УДК 517.929.4

Хусаінов Д.Я., д. ф.-м. н., проф.

Камратов С.В., інж.

Динаміка розв'язків квадратичних систем на площині

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail:

Khusainov D.Ya., D.-r. of Sciense, prof.,

Kamratov S.,V., senior researcher

Dynamics of decisions of quadratic systems on the plane

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail:

Нелінійні динамічні системи, описувані звичайними диференціальними рівняннями з квадратичною правою частиною, знайшли широке застосування в математичних моделях популяції, економіки, біології. Вони досить адекватно відображають динаміку протікаючих процесів, враховують обмеженість області проживання популяції, зворотні ефекти в економічних процесах та ін.[1-2]. У даній роботі в припущенні асимптотичної стійкості ненульового положення рівноваги проводиться оцінка збіжності рішень. Отримані результати продемонстровані на одній математичній моделі динаміки популяції. Основні результати отримані з використанням другого методу Ляпунова.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, системи з квадратичною правою частиною.

The nonlinear run-time systems described by ordinary differential equalizations with quadratic right part found wide application in the mathematical models of population, economy, biology. They display the dynamics of aleak processes adequately enough, take into account limit nature of area of residence of population, reverse effects in economic processes and other[1-2].

As known, solving systems of linear stationary differential equations can be done using a matrix exponential, and the rate decision using the extreme eigenvalues of symmetric positive definite matrices, included in the Lyapunov matrix equation. For non-linear dependency of the general form similar systems do not exist. In this work two nonlinear differential equations with quadratic nonlinearity of the general form considered. Systems recorded in the universal vector-matrix form [3,4]. It is assumed that the linear part of the system is asymptotically stable. Calculation of "guaranteed stability of the region" and assessment estimates the convergence of solutions in this area is carried out using a quadratic Lyapunov function. Calculate the total derivative of a quadratic Lyapunov function. The inequality for the derivative of the form, "like" on the scalar Riccati equation. The solution of the inequality and, consequently, to assess the rate of inequality for differential equations with quadratic right-hand side of the general form of the plane. In the second part, we consider a system of differential equations "quasi-linear type." Systems of this kind are the "extension" linear time-invariant systems. In ecological models suggest they study in a limited area of populations residing. The estimates of the convergence of solutions "quasi-linear" systems with initial data from a small neighborhood of the zero equilibrium position.

Basic results are got with the use of the second method of Lyapunova.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equalizations, systems with quadratic right part.

Статтю представив д.т.н, проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Оцінки збіжності рішень квадратичних систем на площині.

Для скалярного диференціального рівняння з квадратичною правою частиною (рівняння Бернулли)

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx^2(t), \ a > 0, \ b > 0$$

розв'язок задачі Коши $x(0) = x_0$ має вигляд

$$x(t) = \frac{ax_0e^{-at}}{a - bx_0\left[1 - e^{-at}\right]}.$$

Областю стійкості є напівінтервал $-\infty < x < a/b$. Для систем диференціальних рівнянь (навіть на площині) аналогічний результат відсутній.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь на площині з квадратичною правою частиною, записану в векторно-матричному вигляді [3,4]

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}^1x_1^2(t) + \\ + 2b_{12}^1x_1(t)x_2(t) + b_{22}^1x_2^2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{22}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{11}^2x_1^2(t) + \\ + 2b_{12}^2x_1(t)x_2(t) + b_{22}^2x_2^2(t). \quad (1.1)$$

Перепишемо її у векторно-матричній формі у вигляді

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)Bx(t), \qquad (1.2)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}, \ X^T(t) = \left\{X_1^T(t), X_2^T(t)\right\},$$

$$X_1^T(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X_2^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Дослідження стійкості нульового стану рівноваги будемо проводити з використанням квадратичної функції Ляпунова $V(x) = x^T Hx$. Якщо матриця А асимптотично стійка, то при будь-якій додатно визначеній матриці C

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

матричне рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C \qquad (1.4)$$

має єдиний розв'язок - додатно визначену матрицю H

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

Повна похідна функції Ляпунова в силу системи (1.2) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =$$

$$= -x^T(t)\left[\left(A + X^T(t)B\right)^T H + H\left(A + X^T(t)B\right)\right]x(t).$$

Або

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^T(t)\left[C - \left(B^T X(t)H + HX^T(t)B\right)\right]x(t) =$$

$$= -(x_1(t), x_2(t))\left\{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 0 \\ 0 & x_1(t) \\ 0 & x_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} -$$

$$\left. - \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 \\ b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}\right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

І для повної похідної функції Ляпунова буде мати місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\left\{\lambda_{\min}(C) - 2|H|\|B\||x(t)|\right\}|x(t)|^2, \ (1.5)$$

де

$$|H| = \lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2}\left\{(h_{11} + h_{22}) + \sqrt{(h_{11} - h_{22}) + 4h_{12}^2}\right\},$$

$$|x(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)},$$

$$\lambda_{\min}(C) = \frac{1}{2}\left\{(c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} - c_{22}) + 4c_{12}^2}\right\},$$

$$|B| = \left\{\lambda_{\max}\left(B^T B\right)\right\}^{1/2} = \left\{\lambda_{\max}\left(B_1^T B_1 + B_2^T B_2\right)\right\}^{1/2}.$$

Областю стійкості нульового стану рівноваги є внутрішня частина поверхні рівня функції Ляпунова $V(x) = r > 0$, яка знаходиться всередині області

$$G_0 = \left\{x \in R^n : C - B^T XH - HX^T B > \Theta\right\},$$

де під символом

$$C - B^T XH - HX^T B > \Theta \qquad (1.6)$$

розуміється додатна визначеність матриці. Замінимо умову (1.6) більш «грубою». Оскільки, в силу обраних матричних і векторних норм буде виконуватися

$$|X(t)| = |x(t)|,$$

то область «гарантованої» стійкості має вигляд

$$G_{r_0} = \max_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_0\},$$

$$G_r = \{x \in R^n : x^T Hx < r^2\}. \qquad (1.7)$$

Як випливає з цієї залежності, для визначення «максимальної» області стійкості слід помістити еліпсоїд $x^T Hx = r^2$ всередину сфери радіуса $R = \lambda_{\min}(C)/2|H||B|$ і «розтягувати» $r \to \infty$ до тих пір, поки еліпс не торкнеться сфери.

Розглянемо оцінку збіжності розв'язків системи (1.2), початкові умови яких знаходяться всередині області стійкості.

Теорема 1.1. Нехай матриця *A* системи (1.2) асимптотично стійка. Тоді для розв'язків системи (1.1), що задовольняють початковим умовам

$$|x(0)| < \frac{\gamma(H)}{2|B|\varphi(H)}, \; \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)},$$

$$\gamma(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \qquad (1.8)$$

має місце наступна оцінка збіжності

$$|x(t)| \le$$

$$\le \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|}{[\gamma(H) - 2|B|\varphi(H)|x(0)|]e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2|B|\varphi(H)|x(0)|}.$$

$$\lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2}\left\{(h_{11} + h_{22}) - \sqrt{(h_{11} - h_{22}) + 4h_{12}^2}\right\}. \qquad (1.9)$$

Доведення. Вище показано, що для повної похідної квадратичної функції Ляпунова в силу системи (1.2) має місце нерівність (1.5). Оскільки функція Ляпунова квадратична, то для неї має місце двостороння нерівність квадратичних форм

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}(H)|x|^2. \qquad (1.10)$$

І нерівність (1.5) можна переписати у вигляді

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le$$

$$\le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(x(t)) + 2\lambda_{\max}(H)|B|\frac{V^{3/2}(x(t))}{\lambda_{\min}^{3/2}(H)}.$$

Використовуючи позначення (1.8) перепишемо (1.10) у вигляді

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma(H)V(x(t)) + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}V^{3/2}(x(t)).$$

Вираз (1.10) є нерівністю «типу рівняння Бернуллі». Розділимо її на $V^{3/2}(x(t))$. Отримаємо

$$V^{-3/2}\frac{dV(x(t))}{dt} + \gamma(H)V^{-1/2}(x(t)) \le 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Позначивши $V^{-1/2}(x(t)) = z(t)$, запишемо

$$-2\frac{dz(t)}{dt} + \gamma(H)z(t) \le 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Звідси

$$\frac{dz(t)}{dt} - \frac{1}{2}\gamma(H)z(t) \ge -\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Розв'язуючи отриману нерівність (за аналогією з лінійним неоднорідним рівнянням), одержимо

$$z(t) \ge \left[z(0) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right]e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Підставивши $V^{-1/2}(x(t)) = z(t)$, одержимо

$$V^{-1/2}(x(t)) \ge \left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right] \times e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Звідси

$$V^{1/2}(x(t)) \le \left\{\left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right]e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right\}^{-1}.$$

Знову використавши двосторонні нерівності квадратичних форм, отримуємо

$$V^{1/2}(x(t)) \le \left\{\left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right]e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right\}^{-1} \le$$

$$\le \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|} - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} \le$$

$$= \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|}{\left[\gamma(H) - 2|B|\varphi(H)|x(0)|\right]e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2|B|\varphi(H)|x(0)|}.$$

Таким чином, для розв'язків $x(t)$ системи (1.2) з початковими умовами $x_0 \in G_0$, буде справедлива оцінка збіжності (1.8).

2. Системи «квазілінійного виду».

Однією з перших математичних моделей, описуваних диференціальним рівнянням з квадратичною правою частиною була модель Ферхюльста. Вона мала вигляд

$$\dot{x}(t) = [a + bx(t)]x(t).$$

Її модернізацією була модель Лотки-Вольтерра типу «хижак-жертва». Вона являла собою систему двох рівнянь з квадратичною правою частиною

$$\dot{x}(t) = [a + by(t)]x(t), \; \dot{y}(t) = -[c + dx(t)]y(t).$$

Розглянемо систему з квадратичною правою частиною загального вигляду (квазілінійну систему)

$$\dot{x}_1(t) = \left[a_{11} + b_{11}^1 x_1(t) + 2b_{12}^1 x_2(t)\right]x(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = \left[a_{22} + 2b_{12}^2 x_1(t) + b_{22}^2 x_2\right]x_2(t).$$

Її можна записати у вигляді (1.2), де відповідні матриці мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричне рівняння Ляпунова (1.4) має вигляд

$$2a_{11}h_{11} = -c_{11}, \; (a_{11} + a_{22})h_{12} = -c_{12},$$
$$2a_{22}h_{22} = -c_{22}.$$

Поклавши $c_{11} = c_{22} = c > 0$, $c_{12} = 0$, отримаємо

$$h_{11} = -c_{11}/2a_{11}, \; h_{12} = 0, \; h_{22} = -c_{22}/2a_{22}.$$

Умовою стійкості системи лінійного наближення є $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$. Як випливає із залежностей (1.5),

$$\lambda_{\max}(H) = \max\left\{-\frac{c_{11}}{2a_{11}}, -\frac{c_{22}}{2a_{22}}\right\},$$

$$\lambda_{\min}(H) = \max\left\{-\frac{c_{11}}{2a_{11}}, -\frac{c_{22}}{2a_{22}}\right\}, \; \lambda_{\min}(C) = c,$$

$$|B| = \left\{\lambda_{\max}\left(B^T B\right)\right\}^{1/2} = \left\{\lambda_{\max}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix}\right\}^{1/2},$$

$$B_{11} = \left(b_{11}^1\right)^2 + \left(b_{12}^1\right)^2 + \left(b_{11}^2\right)^2 + \left(b_{12}^2\right)^2,$$
$$B_{12} = b_{11}^1 b_{12}^1 + b_{11}^2 b_{12}^2, \; B_{22} = \left(b_{12}^1\right)^2 + \left(b_{12}^2\right)^2.$$
$$\gamma(H) = \frac{c}{\lambda_{\max}(H)}.$$

Список використаних джерел

1. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. – 335 с.
2. Смит Дж. Модели в экологии. – М., 1976.
3. Хусаінов Д.Я. Оцінка області стійкості квадратичних диференціальних систем. // Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 1991. - С.3-6.
4. Хусаінов Д.Я. Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною. // Хусаінов Д.Я., Джалладова І.А., Шатирко О.А. Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2011. – С. 227-230.

References

1. Zang V.-B. Synergetic economy. Time and changes in the nonlinear economic theory. M.: World, 1999. – 335 pages.
2. Smith Dzh. Models in ecology. – M, 1976.
3. Khusainov D.Ya., Davidov W.F. Estimation of area of firmness of the quadratic differential systems // Announcer the Kyiv university. Series: Physical and mathematical sciences, in.2, 1991. - C.3-6.
4. Khusainov D.Ya., Dzhalladova I.A., Shaturko O.A. Estimation of area of firmness of the differential system with quadratic right part // Announcer of the Kyiv university. Series: Physical and mathematical sciences, in.3, 2011. - C. 227-230.

Надійшло до редколегії 12.12.2015 р.