УДК 519.9

Лаврова О. Є.[1], аспірант.

Оптимальне керування системами диференціальних рівнянь на часових шкалах.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: lavrova_olia@mail.ru

O. E. Lavrova[1],graduate student.

Optimal control for systems of differential equations on time scales.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: lavrova_olia@mail.ru

В роботі розглянуто задачі оптимального керування на часових шкалах. Отримано достатні умови існування оптимального керування в термін ах правих частин системи та функції, що входить в критерій якості.

Ключові слова: Часова шкала, оптимальне керування, Δ - вимірність, момент виходу.

This paper is devoted to research the problems of optimal control for systems of differential equations defined on time scales. To solve such problems we must be sure that optimal control exists. For this purpose necessary to have an analogue of existence theorem for optimal control on time scales.

Initially we describe the basic concepts associated with the time scales theory. We consider the problem of Mayer and Bolz on the time scales to the moment when the solution exits from the domain. In this case quality criterion has another parameter which depends on control. This parameter is the time of exit, which greatly considered optimal control problem on time scales.

Sufficient conditions for the existence of optimal control for these optimal control problems are obtained. These conditions are presented in terms of right sides of the system and function which are included in the quality criterions. It turns out that in the proof of the existence of optimal control the important role plays condition of convexity a certain kind.

Key Words: Time scale, optimal control, Δ - measurability, moment of exit.

Статтю представив академік НАН України, д. ф. – н., проф. Перестюк М. О.

Вступ. Вивчення диференціальних рівнянь на часових шкалах викликає великий інтерес серед дослідників. Це пов’язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в роботі [1] ввів поняття Δ-похідної, яке дозволило об’єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз. Основи такого аналізу викладено в монографіях [2], [4]. В подальшому диференціальні рівняння на часових шкалах в різних напрямках вивчалися в роботах багатьох авторів.

Теорія оптимального керування на часових шкалах ще досить мало вивчена. В цьому напрямку відзначимо роботу [6], в якій отримано сильну версію принципу максимума Понтрягіна. Цей результат дає необхідні умови оптимальності, але для їх перевірки потрібно використовувати спеціальний об’єкт - функцію Понтрягіна. Бажано було б мати достатні умови оптимальності у термінах вихідних даних. Вивченню цих питань і присвячена дана робота.

Сама робота складається зі вступу і трьох частин. В першій частині приведено основні поняття та твердження, які стосуються часових шкал. У другій і третій частинах для задач оптимального керування з критеріями Майєра і Больца отримано теорему існування оптимального керування на часових шкалах.

1. Основні поняття та необхідні твердження, пов’язані з часовими шкалами.

Часовою шкалою T називається довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. Найбільш відомими прикладами часових шкал є $T = R$, $T = Z$, $T = hZ$ для $h > 0$. Далі довільний інтервал з часової шкали T будемо позначати як I_T, де I – інтервал з R, тобто $I_T = I \bigcap T$.

Введемо наступні поняття, пов'язані з класифікацією точок часової шкали.

Для $t \in T$ визначимо оператори стрибка вперед і назад $\sigma, \rho : T \to T$ наступним чином $\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s \in T : s < t\}$ та функцію зернистості $\mu : T \to [0, +\infty)$ як $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in T$ називається ліво-граничною (ліво-розсіяною, право-граничною, право-розсіяною), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$, $\sigma(t) > t$). Якщо T має ліво-розсіяний максимум M, тоді визначимо $T^k = T \setminus \{M\}$, в іншому випадку $T^k = T$.

Означення 1. [2] Функція $f : T \to R$ називається rd – неперервною, якщо вона неперервна в право-граничних точках $t \in T$ і границя зліва цієї функції існує в ліво-граничних точках $t \in T$.

Для функції $f : T \to R$ визначимо функцію $f^\sigma : T \to R$ як $f^\sigma = f(\sigma)$. Визначимо поняття Δ - похідної.

Означення 2. [2] Δ - похідною функції f в точці $t \in T^k$ називається таке число $f^\Delta(t)$ (якщо воно існує), що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки t такий, що для всіх $s \in U \bigcap T$ виконується нерівність:

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| \le \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Означення 3. [5] Для функції $f : [a,b]_T \to R$ визначимо розширення $\tilde{f} : [a,b]_R \to R$ наступним чином $\tilde{f}(t) = f(\sup[a,t]_T)$ для всіх $t \in [a,b]_R$.

Для рівнянь на часових шкалах справедливим є аналог першої теореми Хеллі.

Теорема 1. З довільної послідовності монотонно неспадних і рівномірно обмежених на $[a,b]_T$ функцій можна виділити підпослідовність, збіжну у всіх точках з $[a,b]_T$.

Доведення теореми очевидним чином отримується із класичної теореми Хеллі переходом від послідовності функцій $\{f_n(t)\}$, заданої на $[a,b]_T$ до їх розширення $\{\tilde{f}_n(t)\}$, заданих на $[a,b]_R$.

Далі для введення поняття абсолютно неперервних функцій на часових шкалах, розглянемо допоміжні твердження з [6].

Нехай μ_Δ – Δ - міра Лебега на T, визначена в термінах продовження Каратеодорі в [2].

Нехай $A \subset T$. Кажуть, що деяка властивість виконується Δ – майже скрізь на A, якщо вона виконується для будь-якого $t \in A \setminus A'$, де $A' \subset A$ – деяка μ_Δ - вимірна підмножина T, для якої $\mu_\Delta(A') = 0$. Функціональним простором $L_T^1\left(A, R^n\right)$ називається множина всіх функцій f, визначених Δ - майже скрізь і таких, що $\int_A \|f(\tau)\|_{R^n} \Delta\tau < +\infty$.

Позначимо через $AC\left([a,b]_T, R^n\right)$ множину всіх абсолютно неперервних на $[a,b]_T$ функцій. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. [6] Нехай $t_0 \in [a,b]_T$ і $f : [a,b]_T \to R^n$. Функція $f \in AC\left([a,b]_T, R^n\right)$ тоді і тільки тоді коли f є Δ - диференційованою Δ - майже скрізь на $[a,b)_T$, $f^\Delta \in L_T^1\left([a,b)_T, R^n\right)$ і для кожного $t \in [a,b]_T$ має місце рівність:

$$f(t) = \begin{cases} f(t_0) + \int\limits_{[t_0,t)_T} f^\Delta(\tau)\Delta\tau, t \ge t_0 \\ f(t_0) - \int\limits_{[t_0,t)_T} f^\Delta(\tau)\Delta\tau, t \le t_0. \end{cases}$$

Введемо поняття Δ - вимірності функції та приведемо аналог теореми Лузіна на часових шкалах.

Означення 4. [8] Функція $f : T \to R$ називається Δ - вимірною, якщо для кожного $\alpha \in R$ множина $f^{-1}\left([-\infty, \alpha)\right) = \{t \in T : f(t) < \alpha\}$ є Δ - вимірною.

Теорема 3. [8] Нехай $f : T \to R$. Функція f є Δ - вимірною тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує така rd - неперервна функція $\varphi : [a,b]_T \to R$, що Δ - міра Лебега множини $\{x : f(x) \ne \varphi(x)\}$ менше ε.

Далі наведемо аналог теореми Лебега про Δ - диференційованість монотонної функції.

Теорема 4. [9] Якщо $f : [a,b]_T \to R$ - монотонно неспадна функція, тоді існує множина $N \subset [a,b]_T$ така, що Δ - міра цієї множини дорівнює нулю і $f^\Delta(x)$ існує для кожного $x \in [a,b)_T \setminus N$.

2. Постановка задачі. Теорема існування оптимального керування.

На часовій шкалі T, $\sup T = +\infty$, розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = f\left(t, x(t), u(t)\right) \\ e = \left(t_1, x(0), x(t_1)\right) \in S \end{cases} \quad (1)$$

з критерієм якості типу Майєра:

$$J(x(0), u) = \Phi_1(e) \to \inf \quad (2)$$

на відрізку $[0, T_0]_T$, $0 \in T$, $T_0 \in T$, $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в R^d, $x(0) \in K \subset D$, K – компакт, t_1 – момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D, $u(t) \in U \subset R^m$ – вектор керувань, U – замкнена множина, вектор-функція $\Phi : [0, T_0]_T \times D \times U \to R^d$ неперервна на S, де множина S визначається рівняннями $\Phi_j(e) = 0$ при $j = \overline{2, k}$, $\Phi = \left\{\Phi_j\right\}_{j=1}^{k}$.

Функція $f : [0, T_0]_T \times D \times U \to R^d$ – rd-неперервна за змінною t і неперервна за $x \in D$ і для неї виконуються наступні умови:

а1) умова лінійного росту:

існує така стала $C_1 > 0$, що для будь-яких $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$, $u \in U$:

$$\left|f(t, x, u)\right| \le C(1 + |x| + |u|). \quad (3)$$

а2) існує така стала $C_2 > 0$, що для будь-яких $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$, $u \in U$:

$$\left|f(t, x', u) - f(t, x, u)\right| \le C_2 \left|x' - x\right| \left(1 + |u|\right). \quad (4)$$

Керування $u(t)$ вважається допустимим, якщо:

в1) $u(t) \in L_p([0, T_0]_T), p \ge 1$,

в2) $u(t) \in U$ при $t \in [0, T_0]_T$.

Розв'язком системи (1) будемо називати функцію $x = x(\cdot)$, що задовольняє рівняння:

$$x(t) = x(0) + \int\limits_{[0,t)_T} f(s, x(s), u(s)) \Delta s, t \in [0, T_0]_T. \quad (5)$$

Позначимо через F' клас усіх пар $(x(0), u)$, для яких u задовольняє умови в1)-в2) і розв'язок рівняння (5) задовольняє граничним умовам $e \in S$. Довільну пару $(x(0), u) \in F'$ будемо називати допустимою.

Розглянемо наступну множину:

$$F(t, x) = \left\{f(t, x, u) : u \in U\right\}, t \in [0, T_0]_T, x \in D. \quad (6)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови а1)–а2) і крім того:

а) F' – непорожня множина,

б) U – компактна множина,

в) Множина $F(t, x)$ є опуклою для $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$.

Тоді існує пара $(x^*(0), u^*) \in F'$, яка мінімізує критерій якості (2).

Доведення теореми складається з чотирьох лем. Позначимо через χ_e множину всіх розв'язків системи (5), які відповідають $(x(0), u) \in F'$ і визначені на $[0, \sigma(t_1))_T$, де

$$t_1 = \sup_{t \in [0, T_0]_T} \left\{\forall s \in [0, t]_T : x(s) \in D\right\}.$$

Розв'язки системи (5), які відповідають $(x(0), u)$ продовжимо на весь інтервал $[0, T_0]_T$ наступним чином:

$$y(t) = \begin{cases} x(t), t \in [0, \sigma(t_1))_T \\ x(\sigma(t_1)), t \in [\sigma(t_1), T_0]_T. \end{cases} \quad (7)$$

Множину всіх таких розв'язків позначимо через χ'_e і покажемо, що вона є множиною рівномірно обмежених і рівностепенно неперервних функцій. Має місце наступна лема.

Лема 1. Існують додатні сталі M_1 і M_2 такі, що для всіх $y \in \chi'_e$ виконуються наступні умови:

а) $|y(t)| \le M_1, t \in [0, T_0]_T$ (8)

б) $|y(t) - y(s)| \le M_2(t - s), s \le t, t \in [0, T_0]_T$ (9)

Доведення. Оскільки K – компактна множина, $x(0) \in K$, тоді $y(0) \in K$ і $|y(0)| \le M_0$ для всіх $y \in \chi'_e$. В силу компактності множини U для всіх керувань u маємо: $|u(t)| \le B$. Покажемо рівномірну обмеженість розв'язку y при $t \in [0, T_0]_T$.

Нехай $m(t) = |y(t) - y(0)|$. З рівняння (5), умови лінійного росту і нерівності $|y(s)| \le m(s) + |y(0)|$ для довільного $t \in [0, T_0]_T$ маємо:

$$0 \le m(t) \le C_1 \int\limits_{[0,t)_T} m(s) \Delta s + C_1 \int\limits_{[0,t)_T} (1 + |y(0)| + |u(s)|) \Delta s \cdot$$

Використовуючи аналог леми Гроноулла [2, стр. 256] отримаємо наступну нерівність:

$$|y(t) - y(0)| \le C \int_{[0,t)_T} (1 + |y(0)| + |u(s)|) \Delta s,$$

де $C = e_{C_1}(T_0, 0) C_1$ при $t \in [0, T_0]_T$. Тоді для довільного $t \in [0, T_0]_T$ маємо:

$$|y(t)-y(0)|\le CT_0(1+M_0+B).$$

Тоді $|y(t)|\le M_0+CT_0(1+M_0+B)\le M_1$. Отже, рівномірну обмеженість $y(t)$ на $[0,T_0]_T$ ми показали. Доведемо рівностепеневу неперервність функції $y(t)$ при $t\in[0,T_0]_T$. Розглянемо наступні випадки.

1) Для будь-яких $s_1,s_2\in[0,\sigma(t_1))_T$ таких, що $s_1<s_2$, використовуючи умову лінійного росту (3) маємо

$$|y(s_1)-y(s_2)|=|x(s_1)-x(s_2)|=$$
$$\le\left|\int\limits_{[s_1,s_2)_T} f(t,x(t),u(t))\Delta t\right|\le$$
$$\le C_1(1+M_1+B)(s_2-s_1)\to 0 \text{ при } |s_2-s_1|\to 0.$$

2) Якщо $s_1<\sigma(t_1)<s_2<T_0$, тоді аналогічно попередньому випадку маємо:

$$|y(s_1)-y(\sigma(t_1))|=|x(s_1)-x(\sigma(t_1))|\le$$
$$\le C_1(1+M_1+B)(\sigma(t_1)-s_1)\to 0 \text{ при } |s_2-s_1|\to 0.$$

3) Якщо ж $\sigma(t_1)<s_1<s_2<T_0$, тоді

$$|y(s_1)-y((s_2))|=|x(\sigma(t_1))-x(\sigma(t_1))|=0,$$

що і означає рівностепеневу неперервність функції $y(t)$ на $[0,T_0]_T$. Лему 1 доведено.

Означення 5. [3] Нехай $\mu=\inf J(x(0),u)$. Послідовність $(x^r(0),u^r)\in F'$ при $r=1,2,\ldots$ називається мінімізуючою, якщо

$$\mu=\lim_{r\to\infty}J(x^r(0),u^r).$$

Нехай $(x^r(0),u^r)$ та $(y^r(0),u^r)$, $r=1,2,\ldots$ – послідовності з F', а x^r,y^r – розв'язки системи (5), що відповідають парам $(x^r(0),u^r)$ та $(y^r(0),u^r)$ і визначені на $[0,\sigma(t_1))_T$ та $[0,T_0]_T$.

Відповідні граничні умови вигляд:

$$e_x^r=(t_1^r,x^r(0),x^r(t_1^r)),\; e_y^r=(t_1^r,y^r(0),y^r(t_1^r)).$$

Має місце наступна лема.

Лема 2. Існує така мінімізуюча послідовність $(y^r(0),u^r)$, $r=1,2,\ldots$, що y^r рівномірно збігається до y^* на $[0,T_0]_T$ при $r\to\infty$. Крім того y^* задовольняє умови (8) і (9) і e_y^r збігається до

$$e_y^*=(t_1^*,y^*(0),y^*(t_1^*)).$$

Доведення. Нехай $(\overline{y}^j(0),\overline{u}^j)$, $j=1,2,\ldots$ – деяка мінімізуюча послідовність, а $\overline{y}_j$ – відповідний розв'язок системи (5). Оскільки $x(0)\in K$, а K – компакт, тоді $|x(0)|\le M_0$, $|x(t_1)|\le|x(t_0)|\cdot e^{T_0}$. Отже, $\overline{e}_x^j,\overline{e}_y^j$ – обмежені.

Використовуючи аналог теореми Арцела-Асколі [7, теорема 4.2] тепер можна виділити підпослідовність $j_1,j_2,\ldots$ таку, що $y^r=\overline{y}^{j_r}$ збігається рівномірно на $[0,T_0]_T$ до y^*, а $e_y^r=\overline{e}_y^{j_r}$ збігається до e_y^* при $r\to\infty$. Позначимо $u^r=\overline{u}^{j_r}$. Оскільки y^r задовольняє умови (8)-(9) при кожному $r=1,2,\ldots$, то y^* також задовольняє цим умовам. Оскільки e_y^r збігається до e_y^*, а y^r рівномірно збігається до y^*, тоді

$$\lim_{r\to\infty}t_1^r=t_1^*,\; \lim_{r\to\infty}y^r(t_1^r)=y^*(t_1^*).$$

Отже, лема 2 доведена.

Далі покладемо $x^*(t)=y^*(t)$ при $t\in[0,\sigma(t_1^*)]_T$.

Нам залишилось показати, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (5) при $t\in[0,\sigma(t_1^*)]_T$, що відповідає оптимальному керуванню $u^*(t)$. Функція x^* задовольняє умову Ліпшиця (4), отже, x^*– абсолютно неперервна функція, а отже, Δ - похідна $(x^*)^\Delta$ існує майже скрізь.

Має місце наступна лема.

Лема 3. Якщо $(x^*)^\Delta(t)$ існує, то $(x^*)^\Delta(t)\in F(t,x^*(t))$.

Доведення. Позначимо $F(t,x^*(t))=F$ і розглянемо α - окіл множини F

$$O_\alpha=\left\{z\in R^n: dist(z,F)<\alpha\right\}.$$

Оскільки F – опукла множина, то O_α також опукла множина. Існує додатна послідовність η_a збіжна до нуля при $a\to 0$, для якої $F(s,x')\subseteq O_a$ при $|s-t|+|x'-x^*(t)|<\eta_a$.

Нехай $z^r(s)=f(s,x^r(s),u^r(s))$. Тоді $z^r(s)\in F(s,x^r(s))$, а отже, $z^r(s)\in O_a$ при $|t-s|<\delta_a$. Розглянемо наступні випадки.

1) Нехай $t\in T$ – право-розсіяна точка, тоді

$$(x^r)^\Delta(t)=\frac{x^r(\sigma(t))-x^r(t)}{\mu(t)}=z^r(s)\in O_a.$$

Перейшовши до границі при $r\to\infty$, маємо

$$(x^*)^{\Delta}(t) = \frac{x^*(\sigma(t)) - x^*(t)}{\mu(t)} = z^*(s) \in O_a .$$

Але $a > 0$ ми вибирали довільним чином. Отже, $(x^*)^{\Delta}(t) \in F.$

2) Нехай тепер точка $t \in T$ – право-гранична. Використовуючи (5), отримаємо

$$(x^r)^{\Delta}(t) = \frac{x^r(\sigma(t)) - x^r(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} z^r(s)ds .$$

Оскільки O_a – опукла множина, та $z^r(s) \in O_a$, тоді права частина цієї рівності належить $\bar{O}_a$. Перейдемо до границі при $r \to \infty$. Оскільки $\bar{O}_a$ – замкнена множина, отримаємо:

$$(x^*)^{\Delta}(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} z^*(s)ds \in \bar{O}_a .$$

Нехай $h \to 0$, тоді $(x^*)^{\Delta}(t) \in \bar{O}_a$. Але $a > 0$ ми вибирали довільним чином. Отже, $(x^*)^{\Delta}(t) \in F.$ Лему доведено.

Має місце наступна лема.

Лема 4. Існує таке керування u^*, що $(x^*(0), u^*) \in F'$ і

$$(x^*)^{\Delta} = f(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (10)$$

майже скрізь на $[0, T_0]_T$.

Доведення. За лемою 3 і означенням множини $F(t,x)$ отримаємо, що існує керування $u^*(t)$, яке задовольняє (10). Однак, для того, щоб пара $(x^*(0), u^*) \in F'$ необхідно, щоб функція u^* була вимірною. А це гарантується теоремою про вимірний вибір на часових шкалах [8, теорема 4.1].

Доведення теореми: Оскільки Φ – неперервна функція, то $\Phi(e_x^r) \to \Phi(e_x^*)$ при $r \to \infty$. А $J(x^r(0), u^r) = \Phi(e_x^r)$ збігається до μ, оскільки ця послідовність мінімізуюча. Отже, $J(x^*(0), u^*) = \Phi(e_x^*) = \mu$. Звідси маємо, що функція $J(x(0), u)$ досягає мінімуму на F' на парі $(x^*(0), u^*)$. Теорему доведено.

3. Доповнення до теореми існування.

На часовій шкалі $T, \sup T = +\infty$, розглянемо задачу оптимального керування (1) з критерієм якості Больца :

$$J(x(0), u) = \int_{[t_0, t_1)} L(t, x(t), u(t))\Delta t + \Phi_1(e) \to \inf . \quad (11)$$

Розглянемо наступну множину

$$\tilde{F}(t,x) = \{\tilde{z} : z = f(t,x,u), z_{n+1} \geq L(t,x,u), u \in U\} . (12)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 6. Нехай для системи (1) з критерієм якості (11) виконуються умови a1)–a2), L - неперервна функція, і крім того:

а) F' – непорожня множина,

б) U – замкнена множина,

в) Множина $\tilde{F}(t,x)$ є опуклою для $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$.

г) $L(t,x,u) \geq g(u)$, де g - неперервна функція і $|u|^{-1} g(u) \to \infty$ при $|u| \to \infty, u \in U$.

Тоді існує пара $(x^*(0), u^*) \in F'$, яка мінімізує критерій якості (11).

Доведення цієї теореми складається з шести лем (леми 5.1 – 5.6) і повторює доведення відповідної теореми [3, стр. 97, теорема 4.1]. Ми не будемо повторювати це доведення, зупинимося лише на тих моментах, в яких проявляється специфіка часових шкал. Лема 5.1 в нашому випадку буде звучати так:

Для довільних $\nu > 0, \eta > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|A| < \delta$ і із нерівності $\int_{[0,T_0)_T} g(u(t))\Delta t < \nu$ випливає $\int_A |u(t)|\Delta t < \eta$.

Доведення цієї леми випливає з переходу до розширеної функції $\tilde{u}(t)$ і того факту з [5], що

$$\int_{[a,b)_T} u(t)\Delta t = \int_{[a,b]} \tilde{u}(t)dt .$$

Далі в доведенні теореми використовується поняття рівностепеневої абсолютної неперервності, яке переноситься і на наш випадок. Формулювання і доведення лем 5.2 і 5.3 аналогічне, тільки в доведенні леми 5.3 замість теореми Хеллі використовується її аналог на часових шкалах (теорема 1). Далі аналогічно будуються множини $\tilde{O}_\eta$ і C_η. Формулювання і доведення леми 5.4 аналогічне. Формулювання леми 5.5 аналогічне, а доведення аналогічне за винятком право-розсіяної точки, але таке доведення ми проводили в лемі 3. Формулювання леми 5.6 аналогічне, а доведення базується на використанні аналогу теореми Лебага про диференційованість монотонної функції (теорема 4). Аналогічними міркуваннями, з використанням лем, доводиться і сама теорема 6.

Список використаних джерел

1. *Hilger S.* Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus / S. Hilger. Results Math, 18. – 1990. – p.18 – 56.
2. *Bohner M, Peterson A*. Dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson – Boston: Birkhäuser, 2001. – 369p.
3. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел – Москва: Мир, 1978. – с. 316.
4. *Bohner M. and Peterson A., editors*. Advances in dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson – Boston: Birkhäuser, 2003. – 361p.
5. *Bohner M., Stanzhytskyi A., Bratochkina A.* Stohastic dynamic equastions on general time scales / M. Bohner, A. Stanzhytskyi, A. Bratochkina // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – p. 1-15.
6. *Bourdin L., Trelat E.* Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales / L. Bourdin, E. Trelat // SIAM J. Control Optimal. 5. – 2013. - p. 3781-3813.
7. *Gong Y., Xiang X.* A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales / Y. Gong, X. Xiang // Journal of industrial management optimization, 5(1). – 2009. – p. 1-10.
8. *Pawluszewicz E., Torres D.* Avoidance Control on Time Scales / E. Pawluszewicz , D. Torres // Journal of Optimal Theory. – 2010. – p. 527-542.
9. *Pouso R., Sanjurjo A.* A new unification of continuous, discrete and impulsive calculus through Stieltjes derivatives. [Електронний ресурс] / R. Pouso, A. Sanjurjo – 2015. – Режим доступу до журналу: http:// www. researchgate.net/ publication/ 277952939.

References

1. HILGER, S. (1990**)** Analysis *on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus*. Results Math., p.18 – 56.
2. BOHNER, M. , PETERSON, A. (2001) *Dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
3. FLEMING, U., RISHEL, R. (1978) *Optimal'noe upravlenie determinirovannymi i stohasticheskimi sistemami*. Moskva: Mir.
4. BOHNER, M., PETERSON, A. (ed.) (2003) *Advances in dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
5. BOHNER, M., STANZHYTSKYI, A., BRATOCHKINA, A. (2013) *Stohastic dynamic equastions on general time scales*. Electronic Journal of Differential Equations, p. 1-15.
6. BOURDIN, L., TRELAT, E. (2013) *Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales.* SIAM J. Control Optimal, p. 3781-3813.
7. GONG, Y., XIANG, X. (2009) *A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales.* Journal of industrial management optimization, p. 1-10.
8. PAWLUSZEWICZ, E., TORRES, D. (2010) *Avoidance Control on Time Scales.* Journal of Optimal Theory, *pp. 527-542.*
9. POUSO, R., SANJURJO, A. (2015) A *new unification of continuous, discrete and impulsive calculus through Stieltjes derivatives.* [Online] - Available from: http:// www. researchgate.net/ publication/ 277952939.

Надійшла до редколегії 18.11. 2015