УДК 517.5

В.Г.Собко, старший викладач

Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів

Кафедра інформатики та прикладної математики РДГУ, 33000, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
e-mail: vg_sobko@ukr.net

V.H.Sobko, Senior Lecturer,

Building and research of the algorithm of the problems of mathematical physics solution with the help of biorthogonal polynomials

Department of Computer Science and Applied Mathematics of RSUH, 33000, Rivne, Ostafova Str., 31, e-mail: vg_sobko@ukr.net

В праці на базі розв'язку модельної задачі типу теплопровідності побудовано та досліджено спосіб розв'язування сформульованої задачі методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Вивчено вплив параметрів методу, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки обчислювальної системи та похибки обчислення на точність отриманого розв'язку. Результати наближених обчислень порівнювались з відповідними значеннями точного розв'язку та подані у вигляді таблиць.

***Ключові слова**: спектральні методи, біортогональні поліноми, задачі математичної фізики.*

The algorithms of construction of quasiorthohonal and biorthohonal polynomials are developed on the base of Chebyshev's orthogonal polynomials of the first kind. The obtained results were tested in the process of calculating experiment on the examples of modeling tasks.

The properties of spectral expansions in the bases of orthogonal, and quasiorthogonal and biorthogonal polynomials were investigated for efficient use of constructed orthogonal spectra and proportion among them were found. The recurrent formulas for representation of one investigated basis through other one and formulas of transition from one spectral expansion to another.

The method of solution of the formulated problem by means of division of variables in the basis of biorthohonal polynomials is constructed and studied on the basis of the model problem of heat conductivity solution. The influence of the method of parameters including the order of partial sums, decade frame of the calculating system and errors in calculation for accuracy of obtained solution are learned. The results of approximate calculations were compared with corresponding values of exact solution and presented in tables.

***Keywords:** spectral methods, biorthohonal polynomials, problems of mathematical physics.*

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Спектральні методи застосовуються як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу прикладних задач. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре досліджені, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до рішень задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з тим для більш ширшого задоволення критеріїв або модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним з шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. В літературі є незначна кількість робіт стосовно застосування біортогональних розкладів до розв'язування прикладних задач. Однією із причин є та, що побудова біортогональних базисів пов'язана із значними обчислювальними труднощами.

Метою роботи є апробація та дослідження побудованих в роботах [6], [7] на базі поліномів Чебишева першого роду повної системи біортогональних поліномів для знаходження рішення модельної задачі типу теплопровідності.

Формулювання задачі. Необхідно знайти функцію $f(x,t)$ для довільного часу $t,\ t>0$, на проміжку $x\in[-1,1]$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

за наступних крайових умов:

$$f(x,0)=0, \qquad (2)$$

$$f(-1,t)=\sqrt{\pi}\Big/\left(a\sqrt{t}\right), \qquad (3)$$

$$f(1,t)=0. \qquad (4)$$

Розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x,t)=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}q_{2i-\bar{i}}(t)\left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)+\gamma_{2i-\bar{i}}T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right), \qquad (5)$$

де $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$ - біортогональні многочлени порядку $n+\bar{i}$, $T'_{n+1+\bar{i}}(x)$ - перша похідна многочлена Чебишева першого роду степеня $n+1+\bar{i}$ [5], для яких справджуються рівності

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)T'_{n+1+\bar{i}}(x)dx=0, \qquad (6)$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)T'_{n+1+\bar{i}}(x)dx=0, \qquad (7)$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)dx=N_{2i-\bar{i}}, \qquad (8)$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)\left(T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right)^2dx=\left(n+1+\bar{i}\right)^3\pi, \qquad (9)$$

$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n=2s$, $\bar{i}=0$ - для парних функцій та $\bar{i}=1$ - для непарних функцій. Для того, щоб розв'язок (5) задовольняв умову (2), потрібно знайти такі функції $q_i(t)$, $i=1,..,n$ щоб $q_i(0)=0$. Оскільки $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(-1)=$ $=V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(1)=0$, $T'_{n+1+\bar{i}}(-1)=(-1)^{\bar{i}}\,T'_{n+1+\bar{i}}(1)=$ $=(-1)^{\bar{i}}\left(n+1+\bar{i}\right)^2$ [5], то з умов (3) та (4) дістанемо відповідно

$$\tilde{F}_{n+1}(-1,t)=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\bar{i}}\left(n+1+\bar{i}\right)^2\gamma_{2i-\bar{i}}q_{2i-\bar{i}}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}},$$

$$\tilde{F}_{n+1}(1,t)=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}\left(n+1+\bar{i}\right)^2\gamma_{2i-\bar{i}}q_{2i-\bar{i}}(t)=0,$$

або

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1,t)-\tilde{F}_{n+1}(-1,t)}{2(n+2)^2}=\sum_{i=1}^{s}\gamma_{2i-1}q_{2i-1}(t)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2(n+2)^2a\sqrt{t}}, \qquad (10)$$

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1,t)+\tilde{F}_{n+1}(-1,t)}{2(n+1)^2}=\sum_{i=1}^{s}\gamma_{2i}q_{2i}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)^2a\sqrt{t}}. \qquad (11)$$

Тоді

$$\frac{\partial^2\tilde{F}_{n+1}(x,t)}{\partial x^2}=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}q_{2i-\bar{i}}(t)\Bigg(-\frac{V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}+\frac{\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}T'_{n+1+\bar{i}}(x)+$$

$$+\gamma_{2i-\bar{i}}\left[\frac{\left(n+1+\bar{i}\right)^2\pi}{2^{2\bar{i}+1}}\sum_{j=1}^{s}\frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2j-1+\bar{i}}}{\lambda_{2j-1+\bar{i}}^{n}}\frac{V_{2j-\bar{i}}^{n+\bar{i}}}{N_{2j-\bar{i}}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{15}\left(n-1+\bar{i}\right)\left(n+\bar{i}\right)\left(n+2+\bar{i}\right)\left(n+3+\bar{i}\right)T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right]\right), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\tilde{F}_{n+1}(x,t)}{\partial t}=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}\frac{dq_{2i-\bar{i}}(t)}{dt}\times$$

$$\times\left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)+\gamma_{2i-\bar{i}}T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right). \qquad (13)$$

Підставимо формули (12) та (13) в рівняння (1). Отримане таким чином співвідношення домножимо на $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$ та зінтегруємо з вагою $\rho(x)$ в межах від -1 до 1 [2]. Враховуючи умови (10), (11) та рівності (7), (8), дістанемо

$$-q_{2i-1}(t)\frac{N_{2i-1}}{\lambda_{2i}^{n}}-\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{16at^{\frac{1}{2}}}\frac{\bar{c}_2^{2i}}{\lambda_{2i}^{n}}-\frac{N_{2i-1}}{a^2}\frac{dq_{2i-1}(t)}{dt}=0$$

$$i=1,..,s, \qquad (14)$$

$$-q_{2i}(t)\frac{N_{2i}}{\lambda_{2i-1}^{n}}+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4at^{\frac{1}{2}}}\frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^{n}}-\frac{N_{2i}}{a^2}\frac{dq_{2i}(t)}{dt}=0,$$

$$i=1,..,s. \qquad (15)$$

Отже, ми отримали n диференціальних рівнянь, розв'язками яких є інтеграли Досона [1]

$$q_{2i-1}(t) = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\bar{c}_2^{\,2i}}{8\sqrt{\lambda_{2i}^n}\,N_{2i-1}}\exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i}^n}t\right)\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i}^n}}\sqrt{t}} e^{q^2}dq\,,$$

$$q_{2i}(t) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\bar{c}_1^{\,2i-1}}{2\sqrt{\lambda_{2i-1}^n}\,N_{2i}}\exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1}^n}t\right)\ell\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1}^n}}\sqrt{t}} e^{q^2}dq\,,$$

$i=1,..,s$.

Підставимо формули (12) та (13) в рівняння (1). Отримане таким чином співвідношення домножимо на $T'_{n+1+\bar{i}}(x)$ та зінтегруємо з вагою $\rho(x)$ в межах від -1 до 1 [2]. Враховуючи умови (10), (11), рівності (6), (9) та вирази (14), (15), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{s} q_{2i-1}(t)\left(\frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n}+\frac{\gamma_{2i-1}}{\lambda_{2i}^n}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\left(\frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15(n+2)^2}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{s}\gamma_{2i-1}\frac{\pi\bar{c}_2^{\,2i}}{8\lambda_{2i}^n N_{2i-1}}\right)=0, \qquad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{s} q_{2i}(t)\left(\frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n}+\frac{\gamma_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\left(\frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15(n+1)^2}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{s}\gamma_{2i}\frac{\pi\bar{c}_1^{\,2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n N_{2i}}\right)=0. \qquad (17)$$

З рівнянь (16) та (17) знаходимо невідомі коефіцієнти $\gamma_{2i-1}=-\tau_{2i}^n$, $\gamma_{2i}=-\tau_{2i-1}^n$, $i=1,..,s$. Отже, розв'язок задачі (1)-(4) записується у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x,t)=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\bar{i}}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\bar{c}_{1+\bar{i}}^{\,2i-1+\bar{i}}}{2^{2\bar{i}+1}\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n}\,N_{2i-\bar{i}}}\exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n}t\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n}}\sqrt{t}} e^{q^2}dq\left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)+(-1)^{\bar{i}}\tau_{2i-1+\bar{i}}^n T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right). \qquad (18)$$

Слід зазначити, що параметри $\bar{c}_{1+\bar{i}}^{\,2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n$, $N_{2i-\bar{i}}$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^n$ із розв'язку (18) можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$. Для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку [3], [4]. Для інтегралу Досона в літературі побудовані таблиці, якими ми можемо скористатися під час обчислення отриманого розв'язку.

Обчислювальний експеримент. Результати обчислень для різних значень параметрів при $n=8$, $a=0,5$ з точністю обчислень 10^{-8} подано у вигляді таблиць та рисунків. При цьому для $a=0,5$ і різних часів t вираз $\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{t}\right)$ приймає наступні точні значення:

$\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{0,5}\right)=5{,}0132566$;

$\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{1}\right)=3{,}5449078$; $\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{10}\right)=1{,}1209983$;

$\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{50}\right)=0{,}50132568$; $\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{100}\right)=0{,}35449078$;

$\sqrt{\pi}/\left(a\sqrt{500}\right)=0{,}15853310$.

Таблиця 1.
Значення шуканого розв'язку для різних значень часів та координати.

x_i	$t=0,5$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$
-1	5,0119420	3,5468288	1,1211398	,50149199	,35477064	,15928751
-,9	4,9144021	3,5092275	1,0830804	,47754666	,33723766	,15072589
-,8	4,6285700	3,4057835	1,0428577	,45354789	,31983641	,14268065
-,7	4,1868309	3,2400544	1,0004051	,42940746	,30243921	,13481420
-,6	3,6391157	3,0209707	,95570088	,40509050	,28498734	,12696397
-,5	3,0402885	2,7607144	,90876102	,38059519	,26746463	,11907438
-,4	2,4412196	2,4729552	,85962547	,35593443	,24987556	,11114569
-,3	1,8831349	2,1714683	,80835482	,33112572	,23223202	,10319951
-,2	1,3947101	1,8690781	,75502516	,30618499	,21454532	,095257504
-,1	,99142618	1,5768986	,69972601	,28112384	,19682194	,087330585
0	,67669312	1,3038416	,64255998	,25594976	,17906362	,079416826
,1	,44425132	1,0563606	,58364281	,23066810	,16126896	,071504905
,2	,28135562	,83839813	,52310384	,20528483	,14343648	,063580996
,3	,17225023	,65150504	,46108657	,17980904	,12556772	,055636338
,4	,10144246	,49510018	,39774847	,15425459	,10766902	,047673168
,5	,05628390	,36683914	,33325995	,12863945	,089751459	,039706400
,6	,02836146	,26305917	,26780120	,10298214	,071827106	,031758533
,7	,01321320	,17927103	,20155770	,077294281	,053901096	,023845386
,8	,00787294	,11066534	,13471296	,051568348	,035958215	,015950117
,9	,00574532	,05259748	,06743745	,025758993	,017942518	,007982812
1	-,0116674	,00102866	-,00012446	-,00024159	-,000270306	-,000276427

Всі результати здійснювались для $n \le 30$ при 32 вузлах у квадратурах Гауса. Так, як для $x=-0,5$ нам не відомі точні значення, то потрібно знайти значення якомога точніше, а це означає, що потрібно буде збільшувати кількість членів ряду і ,очевидно, кількість вузлів квадратур Гауса та точність обчислень. Знайдені таким чином значення у цих точках, надалі позначатимемо через $F(t)$, $\tilde{F}(t)$ - наближене значення, $\varepsilon = F(t) - \tilde{F}(t)$ - абсолютна похибка, n - кількість членів ряду. Розрахунки проведено з точністю 10^{-32}.

Таблиця 2.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$F(1) = 2,7607599369771738174 9275$

n	$\tilde{F}(1)$	$\varepsilon = F(1) - \tilde{F}(1)$
2	**2,6**	,964 e-1
4	**2,70**	,523e-1
6	**2,75**	,444e-2
8	**2,76071**	,458e-4
10	**2,76076**	-,422e-5
12	**2,76075998**	-,453e-7
14	**2,760759939**	-,233e-8
16	**2,760759937**	-,421e-9
18	**2,76075993699**	-,136e-10
20	**2,7607599369771 8**	-,642e-14
22	**2,76075993697716**	,786e-14
24	**2,7607599369771736**	,161e-15
26	**2,7607599369771738171**	,382e-18
28	**2,7607599369771738175**	-,267e-19
30	**2,760759936977173817493**	-,318e-21

Таблиця 3.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$F(10) = 0,9087551653485876796473857289$

n	$\tilde{F}(10)$	$\varepsilon = F(10) - \tilde{F}(10)$
2	**,904**	,405e-2
4	**,909**	-,351e-3
6	**,908758**	-,350e-5
8	**,9087551659**	-,605e-9
10	**,9087551652**	,604e-10
12	**,90875516534854**	,419e-13
14	**,908755165348587 64**	,365e-16
16	**,90875516534858767 5**	,412e-17
18	**,9087551653485876796 3**	,138e-19
20	**,9087551653485876796 47386**	-,864e-24
22	**,90875516534858767964738 58**	-,719e-25
24	**,90875516534858767964738575**	-,291e-25
26	**,9087551653485876796473854**	,242e-24
28	**,908755165348587679647384**	,168e-23
30	**,908755165348587679647386**	-,105e-23

Таблиця 4.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$F(100) = 0,267453299074307459588471510 09$

n	$\tilde{F}(100)$	$\varepsilon = F(100) - \tilde{F}(100)$
2	**,2673**	,763e-4
4	**,2674538**	-,582e-6
6	**,2674532996**	-,528e-9
8	**,26745329907432**	-,166e-13
10	**,267453299074307 2**	,161e-15
12	**,2674532990743074595 1**	,711e-19
14	**,26745329907430745958847 0**	,753e-24
16	**,2674532990743074595884715 18**	-,798e-26
18	**,26745329907430745958847151 01**	-,281e-28
20	**,2674532990743074595884715100 3**	,597e-28
22	**,26745329907430745958847150**	,190e-26
24	**,26745329907430745958847151 9**	-,917e-26
26	**,2674532990743074595884714**	,766e-25
28	**,26745329907430745958847 0**	,531e-24
30	**,2674532990743074595884718**	-,331e-24

Таблиця 5

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$F(500) = 0,1190391295943502100336843992 99$

n	$\tilde{F}(500)$	$\varepsilon = F(500) - \tilde{F}(500)$
2	**,119032**	,665e-5
4	**,11903913**	-,100e-7
6	**,119039129596**	-,179e-11
8	**,1190391295943502 2**	-,115e-16
10	**,1190391295943502100 1**	,211e-19
12	**,1190391295943502100336 82**	,183e-23
14	**,11903912959435021003368439 93**	-,569e-28
16	**,119039129594350210033684399 26**	,295e-28
18	**,11903912959435021003368439 93**	-,343e-29
20	**,119039129594350210033684399 27**	,194e-28
22	**,1190391295943502100336843 98**	,711e-27
24	**,11903912959435021003368 44**	-,406e-26
26	**,1190391295943502100336843 6**	,343e-25
28	**,11903912959435021003368 41**	,237e-24
30	**,11903912959435021003368 45**	-,148e-24

Висновки. Отримані результати підтверджують ефективність застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики. На обчислення наближеного розв'язку нашої задачі суттєвий вплив має не лише кількість доданків n суми відповідного ряду, але й точність обчислення. В ході обчислювального експерименту, із таблиці 3 чітко видно, що при $n \geq 26$ абсолютна похибка зростає. Зростання похибки спостерігається і в таблиці 4 та 5 при $n \geq 20$.В таких випадках слід збільшити точність обчислень, оскільки, з точністю обчислення 10^{-32} спостерігається накопичення похибок.

Список використаних джерел

1. *Абрамович°М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / М.°Абрамович, И.°Стиган. – Москва: Наука. 1979. – 832°с.
2. *Глетчер°К.* Численные методы на основе метода Галеркина. / К.°Глетчер. – Москва: Мир. 1988. – 352°с.
3. *Дзядык°В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. / В.К.°Дзядык. – Киев: Наук. думка. 1998. – 370°с.
4. *Дзядык°В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. / В.К.°Дзядык. – Москва: Наука. 1977. – 512°с.
5. *Пашковский°С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова./ С.°Пашковский. – Москва: Наука. 1983. – 384°с.
6. *П'янило°Я.Д.* Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева [Електронний ресурс] / Я.Д.°П'янило, В.Г.°Собко // Прикл. Проблеми мех. і мат. – 2013. Вип. 11. – С. 135-141. – Режим доступу до журн.: http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/viewFile/548/581.
7. *П'янило°Я.Д.* Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів [Електронний ресурс] / Я.Д.°П'янило, В.Г.°Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. Вип. 19. – С. 146-156. – Режим доступу до журн.: http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article /Fmmit_2014_19_17.pdf.

References

1. ABRAMOVYCH,°M. (1979) *Spravochnyk po spetsyal'nym funktsyyam s formulamy, hrafykamy y matematycheskymy tablytsamy*. [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables], Nauka, 1979, Moskva,
2. HLETCHER,°K. (1988) *Chyslennye metody na osnove metoda Halerkyna*. [Numerical methods based on the Galerkin method], Myr, 1988, Moskva
3. DZYADYK,°V.K. (1998) *Approksymatsyonnye metody reshenyya dyfferentsyal'nykh y yntehral'nykh uravnenyy* [Approximate methods for the solution of differential and integral equations], Nauk dumka, 1998, Kyev, Ukraine.
4. DZYADYK,°V.K. (1977) *Vvedenye v teoryyu ravnomernoho pryblyzhenyya funktsyy polynomamy.* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials], Nauka, 1977, Moskva
5. PASHKOVSKYY,°S. (1983) *Vychyslytel'nye prymenenyya mnohochlenov y ryadov Chebyshova*. [Numerical applications of polynomials and Chebyshev series], Nauka, 1983, Moskva.
6. P'YANYLO,°Ya.D. (2013) *Pobudova ta doslidzhennya biortohonal'nykh polinomiv na bazi mnohochleniv Chebysheva* [Design and research biortohonalnyh polynomials Chebyshev polynomials based], [Elektronnyy resurs] / Prykl. Problems fur. and Math. –. Vyp. 11. – pp. 135-141. – Available from: http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/viewFile/548/581.
7. P'YANYLO,°Ya.D. (2014) *Doslidzhennya vlastyvostey spektral'nykh rozkladiv u bazysakh ortohonal'nykh, kvaziortohonal'nykh i biortohonal'nykh polinomiv* [Research spectral properties in the bases of orthogonal expansions, polynomials kvazyortohonalnыe and biortohonalnyh], Physical and mathematical modeling and information technologies, Vyp. 19. – pp. 146-156, Available from http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article /Fmmit_2014_19_17.pdf

Надійшла до редколегії 01.12.2015