriiy uprugosti*. Moskva: Nauka. 708 p.
16. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P. & DATSYSHYN, A.P. (1976) *Raspredeleniye naprazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka. 444 p.
17. SULYM, H.T. (2007) *Osnovy matematychnoyi teoriiy pruzhnoyi rivnovahy deformivnykh tverdyyh til z tonkymy vklyuchennyamy*. Lviv: Doslidno-vydavnychy tsestr NTS. 716 p.
18. KALTHOF, J.F., SHATSKYY, I.P. & BYURHEL A. (1999) Experymentalne pidtvverdzhennya kontaktu berehiv trishchyny pry zhyini plastyny. *Mehanika ruynuvannya materialiv i mitsnist konstruktsiy*. Issue 2: In 3 vol. Under Gen. Ed. V.V. Panasyuk. Lviv: Kamenyar. Vol. 1. pp. 72–74.
19. ALWAR, R.S. & RAMACHANDRAN, N.K.N. (1983) Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 17, № 4. pp. 323–333.
20. ZEHNDER, A.T. & VIZ, M.J. (2005) Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 58. pp. 37–48.

Надійшла до редколегії 21.12.2015