УДК 004.652.4+004.657

Буй Д.Б.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кахута Н.Д. [2], к.ф.-м.н., доц.,
Шишацька О.В. [3],
Mohammed Karam Jasim [4], аспірант,
Fabunmi Sunmade [5], аспірант

Відношення конфінальності, передпорядки та порядки, семантика фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ, 03680, e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
[2]Університет економіки та права «КРОК», вул. Лагерна, 30-32, м. Київ, 03113,
e-mail: nadezhdak@krok.edu.ua
[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ, 03680, e-mail: oshyshayska@gmail.com
[4]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ, 03680, e-mail: karamjasim1978@yahoo.com
[5]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ, 03680, e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

D.B.Buy[1], Dr.Sc.(Phys.-Math.),
N. D. Kachuta[2], PhD.,
O.V.Shyshatska[3],
Karam Jasim Mohammed[4], postgraduate,
Sunmade Fabunmi[5], postgraduate

Cofinality relation, pre-orders and orders, the semantics of ORDER BY clause of querics in SQL-like language

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
[2]«KROK» University, 30-32 Laherna St, Kyiv, 03113,
e-mail: nadezhdak@krok.edu.ua
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: oshyshayska@gmail.com
[4]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: karamjasim1978@yahoo.com
[5]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

У статті розглядаються такі загальні теоретико-множинні конструкції: (1) відношення конфінальсті і коініціальності на множинах елементів, індуковані вихідним відношенням на елементах; (2) відношення порядку на фактор-множині, індуковане вихідним відношенням передпорядку на множині. Крім того, розглянута семантика «упорядкування» рядків таблиць в запитах SQL-подібних мов у вигляді відношення передпорядку на рядках таблиць. Основні результати: (1) встановлені критерії для відношень конфінальності і коініціальності бути передпорядками; (2) показано, що ці відношення, індуковані частковим порядком, є порядками на дискретних множинах, потім цей результат перенесений на таблиці; (3) показана роль конфінальних і коініціальних підмножин для знаходження точних граней множини; (4) знайдений критерій для передпорядку на фактор-множині бути порядком; (5) встановлено критерій, коли передпорядок на рядках таблиць є порядком.

Конфінальність, передпорядок, SQL-подібні мови, фраза ORDER BY

The article discusses such general set-theoretic constructions: (1) the relations of cofinality and coinitiality on sets of elements induced by the initial relation on the elements; (2) order on the factor set induced by the initial preorder on the set. In addition, we consider the semantics of the "ordering" of table's rows in SQL-like languages as the pre-order on the table's rows. The main results: (1) the criteria for the cofinality and coinitiality relations to be preorders is specified; (2) these relations, induced by partial order, are partial orders on discrete sets, this result is transferred to the tables; (3) the role of cofinal and coinitial subsets for finding supremum and infimum of the set is shown; (4) the criteria for preorder on the factor set to be the order is established in terms of cardinalities of cosets of corresponding factor set; (5) the criteria for pre-order on the table's rows (this pre-order specifies the "ordering " of rows in the query) to be an order is specified in terms of the primary key of table:(this pre-order is order if and only if the set of attributers (from the clause ORDER BY) contains primary key.

Cofinality, pre-order, SQL-like languages, clause ORDER BY
Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов А.В.

Стаття присвячена властивостям: (1) відношення конфінальності – бінарного відношення на булеані множини, індукованого бінарним відношенням на множини; (2) відношення порядку на фактор-множині, індукованого відношенням передпорядку на множині; (3) відношення передпорядку на рядках таблиць, яке є семантикою фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов.

Всюди далі символ □ позначає кінець формулювання твердження або кінець доведення, а символ ■ – кінець частини доведення.

Відношення конфінальності та коініціальності: загальні властивості

Поняття конфінальності (точніше кажучи, поняття конфінальної підмножини) є класичним поняттям теорії множин (див., наприклад, [1, гл. III, § 1, п. 7, с. 146; 2, § 2, с. 22]); в теорії табличних алгебр це поняття природно використовується при явному введенні відношення порядку на таблицях, що відповідає комутативній напівгрупі таблиць за з'єднанням ([3, підрозділ 2.8, с. 56-58]). Основні властивості відношення конфінальності наведені в роботах [4, с. 49-50; 5; 6, підрозділ 2.1, с. 40-43].

Зауважимо, в класичних роботах по суті вводиться поняття конфінальної підмножини, яке природно можна розповсюдити на довільні множини (див. далі). Крім того, основний смисл введення поняття конфінальної підмножини полягав в тому, що задача знаходження супремуму множини зводиться до аналогічної задачі для конфінальної підмножини; більш того, не важно показати, що супремуми множини та її конфінальної підмножини існують або не існують одночасно, причому у випадку існування збігаються (див. далі). Перейдемо до точних означень.

Зафіксуємо бінарне відношення $\leq$ на універсумі D. Це відношення індукує бінарне відношення конфінальності $\prec$ на булеані універсуму $P(D)$:

$$X \prec Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \& x \leq y)).$$

Зауважимо, що за термінологією [7, розд. I, § 2, с. 39] відношення $X \prec Y$ означає, що множина Y конфінальна множині X. Безпосередньо перевіряється, що відношення конфінальності має найменшим елементом порожню множину $\varnothing$, тобто виконується $\emptyset \prec X$ для всіх множин X. Крім того, порожня множина є і мінімальним елементом в тому розумінні, що виконується імплікація $X \prec \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$. Остання імплікація легко перевіряється від супротивного.

Що стосується властивостей рефлексивності та транзитивності, то мають місце дві наступні леми про зв'язок вказаних властивостей вихідного відношення на універсумі $\leq$ та індукованого відношення конфінальності $\prec$.

Лема 1 (про рефлексивність відношення конфінальності). Відношення конфінальності $\prec$ рефлексивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ рефлексивне. □

Доведення. Ідея подальших доведень полягає в тому, що на одноелементних множинах (сінглітонах) відношення конфінальності по суті збігається з початковим відношенням.

Почнемо з необхідності. Нехай відношення конфінальності $\prec$ рефлексивне, покажемо від супротивного, що тоді і початкове відношення $\leq$ рефлексивне. Дійсно, нехай відношення $\leq$ не є рефлексивним, тоді існує елемент універсуму x, такий, що $x \nleq x$. Але відношення конфінальності рефлексивне, тобто виконується $\{x\} \prec \{x\}$, звідки очевидно випливає, що $x \leq x$. Прийшли до суперечності. ■

Достатність. Нехай відношення $\leq$ рефлексивне, покажемо, що відношення конфінальності $\prec$ також рефлексивне. Дійсно, розглянемо довільну множину X. Якщо ця множина порожня, то, як зазначалося вище, має місце $\emptyset \prec \emptyset$. Нехай ця множина непорожня. Тоді розглянемо довільній елемент $x \in X$. Залишається врахувати, що $x \leq x$ (тобто в якості елемента множини X, більшого за x, можна взяти той самий елемент x); таким чином, $X \prec X$. ■ □

Лема 2 (про транзитивність відношення конфінальності). Відношення конфінальності $\prec$ транзитивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ транзитивне. □

Почнемо з необхідності. Нехай відношення конфінальності $\prec$ транзитивне, покажемо від супротивного, що тоді і початкове відношення $\leq$ транзитивне. Дійсно, нехай відношення $\leq$ не є транзитивним, тоді існують елементи універсуму x, y, z, такі, що виконується $x \leq y$, $y \leq z$, але $x \nleq z$. Очевидно, що $\{x\} \prec \{y\}$ та $\{y\} \prec \{z\}$. З транзитивності відношення конфінальності випливає, що тоді $\{x\} \prec \{z\}$, звідки $x \leq z$; прийшли до суперечності. ■

Достатність. Нехай відношення $\leq$ транзитивне, покажемо, що відношення конфінальності $\prec$ також транзитивне. Дійсно, розглянемо довільні множини X, Y, Z, такі, що $X \prec Y$, $Y \prec Z$, та покажемо, що тоді $X \prec Z$.

Випадок порожньої множини X тривіальний, тому розглянемо довільний елемент $x \in X$. Оскільки $X \prec Y$, то знайдеться елемент $y \in Y$, такий, що $x \leq y$. В свою чергу, оскільки $Y \prec Z$, то для елемента $y \in Y$ знайдеться елемент z$\in Z$, такий, що $y \leq z$. З транзитивності початкового відношення випливає, що $x \leq z$. Таким чином, для довільного елемента множини X в множині Z знайшовся елемент, його більший, а це і означає виконання $X \prec Z$. ■ □

Нагадаймо, що рефлексивне і транзитивне бінарне відношення називається відношенням передпорядку (див., наприклад, [1, , гл. III, § 1, п. 2, с. 138; 7, гл. I, § 2, с. 37]).

З лем 1-2 безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 1 (критерій бути передпорядком для відношення конфінальності). Відношення конфінальності $\prec$ є передпорядком тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ є передпорядком. □

Розглянемо тепер випадок, коли початкове відношення $\leq$ є порядком (взагалі кажучи, частковим). З наслідку 1 випливає, що відношення конфінальності $\prec$ є тільки передпорядком. Дійсно, розглянемо наступний простий приклад.

Нехай $< N, \leq >$ – множина натуральних чисел з стандартним порядком; N', N'' – множини парних та непарних натуральних чисел відповідно. Очевидно, що $N' \prec N''$ та навпаки $N'' \prec N'$, але $N' \neq N''$.

Таким чином, задача полягає у пошуку умов того, щоб відношення конфінальності було порядком.

Далі будемо вважати, що початкове відношення $\leq$ є порядком. Крім того будемо розглядати відношення конфінальності не на всьому булеані, а на дискретних множинах.

Множину X назвемо дискретною, якщо частково впорядкована множина $< X, \leq >$ (за індукованим порядком) дискретна в звичайному розумінні [8, § 1, с. 8], тобто для всіх $x_1, x_2 \in X$ виконується імплікація $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Найпростіший приклад дискретної множини – сінглітон.

Твердження 1 (про відношення конфінальності на дискретних множинах). Відношення конфінальності (індуковане частковим порядком) частково впорядковує сім'ю дискретних множин. □

Доведення. Очевидно, достатньо встановити антисиметричність відношення на дискретних множинах. Нехай $X \prec Y$ та $Y \prec X$, причому множини X, Y дискретні. Треба показати, що ці множини рівні.

Нехай спочатку $X = \emptyset$, тоді, з огляду на мінімальність порожньої множини, маємо рівність $Y = \emptyset$.

Нехай тепер множина X непорожня і розглянемо довільний елемент $x \in X$. Тоді знайдуться елементи $y \in Y$ і $z \in X$, такі, що $x \leq y \leq z$; звідки, враховуючи транзитивність відношення $\leq$, отримуємо $x \leq z$. Але x, z – елементи дискретної множини X, тобто $x = z$. Таким чином, $x \leq y \leq x$, звідки $x = y$ з огляду на антисиметричність порядку $\leq$. Отже, $x \in Y$, тобто включення $X \subseteq Y$ доведене. Обернене включення $Y \subseteq X$ встановлюється повністю аналогічно (просто множини X, Y міняються ролями). □

Незважаючи на начебто штучність твердження 1, зауважимо, що два природних часткових порядку на таблицях (які є дискретними множинами відносно порядку включення рядків в розумінні теоретико-множинного включення графіків рядків) будуються саме за наведеною логічною схемою [9; 3, підрозділ 2.6, с. 47-48, підрозділ 2.8, с. 56-58]. Це питання ще буде далі розглянуто більш детально.

Наведене доведення можна знайти в [3, підрозділ 1.3, с. 25], крім явного розгляду випадку порожніх множин.

Вказані властивості відношення конфінальності переносяться на випадок відношення коініціальності $\sqsubset$ на булеані універсуму $P(D)$, яке також індукується початковим відношенням:

$$X \sqsubset Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \& y \leq x)).$$

Відповідні аналоги наведемо без доведення, які проводяться повністю аналогічно випадку конфінальності. Зауважимо, що порожня множина є найменшим та мінімальним елементом в розумінні $\emptyset \sqsubset X$ та імплікації $X \sqsubset \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$.

Лема 1' (про рефлексивність відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubset$

рефлексивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ рефлексивне. □

Лема 2' (про транзитивність відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubset$ транзитивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ транзитивне. □

Наслідок 1' (критерій передпорядку для відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubset$ є передпорядком тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ є передпорядком. □

Твердження 1' (про відношення коініціальності на дискретних множинах). Відношення коініціальності (індуковане частковим порядком) частково впорядковує сім'ю дискретних множин. □

Застосуємо отримані результати (твердження 1 та 1 ') для побудови природних впорядкувань таблиць. Всі неозначувані тут поняття та позначення для таблиць використовуються в розумінні монографії [3].

В якості універсального домену розглянемо множину всіх рядків S , впорядкованих за включенням їхніх графіків порядком $\subseteq$. На булеані $P(S)$ розглянемо за вищенаведеною схемою відношення конфінальності та коініціальності:

$$X \prec Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall s(s \in X \Rightarrow \exists s'(s' \in Y \& s \leq s')),$$
$$X \sqsubset Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall s(s \in X \Rightarrow \exists s'(s' \in Y \& s' \leq s)).$$

Оскільки теоретико-множинне відношення включення $\subseteq$ є порядком, то введені відношення конфінальності та коініціальності згідно з наслідками 1 та 1' є передпоряками.

Лема (про дискретність таблиць). Довільна множина односхемних рядків, впорядкована відношенням теоретико-множинного включення $\subseteq$ є дискретною. Зокрема, кожна таблиця, впорядкована аналогічним чином, є дискретною.□

Доведення. Нехай X довільна множина рядків, причому всі рядки мають однакову схему (нагадаймо, в даному випадку схема це область визначення рядка як функції). Розглянемо два довільні рядки цієї множини s, s', такі, що, наприклад, $s \subseteq s'$. Неважко зрозуміти, що так як $doms = doms'$, то $s = s'$. Більш формально доведення можна провести з використанням загальної властивості обмеження $f \subseteq g \; \& \; domf = domg \Rightarrow f = g$ (див., наприклад, [6, підрозділ 1.4, твердження 1.11, п. 10]). ■

Зрозуміло, що встановлена властивість прямо переноситься на таблиці, оскільки, згідно з означенням, таблиця є скінченною множиною односхемних рядків. ■ □

З цієї леми та тверджень 1 та 1' безпосередньо випливає наступний наслідок.

Теорема 1 (про відношення конфінальності та коініціальноіті на таблицях, індуковані теоретико-множинним включенням рядків**).** Відношення конфінальності $\prec$ та коініціальності $\sqsubset$ частково впорядковують множину таблиць. □

Зауважимо, що відношення конфінальності $\prec$ природньо зв'язане з операцією проекції табличних алгебр [3, підрозділ 2.6, с. 47-48], а відношення коініціальності – з операцією з'єднання цих же алгебр [3, підрозділ 2.8, с. 56-58].

Відношення конфінальності та коініціальності: знаходження точних граней

Всюди далі на універсумі розглядається частковий порядок $\leq$.

Наведемо загальні властивості відношення конфінальності, позначаючи верхній (нижній) конус множини X як X^{Δ} (відповідно X^{∇}), а супремум (інфімум) цієї ж множини як $\coprod X$ (відповідно $\prod X$).

Твердження 2 (про верхні конуси конфінальних множин**).** Для довільних множин виконується імплікація $X \prec Y \Rightarrow Y^{\Delta} \subseteq X^{\Delta}$. □

Доведення очевидне, бо кожна верхня грань множини Y є і верхньою гранню множини X. □

Наслідок 2 (про супремуми конфінальних множин). Для довільних множин за умови існування їхніх супремумів виконується імплікація $X \prec Y \Rightarrow \coprod X \leq \coprod Y$. □

Доведення випливає з попереднього твердження та означення супремумів, як найменших елементів відповідних верхніх конусів. □

В літературі поняття конфінальності найчастіше використовується для конфінальних підмножин в наступному розумінні: множину Y назвемо конфінальною підмножиною множини X , якщо, по-перше, $Y \subseteq X$ та, по-друге, $X \prec Y$.

Основна властивість конфінальних підмножин сформульована в наступному твердженні.

Твердження 3 (властивості конфінальних підмножин). Якщо Y конфінальна підмножина множини X , то верхні конуси цих множин співпадають – $X^{\Delta} = Y^{\Delta}$; тобто виконується узагальнена рівність $\coprod X \simeq \coprod Y$. □

Вище через $\simeq$ позначена узагальнена рівність (по іншій термінології сильна рівність Кліні): вираз $\varphi \simeq \phi$ означає, що або обидві частини (одночасно) невизначені, або визначені та мають рівні значення (див., наприклад, [10, вступ, с. 11].)

Доведення. Нехай $X \prec Y$ та $Y \subseteq X$, тоді за твердженням 2 $Y^{\Delta} \subseteq X^{\Delta}$. Крім того, за загальними властивостями конусів виконується включення $Y^{\Delta} \supseteq X^{\Delta}$ (див., наприклад, [8, § 1, теорема 5, п. (i), с. 11]). Значить, верхні конуси множин X, Y співпадають; і тому вони одночасно мають або не мають найменші елементи – супремуми відповідних множин. Звідси і випливає узагальнена рівність з формулювання твердження. □

Отже, питання про супремум множини еквівалентне тому самому питанню для її конфінальної підмножини.

Зауважимо, що незважаючи на простоту, природність та потужність властивості конфінальнальних підмножин (твердження 3), в явному вигляді ця властивість відсутня в літературі (див., наприклад, [8, § 1; 7, розд. 1, § 2;1, розд. III, § 1, п. 7 та § 6, п. 5 з зведення результатів]).

На останок додамо, що згідно з принципом двоїстості (див., наприклад, [8, § 1, с. 10]) при переході до оберненого (інверсного) порядку всі твердження для конфінальності переходять в твердження для коініціальності з заміною верхніх конусів на нижні, супремумів на інфімуми. Наведемо відповідні означення та аналоги вищенаведених тверджень.

Твердження 2' (про нижні конуси коініціальних множин). Для довільних множин виконується імплікація $X \sqsubset Y \Rightarrow Y^{\nabla} \subseteq X^{\nabla}$. □

Наслідок 2' (про інфімуми коініціальних множин). Для довільних множин за умови існування їхніх інфімумів виконується імплікація $X \sqsubset Y \Rightarrow \sqcap X \leq \sqcap Y$. □

Множину Y назвемо коініціальною підмножиною множини X, якщо, по-перше, $Y \subseteq X$ та, по друге, $X \sqsubset Y$.

Твердження 3' (властивості коініціальних підмножин). Якщо Y – коініціальна підмножина множини X, то нижні конуси цих множин співпадають – $X^{\nabla} = Y^{\nabla}$; тобто виконується узагальнена рівність $\sqcap X = \sqcap Y$. □

Передпорядки та порядки

Всюди далі будемо вважати, що вихідне відношення $\leq$ є передпорядком. В літературі добре відома конструкція побудови по передпорядку порядку на відповідній фактор-множині (див. наприклад, [7, гл. I, § 2, с. 37; 8, § 1, с. 7, теорема 3]). Наведемо цю конструкцію розгорнуто. На універсумі введемо наступне відношення $x \sim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \leq y \;\&\; y \leq x$.

Лема 3 (про еквівалентність, індуковану передпорядком**).** Відношення $\sim$ є еквівалентністю. □

Доведення. Рефлексивність відношення $\sim$ випливає з рефлексивності відношення $\leq$. ■

Транзитивність відношення $\sim$ випливає з транзитивності відношення $\leq$. Дійсно, нехай $x \sim y$ та $y \sim z$, покажемо, що тоді $x \sim z$. Очевидно, $x \leq y$ та $y \leq z$, тобто $x \leq z$. Аналогічно встановлюється, що $z \leq x$; отже, $x \sim z$. ■

Симетричність відношення $\sim$ випливає з його означення. ■ □

Лема 4 (про устрій суміжних класів еквівалентності, індукованої передпорядком). Якщо x, y довільні елементи одного суміжного класу еквівалентності $\sim$, то виконується $x \leq y$ та $y \leq x$. □

Доведення. Нехай x, y належать одному суміжному класу еквівалентності з представником $z : x, y \in [z]$. Тоді $x \sim z$ та $y \sim z$. Отже $x \leq z$ та $z \leq y$, звідки $x \leq y$. зворотна нерівність $y \leq x$ встановлюється повністю аналогічно. □

На фактор-множині $D/\sim$ (множині всіх суміжних класів по еквівалентності $\sim$) розглянемо наступне бінарне відношення $\eta \ll \theta \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists x \exists y (x \in \eta \& y \in \theta \& x \leq y)$, де η, θ суміжні класи.

Зауважимо, що в літературі відношення $\ll$ вводиться через представників суміжних класів наступним чином $[x] \ll [y] \overset{def}{\Leftrightarrow} x \leq y$. Вада цього шляху в тому, що треба показувати коректність цього означення (незалежність від представників), Це робиться з використанням леми 4.

Твердження 4 (про порядок на фактор-множині, індукований передпорядком). Відношення $\ll$ на фактор множині є $D/\sim$ є порядком. □

Доведення. Рефлексивність відношення $\ll$ випливає з рефлексивності передпорядку $\leq$. ■

Встановимо транзитивність відношення $\ll$. Нехай $\eta \ll \theta$ та $\theta \ll \vartheta$, покажемо, що тоді $\eta \ll \vartheta$. Дійсно з означення відношення $\ll$

випливає існування таких елементів $x \in \eta, y_1 \in \theta,\ \ y_2 \in \theta,\ \ z \in \vartheta$, що має місце $x \leq y_1$, $y_2 \leq z$. Але елементи y_1, y_2 належать одному суміжному класу, значить згідно з лемою 4 виконується нерівність $y_1 \leq y_2$. З транзитивності вихідного передпорядку випливає $x \leq z$ і залишається скористатися означенням відношення $\ll$. ■

Нарешті встановимо антисиметричність відношення $\ll$. Нехай для суміжних класів η, θ виконуються нерівності $\eta \ll \theta$ та $\theta \ll \eta$.

Покажемо, що ці суміжні класи співпадають. Дійсно, від супротивного: нехай вони різні. З означення відношення $\ll$ випливає існування таких елементів $x_1 \in \eta, y_1 \in \theta$, $y_2 \in \theta$, $x_2 \in \eta$ що має місце $x_1 \leq y_1$, $y_2 \leq x_2$. Але елементи x_1, x_2 належать одному суміжному класу і так само для елементів y_1, y_2. За лемою 4 маємо нерівності $y_1 \leq y_2$ та $x_2 \leq x_1$ (див рис. 1, на якому направлена стрілка йде від меншого елемента до більшого). Отже маємо ланцюжок нерівностей $y_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq x_1$, звідки з огляду на транзитивність вихідного передпорядку випливає нерівність $y_1 \leq x_1$. З врахуванням нерівності $x_1 \leq y_1$ маємо, що $x_1 \sim y_1$. Таким чином, ці елементи повинні належати одному суміжному класу; прийшли до суперечності. ■ □

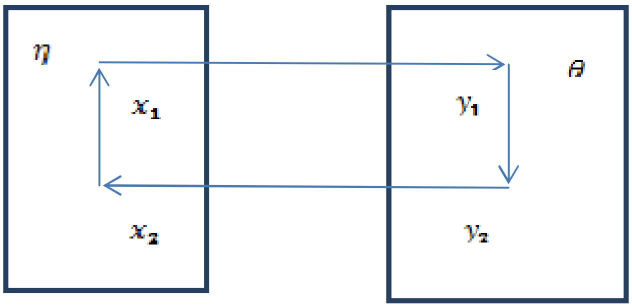

Рисунок 1. До доведення твердження 4 (антисиметричність відношення $\ll$)

В термінах розглянутої фактор-множини наведемо простий, але корисний критерій того, що передпорядок є порядком.

Твердження 5 (критерій передпорядку бути порядком). Передпорядок $\leq$ є порядком тоді і тільки тоді, коли всі суміжні класи фактор-множини $D/\sim$ є сінглітонами. □

Доведення. Почнемо з необхідності. Нехай передпорядок є порядком (тобто він є антисиметричним), покажемо від супротивного, що вказана фактор-множина містить тільки сінглітони. Отже, нехай існує суміжний клас, що містить два різних елемента x, y. Тоді за лемою 4 $x \leq y$ та навпаки $y \leq x$. Але це суперечить антисиметричності відношення $\leq$. ■

Достатність встановимо від супротивного. Нехай фактор-множина містить тільки сінглітони, але передпорядок не є порядком. Оскільки відношення $\leq$ є рефлексивним та транзитивним, то тоді порушується властивість антисиметричності, тобто існують різні елементи x, y, такі, що $x \leq y$ та навпаки $y \leq x$. Звідси за означенням еквівалентності $x \sim y$, тобто ці елементи належать одному суміжному класу. Значить, знайшовся суміжний клас (наприклад, з представником x), який не є сінглітоном. ■ □

Семантика фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов

Семантика фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов була розглянута в монографії [3, підрозділ 3.5, с. 159-165], де було показано, що бінарне відношення, яке уточнює вказану фразу, є в загальному випадку передпорядком, а не порядком на рядках таблиці.

Далі буде наведений критерій того, що відповідне бінарне відношення є не тільки передпорядком, а і порядком (при цьому будемо спиратися на критерій, сформульований у твердженні 5.)

Нагадаймо основні означення з [3] щодо впорядкування рядків таблиць. Нехай t таблиця схеми R, таблиця розглядається як множина рядків s тієї ж схеми R; в свою чергу рядок схеми R є функцією вигляду $s: R \rightarrow D$, де D універсальна множина, яка вважається лінійно впорядкованою з порядком $\leq$. Нехай $< A_1, \dots, A_n >$ – кортеж атрибутів зі схеми R (тобто $A_1, \dots, A_n \in R$). На рядках таблиці вводиться наступне параметризоване за кортежем атрибутів $< A_1, \dots, A_n >$ бінарне відношення

$$s \preccurlyeq s' \overset{def}{\Longleftrightarrow} s(A_1) < s'(A_1) \vee \big(s(A_1) = s'(A_1) \& s(A_2) < s'(A_2)\big) \vee \dots \vee \Big(\big(s(A_1) = s'(A_1) \wedge \dots \wedge s(A_{n-1}) = s'(A_{n-1})\big) \& s(A_n) < s'(A_n)\Big) \vee \big(s(A_1) = s'(A_1) \& \dots \& s(A_{n-1}) = s'(A_{n-1}) \& s(A_n) \leq s'(A_n)\big).$$

В наведеному означенні $s(A)$ – значення атрибуту A в рядку s, а $<$ – строга нерівність, тобто $d < d' \overset{def}{\Longleftrightarrow} d \leq d' \& d \neq d'$.

Змістовна схема введеного відношення така: спочатку порівнюються значення (в рядках, що порівнюються) першого атрибуту (A_1); якщо ці значення рівні, то переходимо до порівняння значень другого атрибуту (A_2), якщо значення і першого і другого атрибутів рівні, то переходимо до порівняння значень третього атрибуту і т.д.

Мова по суті йде про лексикографічний добуток згідно з порядком атрибутів кортежу-параметра (див., наприклад, [8, § 2, с. 28]).

Лема 5. Відношення $\preccurlyeq$ на рядках таблиці є передпорядком. □

Доведення. Рефлексивність відношення $\preccurlyeq$ випливає з його означення та рефлексивності відношення $\leq$ на універсальному домені ■.

Транзитивність відношення □ випливає з його означення та транзитивності відношення $\leq$ на універсальному домені. ■□

Отже відношення на рядках таблиці є передпорядком, можна навести прості приклади, коли воно не буде антисиметричним (див. [3, підрозділ 3.5, с. 159-165]). Тому виникає природнє питання про пошук критерію, коли цей передпорядок переходить в порядок.

Нам знадобиться наступна лема про устрій суміжних класів рядків для еквівалентності, індукованою передпорядком $\preccurlyeq$. Нижче (параметричне) відношення еквівалентності на рядках, індуковане предпорядком, $\sim$ вводиться так само як і для загального випадку: $s \sim s' \overset{def}{\Leftrightarrow} s \preccurlyeq s' \& s' \preccurlyeq s$.

Лема 6 (про устрій суміжних класів еквівалентності $\sim$ на рядках таблиці). Для довільних рядків s, s' виконується еквівалентність $s \sim s' \Leftrightarrow s(A_1) = s'(A_1) \& \ldots \& s(A_n) = s'(A_n)$.

Іншими словами два рядка належать одному суміжному класу тоді і тільки тоді, коли в цих рядках співпадають значення всіх атрибутів з кортежа-параметра. □

Доведення. Достатність тривіальна, а необхідність доводиться безпосередньо. □

Нижче поняття ключа (точніше кажучи, первинного ключа, primary key) таблиці використовується в стандартному розумінні: множина атрибутів X називається ключем таблиці t, якщо виконується наступне твердження

$$\forall s \forall s' (s, s' \in t \& s|X = s'|X \Rightarrow s = s').$$

В цьому означенні $s|X$ – обмеження рядка s (як функції) за множиною атрибутів X.

Змістовно кажучи, множина атрибутів X називається ключем таблиці t, якщо зі співпадіння значень всіх ключових атрибутів в довільних двох рядках таблиці випливає співпадіння самих рядків (в еквівалентній формі: якщо два довільних різних рядка таблиці розрізняються значенням хоча б одного з ключових атрибутів).

Теорема 2 (критерій передпорядку на рядках $\preccurlyeq$ бути порядком). Параметричне відношення передпорядку на рядках буде порядком тоді і тільки тоді, коли множина атрибутів $\{A_1, \ldots, A_n\}$ містить ключ. □

Доведення. Достатність. Нехай множина атрибутів $\{A_1, \ldots, A_n\}$ містить ключ (в якості підмножини). Тоді, очевидно, що і сама множина атрибутів $\{A_1, \ldots, A_n\}$ буде ключем. З леми 6 та означення ключа випливає, що довільний суміжний клас еквівалентності $\sim$ буде одноелементним. Залишається застосувати критерій з твердження 5. ■

Необхідність. Нехай відношення передпорядку $\preccurlyeq$ є порядком, тоді, з огляду на критерій твердження 5 кожний суміжний клас фактор множини $t/\sim$ є сінглітоном. Але з цього випливає, що множина атрибутів $\{A_1, \ldots, A_n\}$ є ключем. ■ □

Основні результати та висновки

В роботі розглянуті такі загальні теоретико-множинні конструкції: (1) відношення конфінальності та коініціальності на множинах елементів, індуковані вихідним відношенням на елементах; (2) відношення порядку на фактор-множині, індуковане відношенням передпорядку на множині. Окрім того розглянута семантика «впорядкування» рядків запитів SQL-подібних мов у вигляді відповідного передпорядку на рядках таблиць (фраза ORDER BY).

Для введених конструкцій встановлені такі основні властивості.

Встановлений критерій того, що відношення конфінальності та коініціальності є передпорядками (наслідки 1, 1').

Показано, що відношення конфінальності та коініціальності, індуковані частковим порядком, є порядками на дискретних множинах (твердження 1, 1').

Показано роль конфінальних (коініціальних) підмножин для знаходження точних верхніх (відповідно нижніх) граней множин (твердження 3, 3').

Знайдений критерій того, щоб передпорядок був порядком в термінах потужностей суміжних класів відповідної фактор-множини (твердження 5).

Знайдений критерій в (термінах первинного ключа таблиці) для того, щоб передпорядок (що уточнює «впорядкування» рядків таблиці) був порядком (теорема 2).

Список використаних джерел

1. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
2. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Издательство Московского университета, 1988. – 112 с.
3. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 196 с.
4. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Буй Дмитро Борисович. – Київ, 2002. – 365 с.
5. Буй Д.Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.
6. Кахута Н.Д. Застосування теоретико-множинних конструкцій повного образу, обмеження, конфінальності та сумісності в табличних базах даних: дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Кахута Надія Дмитрівна. – Київ, 2010. – 116 с.
7. Общая алгебра. Т. 1 / О.В Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романов и др. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
8. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.
9. Редько В.Н. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
10. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Н. Катленд. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

References

1. Burbaki, N. (1956, 1957, 1958, 1960), ***Theorie des ensembles***, Paris, Hermann.
2. Arkhanhel'skyy, A.V. (1988), ***Kantorovskaya teoryya mnozhestv*** [Cantor set theory], Yzdatel'stvo Moskovskoho unyversyteta, Moscow, Russia.
3. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y., Buy, D.B. and Polyakov, S.A. (2001), ***Relyatsiyni bazy danykh: tablychni alhebry ta SQL-podibni movy*** [Relational databases: table algebra and SQL-like languages], Vydavnychyy dim "Akademperiodyka", Kiev, Ukraine.
4. Buy, D.B. (2002), Theory of composite type program algebras and its application, Ds. Thesis, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine.
5. Buy, D.B. and Kakhuta, N.D. (2006), "Properties of confinality relation and structure of the set of partial functions", ***Visnyk Kyyivs'koho universytetu. Ser. fiz.-mat. Nauky***, vol. 2, pp. 125-135.
6. Kakhuta, N.D. (2010), Applications of set-theoretic constructions of whole image, restriction, confinality and consistency in table databases, Ph.D. Thesis, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine.
7. Mel'nykov, O.V, Remeslennykov, V.N., Romanov, V.A. and other (1990), ***Obshchaya alhebra*** [Algebra], in Skornyakov, L.A. (red.), T. 1, Nauka, Moscow, Russia.
8. Skornyakov, L.A. (1982), ***Elementyi teorii struktur*** [Elements of the theory of structures], Nauka, Moscow, Russia.
9. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y. and Buy, D.B. (1997), "Relational Algebra: projection and join operations", ***Kybernetyka y systemnyi analyz***, no. 4, pp. 89-100.
10. Cutland, N. (1980), ***Computability. An introduction to recursive function theory***, Cambridge University Press, London, UK.

Надійшла до редколегії 09.01.15